ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 21 - I, 2003. PÁGS. 123-147

Privación, status e imposición sobre la renta

IMEDIO OLMEDO, L. J. y BÁRCENA MARTÍN, E.
Departamento de Estadística y Econometría (68). Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Málaga.
Plaza de El Ejido, s/n. 29013-Málaga. España. Tlf: 952 13 12 03. Fax: 952 13 12 94. E-mail: imedio@uma.es

RESUMEN

En este artículo se propone una formulación para la privación/satisfacción relativas, bajo la hipótesis de que los individuos muestran una preocupación por el status. Se obtienen, en primer lugar, las funciones que proporcionan la privación, satisfacción y satisfacción neta asociadas a cada nivel de renta, se estudian sus propiedades y se calculan sus valores medios para el conjunto de la población. A continuación se analiza el efecto que un impuesto sobre la renta tiene sobre ellas, tanto localmente como para la distribución en su conjunto. A este respecto es relevante la carga fiscal que recae sobre la renta máxima y su correspondiente tipo medio.

Palabras clave: privación, satisfacción, status, imposición sobre la renta.

ABSTRACT

This paper proposes a new formulation for the concepts of relative deprivation and satisfaction under the hypothesis of individuals worries about their status. Firstly, deprivation, satisfaction and net satisfaction functions for each income level are derived, the properties of each of them are studied and the mean values for the entire society are obtained. Secondly, the effect of an income tax over these functions is analysed, not only in local terms but also for the income distribution as a whole. Regards to this, the tax that lies on the maximum income and its average rate turn to be relevant in the formulation of these concepts. Some other conclusions about the results are given at the end.

Keywords: deprivation, satisfaction, status, income taxation.

Código *UNESCO:* 5304 línea 02; 5302 línea 04

1. INTRODUCCIÓN

En los trabajos clásicos que se ocupan de la *privación,* casi todos ellos encuadrados en el ámbito de la Sociología (Stouffer et al. (1949), Davis (1959), Gurr (1968), Crosby

Artículo recibido el 14 de mayo de 2001. Aceptado el 16 de septiembre de 2002.

(1979),...), se hace referencia a sentimientos que surgen como consecuencia de la desigualdad, entendida en un sentido amplio, existente dentro de un *grupo*, subrayando la *relatividad* del concepto. La aportación que ha tenido una mayor repercusión al estudiar la privación desde un punto de vista económico ha sido la de Runciman (1966), debido quizás a que sus enunciados son más precisos[1] y ello hace más abordable su tratamiento analítico.

Al intentar trasladar los enunciados de Runciman al ámbito económico, dada la dificultad de cuantificar la privación, variable latente no observable, las distintas formulaciones que se han propuesto en la literatura (Yitzhaki (1979, 1982), Hey y Lambert (1980), Chakravarty y Chakraborty (1984), Berrebi y Silber (1985), Paul (1991), Chakravarty, Chattopadhyay y Majunder (1995), Podder (1996), Chakravarty y Mukherjee (1999), Ebert y Moyes (2000),..) definen la privación respecto a la renta, variable observable e índice habitual para medir la capacidad de una unidad económica para el consumo y posesión de bienes, mediante una relación que parece razonable suponer monótona decreciente. Bajo este supuesto es evidente que la privación relativa es consecuencia de la diferencia entre las rentas que perciben los individuos, de modo que en una distribución igualitaria la privación, tanto a nivel individual como para el conjunto de la sociedad, es nula. Si el recorrido de la variable renta es $[0, x^*]$, un individuo con renta $x>0$ contempla una partición del mismo en dos intervalos: $(x, x^*]$, que incluye las rentas mayores que la suya, respecto a las que siente privación, y $[0, x]$, al que pertenecen las rentas menores que la suya y respecto a las que está «satisfecho», lo que, para cada formulación concreta, permite definir la *satisfacción* como contrapartida de la privación[2].

Ya se ha señalado que la desigualdad económica es una fuente de privación. Otro concepto relacionado con este es el de pobreza. Como es sabido, se consideran pobres aquellos individuos cuyo nivel de renta es inferior a un nivel prefijado (línea de pobreza) que coincide habitualmente con la mitad de la renta media (o mediana) de la distribución. Por lo

1. Para Runciman un individuo se siente privado de A si: 1) no tiene A, 2) otros individuos tienen A, 3) desea A, y 4) considera factible tener A. Señala que la privación es un concepto relativo dado que cada individuo compara su situación con la de los miembros de algún grupo de la sociedad, en el que centra sus aspiraciones, (lo que para él constituye su grupo de referencia) o con la sociedad en su conjunto, siendo su magnitud la cuantía de la diferencia entre la situación deseada y la situación del individuo que la desea.

2. Al considerar todo el campo de variación de la renta se está tomando a la sociedad en su conjunto como grupo de referencia. Este supuesto, que en principio puede parecer restrictivo, ya que los individuos tienden a establecer comparaciones con quienes consideran próximos y no con quienes están en una situación para ellos inaccesible, en realidad no lo es tanto. Si contemplamos en la distribución distintos grupos de referencia, identificando cada uno de ellos con un intervalo de renta, los resultados que se obtienen a partir de sus respectivas distribuciones truncadas son formalmente idénticos a los obtenidos para la población total, restringiendo las medidas estadísticas que en cada caso sean relevantes a esas distribuciones.

tanto, en la idea de pobreza no hay comparación interpersonal, sino una comparación con una renta de referencia. Debido a que la noción de privación supone un sentimiento de ausencia de algo que se desea, podemos decir que todo pobre está privado, aunque no todo privado es necesariamente pobre. La privación es un concepto relativo, una cuestión de intensidad, el único en la sociedad que no está privado es el individuo que percibe la renta más alta. Como indica Runciman (1966): "*una persona privada relativamente no tiene que estar privada objetivamente, en el sentido de que se pueda demostrar que carece de algo. Además, el concepto de privación relativa implica una comparación con una situación real o imaginaria de otra persona o grupo de ellas*".

Por otra parte, al identificar la utilidad de un individuo con renta x con una función lineal de su renta menos la desutilidad derivada de la privación que experimenta, la utilidad media coincide con funciones de evaluación social (FES) consistentes con el índice de Gini[3] (Lambert (1996), pág. 174). De este modo se establece una relación entre privación y bienestar social.

De las formulaciones de la privación a que hemos hecho referencia, la de mayor repercusión en la literatura y en la que se han basado otras propuestas, ha sido la de Hey y Lambert (1980). Probablemente, ello se debe a que su definición es muy intuitiva y a que su enfoque permite obtener, mediante la especificación de una función de utilidad adecuada, FES que son consistentes con el índice de Gini. Otra característica interesante de esa formulación radica en que toma como punto de partida la comparación entre individuos. Comienza definiendo la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, P(x,z), siendo z>x, para obtener, a continuación, la privación asociada al nivel de renta x, P(x), agregando la privación de ese individuo respecto a los que tienen una renta mayor, y a partir de ella, calculando su esperanza, la privación social media, E(P(X)). En otras propuestas se elude la primera etapa proporcionando distintas definiciones para P(x) a partir de las cuales se obtienen, como valor medio, una amplia gama de índices de desigualdad[4], pero esas definiciones no derivan, al menos de forma explícita, de la comparación entre individuos con distinta situación.

Es evidente que los resultados que se obtienen a partir de una definición específica de la privación y satisfacción relativas, son consecuencia de una elección acerca de cómo realizar la comparación entre individuos con diferentes niveles de renta y, por lo tanto, incorpo-

3. Se trata de funciones de la forma: $W_k(x) = \mu(1–kG)$, $0 \geq k \geq 1$, siendo μ la renta media de la distribución y G su índice de Gini. En particular, para k=1 se obtiene la renta equivalente igualmente distribuida (REID) asociada a dicho índice.

4. De esta forma se procede en Berrebi y Silber (1985). Distintas definiciones de P(x) tienen un valor medio que coincide con índices de desigualdad tales como el índice de Gini generalizado, el índice de Atkinson, el de Theil, ... o con funciones de ellos. Consideramos, sin embargo, que la mayoría de ellas tienen un carácter ad-hoc, pensando en la expresión analítica del índice que se desea obtener.

$$W_k(x) = \mu(1-kG),\ 0 \leq k \leq 1,$$

ran, aunque sea de forma implícita, juicios de valor. En el caso de Hey y Lambert (1980), se identifica la privación con una diferencia de rentas, lo que introduce un concepto absoluto de desigualdad y, de hecho, tanto la privación como la satisfacción social coinciden con el índice absoluto de Gini.

En este artículo proponemos una formulación alternativa para la privación/satisfacción relativas, bajo la hipótesis de que los individuos muestran preocupación por el *status*, lo que equivale a la afirmación de Layard (1980): "*..lo que importa es el orden del percentil ocupado por una persona en la distribución de rentas o salarios*". En tal caso parece razonable admitir que la privación de un individuo con una determinada renta, x, respecto a otro con renta mayor, z, depende, más que de la diferencia entre sus rentas, z-x, de la diferencia entre las posiciones que ambos ocupan en la distribución, F(z)-F(x), siendo F la función de distribución de la renta. Esto es, estamos utilizando el rango de cada individuo en la distribución de rentas como aproximación de su *status*.

Es evidente que la noción de *status* es mucho más amplia y su medición es complicada al encontrarnos de nuevo, como en el caso de la privación, ante una variable no observable directamente, y cuya medición, a través de indicadores, exigiría la utilización de técnicas factoriales o de modelos econométricos de variables latentes. A pesar de ello, este tipo de aproximación nos parece razonable una vez que hemos convenido en definir la privación/satisfacción a partir de la variable renta. Por otra parte, el utilizar la posición de un individuo en la distribución como *proxy* de su *status* es bastante usual en la literatura. Así, en Lambert (1996, Cap.5) al estudiar distintos planteamientos que hacen referencia a las actitudes de los individuos (envidia, altruismo, aversión, preferencia o indiferencia frente a la desigualdad,..) para justificar determinadas familias de funciones de evaluación social, o en Sen (1976) al definir índices de pobreza, se realiza este tipo de aproximación. Adoptando este enfoque, en la sección siguiente obtenemos las funciones que proporcionan la privación, satisfacción y satisfacción neta asociadas a cada nivel de renta, se estudian sus propiedades, su comportamiento respecto a la función de distribución de la renta y se obtienen sus valores medios para el conjunto de la población.

La sección tercera está dedicada al análisis del efecto que un impuesto sobre la renta tiene sobre la privación/satisfacción, bajo el enfoque que proponemos. El estudio de la incidencia de un impuesto sobre la privación ha sido poco tratado en la literatura, al contrario de lo que sucede con las relaciones entre imposición y bienestar. En Imedio, Parrado y Sarrión (1999), se aborda esta cuestión en relación al enfoque de Hey y Lambert. En este trabajo, el análisis se realiza en primer lugar desde un punto de vista local y, posteriormente, para la distribución de renta en su conjunto a través de los valores esperados de las funciones que intervienen en el mismo. Como veremos, a este respecto es relevante la carga fiscal que recae sobre la renta máxima y su correspondiente tipo medio, junto a la hipótesis, mantenida en todo el análisis, de que la aplicación del tributo no modifique la ordenación preexistente de las unidades impositivas, sin que tenga gran incidencia el carácter del impuesto a lo largo de la escala de rentas. Con todo, la progresividad impositiva es, también en este contexto, una característica favorable, lo que se pone de manifiesto al considerar el impuesto proporcional de recaudación equivalente. Respecto a la satisfacción neta, dado que el pago del impuesto no produce efectos uniformes a lo largo del recorrido de la variable renta, determinaremos los tramos para los que se pueden producir cambios significativos. En la última sección se sintetizan los resultados obtenidos.

2. PRIVACIÓN-SATISFACCIÓN Y *STATUS*

Para facilitar el tratamiento analítico supondremos que la variable renta, X, es continua y no negativa, con recorrido [0,x*], que su función de distribución, F(x), es diferenciable con continuidad (la función de densidad f(x)=F´(x) es continua), siendo μ, L(F(x)) y G, respectivamente, la renta media, la curva de Lorenz y el índice de Gini de la distribución. De este modo

$$\mu(x^+) = \frac{\mu(1 - L(F(x)))}{1 - F(x)}$$

es la renta media del conjunto de individuos cuya renta es mayor o igual que x, mientras que

$$\mu(x^-) = \frac{\mu L(F(x))}{F(x)}$$

es la renta media de los individuos con renta menor que x.

Como ya hemos señalado, al optar por una formulación concreta de los enunciados de Runciman se realiza una elección acerca del modo de comparar la situación relativa entre dos individuos de la población, lo que conlleva la introducción de aspectos normativos.

En Hey y Lambert (1980), se define la privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, P(x,z), como:

$$P(x,z) = \begin{cases} z - x \text{ , } si\ z > x \\ 0, \qquad si\ z \le x \text{ ,} \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

de modo que la privación de un individuo con un determinado nivel de renta frente a quien tiene una renta mayor viene dada por la diferencia de rentas, y es nula respecto a quienes tienen niveles de renta inferiores al suyo. La privación del individuo con renta x, P(x), viene dada por:

$$P(x) = \int_0^{x^*} P(x,z)dF(z) = \int_x^{x^*} (z - x)dF(z) = (1 - F(x))(\mu(x^+) - x) =$$
$$= \mu(1 - L(F(x))) - x(1 - F(x)) \text{ ,}$$

por lo que es igual al producto de la proporción de individuos con renta mayor que x y de la diferencia entre la renta media de ese grupo y su propia renta.

Cuando el interés de los individuos se centra en el *status* parece razonable identificar la privación de un individuo respecto a otro con la diferencia entre las posiciones o rangos que ambos ocupan en la distribución, lo que conduce a la siguiente formulación:

Definición 1. La privación de un individuo con renta x respecto a otro con renta z, P(x,z), viene dada por:

$$P(x,z)=\begin{cases} F(z)-F(x), & si\ z>x \\ 0, & si\ z\leq x. \end{cases} \quad \textbf{[2]}$$

Esto es, P(x,z), z>x, es la proporción de individuos cuyas rentas están situadas en el intervalo (x,z).

Las expresiones [1] y [2] constituyen alternativas diferentes para evaluar la privación entre individuos. La utilización de una u otra depende de dónde centren los individuos su interés al realizar comparaciones interpersonales. Mientras que en la primera la discrepancia entre las situaciones de dos individuos se identifica con la diferencia entre sus respectivas rentas, en la segunda se concreta en la diferencia entre las posiciones o rangos que ocupan ambos en la distribución. Conviene observar, sin embargo, que en la expresión [2], P(x,z) también depende de la diferencia de rentas, aunque no de forma lineal. En efecto, aplicando el teorema del valor medio para funciones derivables, si f es la función de densidad de la renta, se verifica:

$$F(z)-F(x)=(z-x)f(\xi),\ x<\xi<z.$$

En consecuencia, si la distribución es unimodal y con acentuada asimetría positiva, como sucede en las distribuciones de renta reales, para un valor fijo de la diferencia z-x, si x y z son rentas pertenecientes a un entorno de la renta modal, f(ξ) será elevado, próximo al valor máximo, y también lo será P(x,z), mientras que para rentas situadas en la cola derecha de la distribución, los valores anteriores serán muy pequeños. En el planteamiento de Hey y Lambert, en el que además no interviene la distribución que sigue la renta en el intervalo [x, z], también están presentes este tipo de problemas. En ambos casos son consecuencia de suponer que todos los individuos tienen la población total como grupo de referencia. Lo anterior se soslaya cuando el análisis se restringe a grupos de referencia cerrados[5], lo que en nuestro caso equivaldría a realizar una partición del recorrido de la variable renta en subintervalos (véase nota 2).

5. Un grupo de referencia es cerrado si cuando el individuo i pertenece al grupo de referencia de j, entonces j pertenece el grupo de referencia de i.

En nuestro enfoque, la privación del individuo o unidad con renta x, P(x), se obtiene mediante la expresión:

$$P(x) = \int_0^{x^*} P(x,z)dz = \int_x^{x^*} (F(z) - F(x))dz, \qquad [3]$$

en la que se agrega la privación de ese individuo respecto a quienes tienen una renta mayor que x. Conviene observar que la integración se realiza con respecto a z en vez de hacerlo respecto a F(z). Ello es consecuencia de que dF(z) coincide con la “proporción” de individuos con renta z y dicha proporción ya ha intervenido en la definición de P(x,z). Por lo tanto, el integrar respecto a la función de distribución supondría una doble contabilización de la proporción de individuos con renta z>x. Una forma equivalente de expresar [3] viene dada por[6]:

$$P(x) = x^*(1 - F(x)) - \mu(1 - L(F(x))) = (1 - F(x))(x^* - \mu(x^+)). \qquad [4]$$

Con ello, la privación del individuo con renta x depende de la renta máxima de la distribución, x*, de la proporción de individuos con renta superior a x, 1-F(x), y de la proporción de la renta total que percibe dicho grupo, 1-L(F(x)). En concreto, P(x) es el producto de la proporción de individuos con renta superior a la suya y de la diferencia entre la renta máxima y la renta media de ese grupo. Es inmediato que P(x) es una función estrictamente decreciente de la renta:

$$P'(x) = (x - x^*)f(x) < 0,$$

siendo P(0) = x*-μ y P(x*) = 0. Como función de F(x), sus dos primeras derivadas son:

$$\frac{dP(x)}{d(F(x))} = x - x^* < 0\,, \quad \frac{d^2 P(x)}{d(F(x))^2} = \frac{1}{f(x)} > 0\,,$$

por lo que P(x) es una función estrictamente decreciente y estrictamente convexa del percentil determinado por cada nivel de renta.

La privación media de la sociedad es:

$$E(P(X)) = \int_0^{x^*} P(x)dF(x) = \frac{1}{2}\left[x^* - \mu(1+G)\right] = \frac{1}{2}\left[(x^* - \mu) - \mu G\right], \qquad [5]$$

de modo que decrece al disminuir la diferencia entre la renta máxima y la renta media de la distribución, pero aumenta, fijados ambos valores, cuando disminuye la desigualdad relativa, evaluada mediante el índice de Gini o con cualquier otro índice que sea consistente

6. Este resultado, junto a otros de esta sección, se prueban en la Proposición A1 del Apendice.

con el criterio de ordenación de Lorenz[7]. Esto último puede parecer un tanto sorprendente, aunque no implica que, en general, exista una relación inversa entre privación y desigualdad relativa, dado que ello sólo es cierto para los índices de la citada familia. Si la desigualdad se cuantifica, por ejemplo, mediante la desviación relativa media, el índice de Schutz o la varianza de los logaritmos, ese tipo de relación no tiene por qué mantenerse[8]. En realidad, la expresión [5], si no se fija la renta media, se puede interpretar como una diferencia entre dos índices absolutos de desigualdad: x^*-μ, que puede considerarse como una especie de recorrido, y el índice absoluto de Gini, μG.

En nuestra formulación[9] parece natural definir la satisfacción relativa entre individuos del siguiente modo:

Definición 2. La satisfacción relativa de una unidad con renta *x* respecto a otra con renta *z*, se formula como:

$$S(x,z)=\begin{cases} F(x)-F(z)\,, si\ x>z \\ 0\,, \qquad si\ z\geq x\,, \end{cases} \qquad [6]$$

de manera que sea la contrapartida de la privación (expresión [2]).

La satisfacción del individuo con renta x vendría dada por:

$$S(x)=\int_0^x (F(x)-F(z))dz=\mu L(F(x))=LG(F(x))=F(x)\frac{\mu L(F(x))}{F(x)}=F(x)\mu(x^-), \qquad [7]$$

y coincide con el valor de la curva de Lorenz generalizada en el percentil p=F(x), producto de la proporción de individuos con renta menor que x y de la renta media de ese grupo. Es inmediato que S(x) es una función estrictamente creciente de x (S´(x) = xf(x) > 0) con S(0) = 0 y S(x*) = μ. Como función de F(x), es estrictamente creciente y convexa, ya que:

7. Un índice de desigualdad es Lorenz-consistente si la ordenación que induce en el conjunto de distribuciones de renta coincide con la que se obtiene a través de la curva de Lorenz. Foster (1985) caracteriza esta clase de índices: son índices relativos que satisfacen el principio de transferencias de Pigou-Dalton, el principio de población de Dalton y el principio de simetría. Los más utilizados en el trabajo empírico son el de Gini, el de Atkinson, el de Theil y los de entropía generalizada de Shorrocks.

8. Los perfiles de renta x_1=(2.4, 3, 5.6, 7) y x_2=(2, 3.5, 5.5, 7) tienen ambos la misma renta máxima y la misma renta media. Sin embargo sus respectivos índices de Gini y sus desviaciones relativas medias valoran la desigualdad de manera inversa: $G_1=0.2277<G_2=0.2361$, mientras que $DRM_1=0.40>DRM_2=0.388$.

9. En Hey y Lambert (1980) la satisfacción de un individuo con renta x respecto a otro de renta z, viene dada por: $S(x,z)=\begin{cases} x-z & si\ x>z \\ 0 & si\ x\leq z \end{cases}$, y con ello la satisfacción del individuo con renta x, es:

$$S(x)=\int_0^x (x-z)dF(z)=xF(x)-\mu L(F(x))=F(x)(x-\mu(x^-))$$

$$\frac{dS(x)}{d(F(x))} = x > 0 \ , \ \frac{d^2S(x)}{d(F(x))^2} = \frac{1}{f(x)} > 0 \ .$$

El valor de la satisfacción para el conjunto de la sociedad es:

$$E[S(X)] = \frac{\mu}{2}(1-G) \ , \qquad [8]$$

la mitad de la renta equivalente de equidistribución asociada al índice de Gini[10], por lo que coincide con el de una medida de bienestar (véase nota 3).

La satisfacción neta asociada a cada nivel de renta, utilizando [4] y [7], se expresa como:

$$SN(x) = S(x) - P(x) = \mu - x^*(1 - F(x)) \ , \qquad [9]$$

y depende únicamente, fijadas las rentas μ y x^*, del percentil que cada individuo ocupa en la distribución. Es inmediato que $SN(0)=\mu-x^*<0$, $SN(x^*)=\mu$, siendo una función estrictamente creciente de la renta ($SN'(x)=x^*f(x)>0$). Dado que $SN''(x)=x^*f'(x)$, para distribuciones de renta unimodales, es una función estrictamente cóncava a partir de la renta modal. Como función de $F(x)$, es lineal con pendiente positiva. La satisfacción neta es nula para el nivel de renta, x_1, tal que:

$$1 - F(x_1) = \frac{\mu}{x^*} \qquad [10]$$

y positiva para $x>x_1$. Las distribuciones de renta reales suelen presentar una acentuada asimetría hacia la derecha, de modo que el cociente $\frac{\mu}{x^*}$ es pequeño y, en consecuencia, x_1 será un nivel de renta alto.

Las propiedades de $SN(x)$, crecimiento estricto y concavidad a partir de la renta modal, permiten considerarla como una función de utilidad de la renta $U(x,F)$, cuyo valor medio:

$$E[U(x,F)] = E[SN(X)] = \mu - \frac{x^*}{2} \ , \qquad [11]$$

puede interpretarse, fijada la renta máxima de la distribución, como una FES indiferente a la desigualdad, al depender unicamente de la renta media. Desde este punto de vista, el bienestar social sería negativo cuando la renta máxima sea superior al doble de la renta media, circunstancia habitual en las distribuciones de renta que se presentan en la realidad.

10. En el enfoque de Hey y Lambert, la satisfacción neta asociada al nivel de renta x es $SN(x)=S(x)-P(x)=x-\mu$, positiva (negativa) para rentas por encima (por debajo) de la renta media y nula para $x=\mu$. En consecuencia, para el conjunto de la sociedad, la privación y la satisfacción global coinciden, por lo que la satisfacción neta media será nula, y su valor común es el índice absoluto de Gini de la distribución: $E(P(X)) = E(S(X)) = \mu G$.

Dadas dos distribuciones de renta, las igualdades [5], [8] y [11] nos permiten decir cual de ellas implica mayor o menor privación, satisfacción o satisfacción neta medias para la sociedad, ya que se trata de comparar números reales. Una cuestión diferente es el establecer un tipo de relación similar para los valores que esas funciones asocian a cada nivel de renta concreto. Supongamos que F_1 y F_2 son dos funciones de distribución de la renta y designemos por $P_i(x)$, $S_i(x)$ y $SN_i(x)$, i=1,2, la privación, satisfacción y satisfacción neta del nivel de renta x en la distribución F_i. Bajo el supuesto de que ambas distribuciones tengan la misma renta máxima, x*, y la misma renta media, μ, definamos, a partir de [4], [7] y [9] las siguientes funciones:

$$p(x) = P_1(x) - P_2(x) = x^*(F_2(x) - F_1(x)) + \mu(L(F_1(x)) - L(F_2(x))),$$
$$s(x) = S_1(x) - S_2(x) = \mu(L(F_1(x)) - L(F_2(x))),$$
$$sn(x) = SN_1(x) - SN_2(x) = x^*(F_1(x) - F_2(x)).$$

Si F_1 domina en primer orden a F_2, el primer sumando de p(x) es positivo y también lo es el segundo ya que la curva de Lorenz de F_1 domina a la de F_2, a la vez que s(x) es positiva y sn(x) negativa[11]. En consecuencia, la distribución dominante en primer orden es la que implica mayor privación y también mayor satisfacción para cada nivel de renta, mientras que la distribución dominada es la que asocia una mayor satisfacción neta a cada renta. Esto es, en términos de privación, un individuo, fijado su nivel de renta, entre dos distribuciones preferiría aquella en la que la gráfica de la función de distribución quedase por encima de la otra, lo que supone una preferencia por la desigualdad cuando para su valoración se utiliza un índice consistente con el criterio de ordenación de Lorenz[12]. Para la satisfacción, sus preferencias irían en sentido contrario y para la satisfacción neta de nuevo le es más favorable la distribución dominada.

11. En general, se dice que F1 presenta dominancia estocástica de orden k sobre F2, si se verifica: $F_{1,k}(x) \leq F_{2,k}(x)$, para todo x>0 con desigualdad estricta para al menos un punto, siendo:

$$F_{i,k}(x) = \int_0^x F_{i,k-1}(t)dt, \quad i=1,2,$$

con Fi,1(x)=Fi(x). Cuando k=2 la dominancia es de segundo orden y equivale a la dominancia en el sentido de la curva de Lorenz generalizada:

$$LG_1(p) \geq LG_2(p), \text{ para todo } p \in [0,1]$$

y con desigualdad estricta para al menos un valor de p, que a su vez es equivalente, para distribuciones de igual tamaño y renta media, a la dominancia en el sentido de la curva de Lorenz. Las dominancias de órdenes sucesivos están anidadas, en el sentido de que la de primer orden implica la de orden dos y ésta a las de órdenes superiores (véase Muliere y Scarsini (1989)).

12. Esta preferencia por la desigualdad no se mantiene necesariamente al considerar índices que no sean Lorenz-consistentes. (Véase nota 8).

3. EFECTO DE UN IMPUESTO SOBRE LA RENTA SOBRE LA PRIVACIÓN/ SATISFACCIÓN DEFINIDAS A PARTIR DEL *STATUS*

Supongamos que t(x) es un impuesto que grava la renta, y que la carga fiscal que recae sobre cada unidad económica sólo depende de su renta inicial[13]. Dado que la formulación de algunos conceptos es más sencilla, consideramos t(x) derivable[14]. Para la renta x, t(x)/x y t´(x) son, respectivamente, el tipo medio y el tipo marginal que soporta. Si T es la recaudación total del impuesto y N el número de contribuyentes, $\alpha = \frac{T}{N\mu}$ es el tipo medio global, y, por lo tanto, $\alpha\mu$ es el impuesto medio, mientras que $\mu(1-\alpha)$ es la renta media disponible.

Como es sabido, el impuesto es progresivo, proporcional o regresivo si el tipo medio, t(x)/x, es, respectivamente, creciente, constante o decreciente, lo que equivale a que el tipo marginal, t´(x) sea mayor, igual o menor que el tipo medio. Si esta condición, en principio local, es válida para todos los niveles de renta, la aplicación del impuesto reduce, deja invariante o aumenta la desigualdad relativa existente en la distribución sobre la que incide. Este concepto de progresividad es el más habitual. Sin embargo, cuando el interés se centra en la desigualdad absoluta, hay que considerar otra noción de progresividad, la absoluta, en la que la característica relevante del impuesto es el signo de su tipo marginal. En este contexto, fijado un nivel de renta, el impuesto es progresivo, constante o regresivo si el tipo marginal es, respectivamente, positivo, nulo o negativo. La aplicación de tarifas que presenten cada una de estas características a lo largo de toda la escala de rentas, reducen, dejan invariante o aumentan la desigualdad absoluta de la distribución de renta bruta.

En este trabajo supondremos que la renta disponible, x-t(x), es positiva (t(x)/x<1 para todo x>0). Cuando se admite además que es una función creciente de la renta antes de impuestos (t´(x)<1, x>0), lo que equivale a que la aplicación del impuesto no altere la ordenación inicial de las unidades impositivas, se obtienen resultados concluyentes sobre la incidencia que tiene el impuesto, a nivel individual, sobre la privación/satisfacción. La última hipótesis es bastante restrictiva, difícil de mantener en un estudio de carácter temporal, pero no lo es tanto si nos limitamos a un enfoque transversal y además estamos suponiendo que la carga fiscal sólo depende del nivel de renta.

13. Este supuesto equivale a considerar que esas unidades son homogéneas en relación al resto de características y circunstancias que, además de la renta, inciden en la carga fiscal. Podemos, sin embargo, considerar que nos referimos a una subpoblación homogénea respecto de esas otras características.
14. En la práctica, las tarifas impositivas son funciones lineales o polinomiales a trozos, por lo que cumplen esa condición salvo en un número finito de puntos.

Bajo el supuesto anterior, en Imedio, Parrado y Sarrión (1999) se demuestra que cuando la privación se define en el sentido de Hey y Lambert, un impuesto estrictamente creciente reduce la privación/satisfacción de cada contribuyente, y para la sociedad la disminución de la privación/satisfacción global coincide con la disminución de la desigualdad absoluta, medida con el coeficiente absoluto de Gini. Cuando el gravamen es progresivo, la reducción de la satisfacción/privación es mayor que la que produciría el proporcional de igual recaudación, y la ganancia de bienestar, evaluado mediante la FES asociada al índice de Gini, que supone la progresividad frente a la proporcionalidad, coincide con la reducción del valor global de la privación/satisfacción.

En esta sección, siguiendo un esquema análogo al del trabajo citado en lo que se refiere a las cuestiones objeto de análisis y a las técnicas utilizadas para su demostración, se estudia la incidencia del impuesto cuando la privación/satisfacción se formulan a partir del rango de los individuos en la distribución.

3.1. Efecto sobre la privación

Designemos por $P_X(x)$ y $P_{X-T}(x)$ la privación del individuo o unidad impositiva con renta inicial x en las distribuciones antes y después de impuestos, respectivamente, cuyas funciones de distribución denotamos por F y G. Si el pago del impuesto no altera la ordenación preexistente de los contribuyentes, es inmediato que F(x)=G(x-t(x)), x>0. Por lo tanto, a partir de [4] se tiene:

$$P_{X-T}(x) = (x^* - t(x^*))(1 - F(x)) - \mu(1-\alpha)(1 - L_{X-T}F(x)),\ x > 0, \qquad \textbf{[12]}$$

siendo $L_{X-T}(F(x))$ la curva de Lorenz de la distribución de renta disponible[15]. Una expresión equivalente a la anterior es:

$$P_{X-T}(x) = (1 - F(x))\left((x^* - t(x^*)) - \frac{\mu(1-\alpha)(1 - L_{X-T}(F(x)))}{1 - F(x)}\right). \qquad \textbf{[13]}$$

La privación asociada a la renta inicial x en la distribución de renta después de impuestos tiene una interpretación análoga a la del segundo tramo de la igualdad [4], pero referida

15.Viene definida mediante la expresión:

$$L_{X-T}(F(x)) = \frac{1}{\mu(1-\alpha)}\int_0^1 (s - t(s))dF(s),\ x \geq 0,$$

y proporciona participaciones acumuladas, por percentiles de renta antes de impuestos, en la distribución de la renta disponible. Su derivada respecto a F(x), vienen dada por:

$$\frac{dL_{X-T}(F(x))}{d(F(x))} = \frac{x - t(x)}{\mu(1-\alpha)}.$$

a la distribución de renta disponible, ya que la expresión entre paréntesis en la igualdad anterior es la diferencia entre la renta máxima neta y la renta disponible media del conjunto de unidades cuya renta bruta es mayor que x. Si h(x) es la diferencia entre la privación antes y después de impuestos para el nivel de renta x, es decir, $h(x)=P_X(x)-P_{X-T}(x)$, es fácil comprobar que su derivada,

$$h'(x) = P'_X(x) - P'_{X-T}(x) = (t(x) - t(x^*))f(x),$$

es una función negativa si y sólo si el contribuyente con mayor renta soporta la mayor carga fiscal. Este resultado que, de entrada puede parecer un tanto sorprendente, es consecuencia del papel que desempeña la renta máxima en la privación individual tanto en la distribución de renta inicial como en la de renta disponible. Si nuestro análisis se restringiese a un grupo de referencia, nos estaríamos refiriendo a la carga que recae sobre la renta máxima del grupo y el resultado parecería menos contundente al referirse a un nivel de renta más próximo al de cada individuo. Una condición suficiente para que se satisfaga el supuesto anterior es que el impuesto sea una función creciente del nivel de renta, lo que responde al concepto de progresividad absoluta. En tal caso, la función h(x) es estrictamente decreciente y, dado que se anula en el nivel de renta máxima, $h(x^*)=0$, podemos asegurar que $h(x)>0$, $0<x<x^*$. Esto es, la aplicación de un impuesto que cumpla la condición señalada implica una reducción de la privación relativa para todos los niveles de renta. Para el conjunto de la sociedad, la reducción de la privación global, aplicando [5], viene dada por:

$$\begin{aligned} E(P_X - P_{X-T}) &= \int_0^{x^*} (P_X(x) - P_{X-T}(x))dF(x) = \\ &= \frac{1}{2}[x^* - \mu(1+G_X) - (x^* - t(x^*) + \mu(1-\alpha)(1+G_{X-T}))] = \\ &= \frac{1}{2}[(t(x^*) - \mu\alpha) + (GA_{X-T} - GA_X)], \end{aligned} \qquad [14]$$

por lo que depende: a) de la diferencia entre el impuesto que paga la renta máxima y el impuesto medio, y b) de la variación de la desigualdad absoluta en la distribución de la renta que produce el pago del impuesto, evaluada mediante la diferencia entre los índices absolutos de Gini de las distribuciones después y antes de impuestos. En particular, un impuesto constante o de capitación ($t(x)=a$, para todo $x>0$) dejaría invariante tanto la privación de cada unidad impositiva como la privación global de la sociedad, al ser $t(x^*)=\mu\alpha=a$ y $GA_{X-T}=GA_X$, mientras que para un impuesto estrictamente creciente, tipos marginales positivos, se cumple $t(x^*)>\mu\alpha$ y $GA_{X-T}<GA_X$, de modo que en [14] aparecen dos sumandos de distinto signo, aunque la suma total es positiva al coincidir con la esperanza de una función positiva, E[h(X)].

Si un impuesto es progresivo en el sentido habitual, tipos medios crecientes, su aplicación no sólo disminuye la desigualdad absoluta de la distribución sobre la que incide, ya que los tipos marginales son mayores que los tipos medios y, por lo tanto, positivos, sino también la desigualdad relativa. Para estudiar el posible efecto de un impuesto progresivo en relación a la privación vamos a compararlo, como es usual, con el impuesto proporcional de recaudación equivalente ($t(x)=\alpha x$, $x>0$). Si $P_{PROP}(x)$ es la privación del individuo con renta inicial x en la distribución que resulta de la aplicación de un impuesto proporcional, se tiene:

$$P_{PROP}(x) = (1-\alpha)x^*(1-F(x)) - \mu(1-\alpha)(1-L_X(F(x))),\ x>0, \qquad \textbf{[15]}$$

ya que para un impuesto proporcional, al dejar invariante la desigualdad relativa, las curvas de Lorenz de las distribuciones de renta antes y después de impuestos coinciden. Designemos por $P_{X-T}(x)$ la privación del mismo individuo tras la aplicación de un impuesto progresivo equivalente y consideremos la función $m(x)=P_{X-T}(x)-P_{PROP}(x)$. A partir de [12] y [15] resulta:

$$m(x) = P_{X-T}(x) - P_{PROP}(x) = (\alpha x^* - t(x^*))(1-F(x)) + \mu(1-\alpha)(L_{X-T}(F(x)) - L_X(F(x)))$$

Si el impuesto es progresivo, el primer sumando de la expresión anterior es negativo, ya que el tipo medio de la renta máxima es mayor que el tipo medio global, mientras que el segundo es positivo ya que en ese supuesto la curva de Lorenz de la distribución de renta disponible domina a la de la distribución de renta antes de impuestos[16]:

$$L_{X-T}(F(x)) > L_X(F(x)).$$

En consecuencia, es necesario un estudio adicional para comprobar si m(x) tiene signo constante en toda la escala de rentas. La derivada de esta función es:

$$m'(x) = -(\alpha x^* - t(x^*))f(x) + \mu(1-\alpha)\left[\frac{x-t(x)}{\mu(1-\alpha)} - \frac{x}{\mu}\right]f(x) =$$
$$= [t(x^*) - \alpha x^* - (t(x) - \alpha x)]f(x),$$

positiva si $0<x<x^*$ (véase Proposición A2 del Apéndice). Al ser m(x) estrictamente creciente y $m(x^*)=0$, es $m(x)<0$ para todo $0<x<x^*$, de modo que:

$$P_{X-T} < P_{PROP}(X),$$

16. Este resultado se conoce como el teorema de Jakobsson (1976)-Fellman (1976)-Kakwani (1977a). Una demostración del mismo se hace en Lambert (1996), pag. 201.

lo que implica que un impuesto progresivo reduce la privación de cada contribuyente en mayor cuantía que el impuesto proporcional de igual recaudación. Para la población, la reducción de la privación global que conlleva la progresividad en relación a la proporcionalidad, teniendo en cuenta [5], es:

$$E\left[P_{PROP}-P_{X-T}\right]=\frac{1}{2}[x^{*}(1-\alpha)-\mu(1-\alpha)(1+G_X)]-\frac{1}{2}[x^{*}-t(x^{*})-\mu(1-\alpha)(1+G_{X\text{-}T})]= \\ =\frac{1}{2}[(t(x^{*})-\alpha x^{*})+\mu(1-\alpha)I_{RS}], \qquad [16]$$

siendo $I_{RS}=G_X-G_{X-T}$ el índice clásico de Reynolds-Smolensky, utilizado para medir el efecto redistributivo del impuesto a través de la variación del coeficiente de Gini de las distribuciones de renta antes y después de la aplicación del mismo.

Bajo la hipótesis de que el impuesto presente tipos marginales menores que la unidad a lo largo de toda la escala de rentas, es sabido que la relación entre I_{RS} y el índice de progresividad de Kakwani, I_K, utilizado para medir la desviación existente entre un impuesto y el proporcional equivalente, es:

$$I_{RS}=\frac{\alpha}{1-\alpha}I_K \qquad [17]$$

de donde, la igualdad [14] también se puede expresar en la forma:

$$E\left[P_{PROP}\right]-E\left[P_{X-T}\right]=\frac{1}{2}((t(x^*)-\alpha x^*)+\mu\alpha I_K) \qquad [18]$$

Las relaciones [16] y [18] indican que un aumento de la progresividad del impuesto sin que varíe la recaudación (α permanece fijo) implica una mayor reducción de la privación de la sociedad, debido, por una parte, al incremento de los índices I_{RS} e I_K y, por otra, al aumento del tipo medio asociado a la renta máxima, lo que incrementa la diferencia $t(x^*)-\alpha x^*$.

La siguiente proposición resume los resultados obtenidos, hasta ahora, en esta sección.

Proposición 1. Si sobre una distribución de renta incide un impuesto, t(x), cuya aplicación no altera la ordenación inicial de los contribuyentes, se verifica:

a) Se reduce la privación de cada nivel de renta si el contribuyente que percibe la renta máxima soporta la mayor carga fiscal. Bajo este supuesto, la reducción de la privación social es mayor en la medida en que aumente la diferencia entre el impuesto que grava a la renta máxima y el impuesto medio. Se produce este mismo efecto cuanto menor sea la reducción de la desigualdad absoluta, evaluada mediante el índice absoluto de Gini, al pasar de la distribución de la renta antes de impuestos a la de la renta disponible.

b) Si t(x) es progresivo, su aplicación reduce la privación de cada unidad impositiva y lo hace en mayor medida que el impuesto proporcional de recaudación equivalente. La reducción de la privación social aumenta al hacerlo la progresividad del impuesto, debido a la conjunción de dos efectos: incremento del índice de Reynolds-Smolensky (o del índice de Kakwani) e incremento, simultáneo, de la diferencia entre el tipo medio a que se grava la renta máxima de la distribución y el tipo medio global del impuesto.

3.2. Efecto sobre la satisfacción

Si $S_X(x)$ y $S_{X\text{-}T}(x)$ representan la satisfacción del contribuyente con renta inicial x en las distribuciones de renta antes y después de impuestos, respectivamente, a partir de [7], se tiene:

$$S_{X\text{-}T}(x) = \mu(1-\alpha)\,L_{X\text{-}T}(F(x)) = LG_{X\text{-}T}(F(x)) = F(x)\left(\frac{\mu(1-\alpha)\,L_{X\text{-}T}(F(x))}{F(x)}\right) \quad \textbf{[19]}$$

La satisfacción, en la distribución de renta disponible, del individuo con renta inicial x es el valor de la curva de Lorenz generalizada de dicha distribución en p=F(x) y su interpretación es análoga a la de $S_X(x)$. Es inmediato que para cualquier impuesto positivo, se verifica la desigualdad:

$$S_{X\text{-}T}(x) = LG_{X\text{-}T}(F(x)) = \int_0^x (s-t(s))ds \leq \int_0^x sf(s)ds = LG_X(F(x)) = S_X(x),$$

de manera que el pago del impuesto reduce la satisfacción de cada contribuyente. Para la población, la reducción de la satisfacción, teniendo en cuenta [8], es:

$$E\left[S_X - S_{X\text{-}T}\right] = \frac{1}{2}\left[\mu(1-G_X) - \mu(1-\alpha)(1-G_{X\text{-}T})\right] = \frac{1}{2}\left[\mu\alpha + (GA_{X\text{-}T} - GA_X)\right], \quad \textbf{[20]}$$

por lo que depende del impuesto medio y de la variación de la desigualdad absoluta, evaluada mediante el índice absoluto de Gini, al pasar de la distribución de la renta antes de impuestos a la de la renta después de impuestos.

Como el valor esperado de la satisfacción coincide con el de una medida de bienestar, la renta equivalente igualmente distribuida (REID) asociada al índice de Gini, y es sabido que la progresividad de un impuesto es una característica favorable, en términos de bienestar, frente a otros procedimientos para obtener la misma recaudación a partir de una distribución de renta inicial dada, si t(x) es progresivo con tipo medio global α, y lo comparamos con el impuesto proporcional equivalente de igual rendimiento mediante las curvas de Lorenz generalizadas de las distribuciones de renta disponible a que ambos dan lugar, resulta:

$$S_{X-T}(x) = LG_{X-T}(F(x)) = \mu(1-\alpha)L_{X-T}(F(x)) \geq$$
$$\geq \mu(1-\alpha)L_X(F(x)) = \mu(1-\alpha)L_{PROP}(F(x)) = LG_{PROP}(F(x)) = S_{PROP}(x),$$

por lo que la pérdida de satisfacción que a cada contribuyente le supone el pago del impuesto:

$$S_X(x) - S_{X-T}(x) = S_X(x) - S_{PROP}(x) + (S_{PROP}(x) - S_{X-T}(x)) \leq S_X(x) - S_{PROP}(x),$$

será menor al aplicar un impuesto progresivo que uno proporcional de igual recaudación y esa reducción será menor en la medida en que aumente la progresividad del impuesto para todos los niveles de renta, dado que bajo ese supuesto la curva de Lorenz de la distribución de renta neta se desplaza hacia arriba (teorema de Jakobsson (1976)-Fellman (1976)-Kakwani (1977a)).

Si W_X, W_{X-T} y W_{PROP} representan, respectivamente, los niveles de bienestar, evaluados mediante la REID asociada al índice de Gini, asociados a las distribuciones de renta antes de impuestos, después de impuestos y a la disponible tras la aplicación de un impuesto proporcional equivalente, a partir de [8], resulta:

$$\begin{aligned} E(S_X) &= \frac{1}{2}W_X = \frac{\mu}{2}(1-G_X) \\ E(S_{X-T}) &= \frac{1}{2}W_{X-T} = \frac{\mu(1-\alpha)}{2}(1-G_{X-T}) \\ E(S_{PROP}) &= \frac{1}{2}W_{PROP} = \frac{\mu(1-\alpha)}{2}(1-G_X), \end{aligned} \qquad \textbf{[21]}$$

de modo que a partir de esas expresiones, se obtiene:

$$E(S_{X-T}) - E(S_{PROP}) = \frac{1}{2}(W_{X-T} - W_{PROP}) = \frac{\mu(1-\alpha)}{2}(G_X - G_{X-T}) = \frac{\mu(1-\alpha)}{2}I_{RS} = \frac{\mu\alpha}{2}I_K, \qquad \textbf{[22]}$$

igualdades que proporcionan una interpretación normativa a los índices de Reynolds-Smolensky, I_{RS}, y de Kakwani, I_K. Cuando t(x) es progresivo ($I_{RS}>0$, $I_K>0$) se tiene que $E(S_{X-T})>E(S_{PROP})$, y un incremento de la progresividad sin que varíe la recaudación (α permanece fijo) implica mayor satisfacción global en relación al impuesto proporcional equivalente, o lo que es lo mismo, menor es la reducción de la satisfacción social respecto a la ausencia de imposición. Si el impuesto es regresivo ($I_{RS}<0$, $I_K<0$) las conclusiones irían en sentido contrario, mientras que si es proporcional ($I_{RS}=I_K=0$), es $E(S_{X-T})=E(S_{PROP})$[17].

17. El conflicto entre progresividad y recaudación, en términos de satisfacción global, se pone de manifiesto cuando varía α, ya que, en ese caso, también lo hace la renta media disponible, $\mu(1-\alpha)$, y aunque aumentasen o disminuyesen I_{RS}, I_K, el efecto sobre $E(S_{X-T})$-$E(S_{PROP})$ sería incierto.

Las consideraciones anteriores se sintetizan en la siguiente proposición.

Proposición 2. Si t(x) es un impuesto que grava la renta y que no altera la ordenación inicial de las unidades impositivas, se verifica:

a) Si t(x) es positivo, independientemente de su carácter, su aplicación implica una disminución de la satisfacción para todos los niveles de renta.
b) La reducción de la satisfacción social coincide con la disminución de bienestar, evaluado mediante la REID asociada al índice de Gini, al pasar de la distribución de renta bruta a la de renta neta.
c) Si t(x) es progresivo (regresivo) la reducción de la satisfacción, para cada nivel de renta, es menor (mayor) que la que implica el impuesto proporcional equivalente.
d) El índice de Reynolds-Smolensky (Kakwani) es, salvo una constante, el cociente entre el aumento de la satisfacción global que supone la sustitución de un impuesto proporcional por otro progresivo de igual recaudación y la renta media disponible (el impuesto medio).

3.3. Efecto sobre la satisfacción neta

El pago de un impuesto positivo supone una disminución de la satisfacción para todos los niveles de renta y tiene también ese efecto sobre la privación cuando la renta máxima soporta la mayor carga fiscal. Sin embargo, el efecto sobre la satisfacción neta no es uniforme a lo largo de la escala de rentas, sino que depende del percentil que ocupa cada unidad dentro de la distribución.

Si $SN_X(x)$ y $SN_{X-T}(x)$ son, respectivamente, la satisfacción neta del individuo con renta bruta x en la distribución antes y después de impuestos, se tiene a partir de [5], [12] y [19]:

$$\begin{gathered} SN_X(x) = S_X(x) - P_X(x) = \mu - x^*(1 - F(x)) \\ SN_{X-T}(x) = S_{X-T}(x) - P_{X-T}(x) = \mu(1 - \alpha) - (x^* - t(x^*))(1 - F(x)), \end{gathered} \qquad [23]$$

de donde:

$$SN_X(x) - SN_{X-T}(x) = \mu\alpha - t(x^*)(1 - F(x)), \qquad [24]$$

función estrictamente creciente que se anula para el nivel de renta x_2 que cumple la condición:

$$1 - F(x_2) = \frac{\mu\alpha}{t(x^*)}, \qquad [25]$$

de forma que para $x<x_2$ $(x>x_2)$ es $SN_X(x)<SN_{X-T}(x)$ $(SN_X(x)>SN_{X-T}(x))$. Este nivel de renta , que separa a quienes ganan y pierden -en términos de satisfacción neta- como consecuencia de la aplicación del impuesto, es aquel tal que la proporción de contribuyentes con renta superior a él, coincide con la relación existente entre el impuesto medio y el que soporta la renta máxima. El valor de ese cociente, si el impuesto es progresivo, o simplemente creciente, será pequeño y, por lo tanto, x_2 tenderá a ser elevado. En definitiva, lo que determina la variación de la satisfacción neta de un individuo, como consecuencia del pago del impuesto, no es su carga fiscal, sino su posición en la distribución.

En la distribución de renta disponible, a partir de [23], es inmediato que la satisfacción neta es nula para el nivel de renta x_0 definido mediante la igualdad:

$$1 - F(x_0) = \frac{\mu(1-\alpha)}{x^* - t(x^*)}, \qquad \textbf{[26]}$$

mientras que en la distribución de renta antes de impuestos se verificaba esta condición para el nivel de renta x_1 definido mediante [10].

A partir de las igualdades que los definen, es sencillo determinar la posición relativa de x_0, x_1 y x_2. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1-F(x_1)}{1-F(x_0)} = \frac{1-\dfrac{t(x^*)}{x^*}}{1-\alpha} < 1 \quad , \quad \frac{1-F(x_2)}{1-F(x_1)} = \frac{\alpha}{\dfrac{t(x^*)}{x^*}} < 1 \quad ,$$

si el tipo medio global del impuesto es menor que el que soporta la renta máxima, la monotonía de la función de distribución implica $x_0 < x_1 < x_2$. En el siguiente cuadro se resumen estos resultados:

EVOLUCIÓN DE LA SATISFACCIÓN NETA A LO LARGO DE LA ESCALA DE RENTAS ((*t*(*x)/*x**)>a)**

	$(0, x_0)$	**x_0**	**(x_0, x_1)**	**x_1**	**(x_1, x_2)**	**x_2**	**$(x_2, x^*]$**
SN_X	-	-	-	**0**	+	+	+
SN_{X-T}	-	**0**	+	+	+	+	+
$SN_X - SN_{X-T}$	-	-	-	-	-	**0**	+

La condición bajo la cual se satisface lo anterior es más débil que la de la progresividad. Si el impuesto fuese proporcional, $t(x)=\alpha x$, para $x>0$, es evidente que:

$$F(x_0) = F(x_1) = F(x_2) = 1 - \frac{\mu}{x^*},$$

de modo que $x_0 = x_1 = x_2$, por lo que un impuesto de ese tipo no modifica el nivel de renta a partir del cual cambia el signo de la satisfacción neta.

Para analizar el efecto del impuesto sobre el valor esperado de la satisfacción neta, basta tener en cuenta la expresión [11] junto con las siguientes, que se obtienen a partir de ella:

$$E[SN_{X-T}] = \mu(1-\alpha) - \frac{x^* - t(x^*)}{2},$$
$$E[SN_X - SN_{X-T}] = \mu\alpha - \frac{t(x^*)}{2}. \qquad [27]$$

También en esta cuestión lo relevante es la carga fiscal que recae sobre la renta máxima. La satisfacción neta global en la distribución de renta disponible es mayor que la asociada a la distribución de renta inicial, si el impuesto que soporta la renta máxima es superior al doble del impuesto medio. Para el impuesto proporcional equivalente a t(x), es inmediato que:

$$E[SN_{PROP}] = (1-\alpha)(\mu - \frac{x^*}{2}),$$

y, en consecuencia:

$$E(SN_{X-T}) - E(SN_{PROP}) = \frac{t(x^*) - \alpha x^*}{2}, \qquad [28]$$

de modo que siempre que el tipo medio al que se grava la renta máxima sea mayor que el tipo medio global, la satisfacción neta asociada a la distribución de renta disponible será superior a la asociada a la distribución resultante de aplicar un impuesto proporcional de igual recaudación.

Proposición 3. Si el impuesto t(x) que grava la renta presenta tipos medios y marginales menores que la unidad, se verifica:

a) Su aplicación no tiene un efecto uniforme sobre la satisfacción neta asociada a cada nivel de renta, sino que depende del percentil correspondiente.
b) Ganan (pierden) en términos de satisfacción neta las unidades impositivas cuyo nivel de renta es inferior (superior) al que cumple que la proporción de unidades con renta superior coincide con el cociente entre el impuesto medio y el que recae sobre la renta máxima.
c) La satisfacción neta de la sociedad aumenta al aplicar un impuesto en el que la renta máxima soporte una carga superior al doble del impuesto medio. Además, un impuesto que grave la renta máxima a un tipo mayor que el tipo medio global, da lugar a una distribución de renta disponible cuya satisfacción neta global es mayor a la asociada a la distribución de renta neta que resultaría de aplicar un impuesto proporcional de recaudación equivalente[18].

18. Si en la distribución de renta inicial es $x^* > 2\mu$, es evidente que $t(x^*) > \alpha x^*$ implica $t(x^*) > 2\mu\alpha$, de modo que la primera condición es consecuencia de la segunda.

4. CONCLUSIONES

Dada una distribución de renta sobre los individuos de una población, en este trabajo hemos propuesto una formulación analítica de los enunciados de Runciman cuando los individuos muestran preocupación por el *status*, de manera que la privación/satisfacción de cada uno de ellos se obtiene al comparar su rango en la distribución con el de otros miembros de la población. Bajo este supuesto, la privación asociada a un nivel de renta dado depende de las rentas media y máxima de la distribución, de la proporción de individuos con renta superior a la considerada y de la participación de ese grupo en la renta total, mientras que la satisfacción coincide con el valor de la curva de Lorenz generalizada en el percentil definido por el nivel de renta en cuestión. Por su parte, la satisfacción neta es una función lineal creciente del percentil que cada individuo ocupa en la distribución de rentas. Los valores medios de estas funciones se expresan a partir de la desigualdad existente en la distribución, de su renta media y de su renta máxima.

Localmente, una diferencia importante de estos resultados con los que se derivan del enfoque de Hey y Lambert radica en el papel que desempeña, en relación a la privación, la renta máxima y en el diferente comportamiento de las funciones de satisfacción neta. A nivel global, se ponen de manifiesto al menos dos diferencias importantes entre ambas formulaciones. Por una parte, mientras que en la de Hey y Lambert coinciden los valores de la privación y de la satisfacción global, siendo, por lo tanto, nula la satisfacción neta global, en nuestra formulación ese valor depende del grado de asimetría hacia la derecha que presente la distribución de la renta, siendo negativo para toda distribución cuya renta máxima sea mayor que el doble de la renta media, característica que presentan habitualmente las distribuciones de renta reales. En segundo lugar, la satisfacción global tiene un carácter muy distinto en ambos casos. En el primero, se identifica con una medida de desigualdad, mientras que en nuestra formulación su valor coincide con el de una medida de bienestar social al ser, salvo una constante, la REID asociada al índice de Gini.

Al analizar el efecto que un impuesto sobre la renta horizontalmente equitativo, en el sentido de que no altere la ordenación inicial de las unidades impositivas, tiene sobre la privación/satisfacción tanto a nivel individual, como sobre el conjunto de la sociedad, es esencial la carga fiscal que soporta la renta máxima. La aplicación del impuesto reduce la privación de cada nivel de renta si la renta máxima soporta la mayor carga, mientras que la satisfacción de cada individuo disminuye siempre que el impuesto sea positivo. En relación a la satisfacción neta, el efecto del impuesto no es uniforme a lo largo de la escala de rentas, depende del percentil en que esté situado cada individuo, y el nivel de renta que separa a quienes, como consecuencia de su aplicación, ganan o pierden en términos de satisfacción neta viene determinado por la relación existente entre el impuesto medio y el que grava la renta máxima.

La magnitud de la diferencia entre los dos valores anteriores, junto a la variación de la desigualdad absoluta que supone el paso de la distribución de renta bruta a la de renta disponible, es la que determina, para el conjunto de la sociedad, la reducción de la privación global que se deriva de la aplicación del impuesto, en tanto que la reducción de la satisfacción global depende del impuesto medio y de la variación de la desigualdad absoluta, aunque esa reducción es menor en la medida en que aumente la progresividad del impuesto. En general, un impuesto progresivo reduce la privación (satisfacción) global en mayor (menor) cuantía que el proporcional equivalente y esa variación depende del valor del índice de Reynolds-Smolensky (o de Kakwani) asociado al impuesto.

La satisfacción neta de la sociedad aumenta al aplicar un impuesto en el que la renta máxima soporte una carga superior al doble del impuesto medio y si, además, grava la renta máxima a un tipo mayor que el tipo medio global, da lugar a una distribución de renta disponible cuya satisfacción neta global es mayor a la asociada a la distribución de renta que resultaría de aplicar un impuesto proporcional de recaudación equivalente. Una condición suficiente para que se verifique esta última condición es que el impuesto sea progresivo.

Comparando estos resultados con la incidencia que tiene un impuesto sobre la privación/satisfacción, cuando éstas se definen en el sentido de Hey y Lambert , destaca, como era de esperar, la relevancia que en nuestra formulación tiene la carga o el tipo medio que se aplica a la renta máxima. Otra diferencia evidente es que en aquella formulación la existencia de un impuesto sobre la renta no tiene ningún efecto sobre la satisfacción neta de la sociedad, dado que ésta es nula para cualquier distribución de rentas.

Adoptar un enfoque más realista a la hora de comparar la situación entre dos individuos, considerando simultáneamente la diferencia de rentas y la preocupación por el *status*, supone, sin duda, una mayor complicación en el tratamiento analítico de las cuestiones por las que nos hemos interesado en este trabajo. No obstante, no renunciamos a ocuparnos de ellas en el futuro.

APÉNDICE

Proposición A1. Si P(x,z) y S(x,z) se definen como en [2] y [6], respectivamente, se satisfacen las siguientes igualdades:

(i) $P(x) = x^{*}\left(1 - F(x)\right) - \mu\left(1 - L\left(F(x)\right)\right)$, $P(0)=x^{*}-\mu$ y $P(x^{*})=0$.

(ii) $E[P(X)] = \frac{1}{2}\left[x^{*} - \mu(1 - G)\right]$

(iii) $S(x) = \int_{0}^{x} (F(x) - F(z))dz = \mu L(F(x))$, $S(0)=0$ y $S(x^{*})=F$.

(iv) $E[S(X)] = \frac{\mu}{2}(1 - G)$.

Demostración.

(i) $P(x) = \int_x^{x^*} (F(z) - F(x))dz = \int_x^{x^*} F(z)dz - \int_x^{x^*} F(x)dz = \int_x^{x^*} F(z)dz - (x^* - x)F(x),$

e integrando por partes se obtiene:

$$\int_x^{x^*} F(z)dz = x^* - xF(x) - \int_x^{x^*} zdF(z) = x^* - xF(x) - \mu(1 - L(F(x))),$$

igualdad que junto con la anterior implica:

$$P(x) = x^*\left(1 - F(x)\right) - \mu\left(1 - L\left(F(x)\right)\right).$$

Es inmediato comprobar, a partir de esta expresión que P(0)=x*-μ y P(x*)=0.

(ii) $E[P(X)] = \int_0^{x^*} (x^*(1 - F(x)))dF(x) - \mu \int_0^{x^*} (1 - L(F(x)))dF(x),$

y haciendo el cambio p=F(x) resulta:

$$E[P(X)] = x^* \int_0^1 (1 - p)dp - \mu \int_0^1 (1 - L(p))dp = \frac{x^*}{2} - \mu\left(1 - \frac{1 - G}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^* - \mu(1 + G)\right)$$

teniendo en cuenta la definición del índice de Gini.

Las demostraciones de (iii) y (iv) se obtienen del mismo modo.

Proposición A2. Si t(x) es un impuesto estrictamente progresivo y a es su tipo medio global, la función

$$\lambda(x) = t(x^*) - \alpha x^* - (t(x) - \alpha x),\ 0<x<x^*,$$

siendo x* la renta máxima, es positiva.

Demostración. Es evidente que t(x*)-αx*>0, ya que el tipo medio al que se grava la renta máxima es mayor que α. Por otra parte, si x_0 es el nivel de renta cuyo tipo medio coincide con el global:

$(t(x_0)/x_0)=\alpha$, por la progresividad se verifica que para rentas, x, que cumplan $0<x<x_0$, es $t(x)/x<t(x_0)/x_0=\alpha$, por lo que t(x)-αx<0 y, con ello, λ(x)>0. Para rentas $x>x_0$, la función:

$$\pi(x) = t(x)-\alpha x$$

es positiva y estrictamente creciente, ya que utilizando de nuevo el carácter progresivo del impuesto, los tipos marginales son mayores que los tipos medios para todos los niveles de renta, por lo que:

$$\pi'(x) = t'(x) - \alpha \geq t(x)/x - \alpha > 0,$$

y, en consecuencia, λ(x) = π(x*)-π(x) es positiva.

BIBLIOGRAFÍA

BERREBI, Z. M. y SILBER, J. (1985): "Income inequality indices and deprivation: a generalization", Quarterly Journal of Economics, 100, pp. 807-810.

CHAKRAVARTY, S. R. (1990): Ethical Social Index Numbers, Springer-Verlag, New York.

CHAKRAVARTY, S. R y CHAKRABORTY, A. B. (1984): "On indices of relative deprivation", Economics Letters, 14, pp. 283-287.

CHAKRAVARTY, S. R y MUKHERJEE, D. (1999): "Measures of deprivation and their meaning in terms of social satisfaction", Theory and Decision, 47, pp. 89-100.

CHAKRAVARTY, S. R., CHATTOPADHYAY, N. y MAJUNDER, A. (1995): "Income inequality and relative deprivation", Keio Economic Studies, 32, pp. 1-15.

CROSBY, F. (1979): "Relative deprivation revisited: A response to Miller, Bolce and Halligan", American Political Science Review, 73, pp. 103-112.

DAVIS, J. (1959): "A formal interpretation of the theory of the relative deprivation", Sociometry, 20,pp. 280-296.

DASGUPTA, P., SEN, A. y STARRET, D. (1973): "Notes on the measurement of inequality", Journal of Economic Theory, 6, pp. 180-187.

DUTTA, B. y ESTEBAN, J. (1992): "Social welfare and equality", Social Choice and Welfare, 9.

EBERT, U. y MOYES, P. (2000): "An axiomatic characterization of Yitzhaki's index of individual deprivation", Economics Letters, 68, pp. 263-270.

FELLMAN, J. (1976): "The effect of transformations on Lorenz curves", Econometrica, 44, pp. 823-824

FOSTER, J. E. (1985): "Inequality measurement", en H. Peyton Young, ed., Fair Allocations, American Mathematical Society, Proceedings of R. Butts y J. Hintikka, eds., Logic, Methodology and Philosophy of Science, Reidel.

GURR, T. R. (1968): "A causal model of civil strife: A comparative analysis using new indices", American Political Science Review, 62, pp. 1104-1124.

HEY, J. D. y LAMBERT, P. J. (1980): "Relative deprivation and the Gini coefficient: comment", Quarterly Journal of Economics, 94, pp. 567-576.

IMEDIO OLMEDO, L. J. (1995): "Algunas consideraciones sobre imposición y bienestar social", Hacienda Pública Española, 135, pp. 83-95.

IMEDIO, L. J., PARRADO, E. M. y SARRIÓN, M. D. (1998): "Evolución de la privación relativa y del bienestar en la distribución de la renta familiar en España en el período 1985-1995", Actas de la XII Reunión Asepelt España, Córdoba.

IMEDIO, L. J., PARRADO, E. M. y SARRIÓN, M. D. (1999): "Privación relativa e imposición sobre la renta", Hacienda Pública Española, 149-2, pp. 137-146.

JAKOBSSON, U (1976): "On the measurement of degree of progression", Journal of Public Economics, 5, pp. 161-168.

KAKWANI, N. C. (1977a): "Measurement of tax progressivity: an international comparison", Economic Journal, 87, pp. 71-80.

KAKWANI, N. C. (1977b): "Applications of Lorenz curves in economic analysis", Econometrica, 45, pp. 719-727.

KAKWANI, N. C. (1984): "Welfare ranking of income distributions", Advances in Econometrics, 3, pp. 191-213.

LAMBERT, P. J. (1985): "Social welfare and the Gini coefficient revisited", Mathematical Social Sciences, 9, pp. 19-26.

LAMBERT, P. J. (1996): La distribución y redistribución de la renta. Un análisis matemático, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid.

LAYARD, R. (1980): "Human satisfactions and public policy", Economic Journal, 90, pp.737-750.

MULIERE,P. y SCARSINI, M. (1989): "A note on stochastic dominance and inequality measures", Journal of Economic Theory, 49, pp. 314-323.

PAUL, S. (1991): "An index of relative deprivation", Economics Letters, 36, pp. 337-341.

PODDER, N. (1996): "Relative deprivation, envy and economic inequality", Kyklos, 49, pp. 353-376.

REYNOLDS, M., y SMOLENSKY, E. (1977): Public expenditures, taxes, and the distribution of income: The United States, 1950, 1961, 1970, Academic Press, New York.

RUNCIMAN, W. G. (1966): Relative Deprivation and Social Justice, Routledge and Kegan Paul, Londres.

SEN, A. (1976): "Poverty: an ordinal approach to measurement", Econometrica, 44, pp. 219-231.

SHORROCKS, A. F. (1983): "Ranking income distribution", Econometrica, 50, pp. 1-17.

STOUFFER, S. A., SUCHMAN, E. A., DEVINNEY, L. C., STAR, S. A. y WILLIAMS, R. M. (1949): The american Soldier : adjustment during army life, Vol. 1, Princeton University Press.

YITZHAKI, S. (1979): "Relative deprivation and the Gini coefficient", Quarterly Journal of Economics, 93, pp. 321-324.

YITZHAKI S. (1982): "Relative deprivation and economic welfare", European Economic Review, 17, pp. 99-113.