ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 21 - I, 2003. PÁGS. 109-122

Equilibrio dinámico a largo plazo en un modelo de espacio de estados, bajo controlabilidad simétrica

*FERNÁNDEZ, M.V., *CABELLO, J.G. y **SÁNCHEZ C.
**Departamento de Matemática Aplicada. **Departamento de Métodos Cuantitativos. Facultad CC.EE. y Empresariales. Universidad de Granada.*
Campus de Cartuja. 18071 Granada. España. Tlf: 958 24 90 31. Fax: 958 24 83 36. E-mail: mvfm@ugr.es

RESUMEN

En numerosas ocasiones el comportamiento dinámico de una determinada variable económica se ve influenciado por la conducta optimizadora de los agentes que intervienen en la economía. Esta variable económica que denominaremos variable de estado se percibe de manera distinta por cada uno de los agentes, y en el proceso optimizador inherente a la toma de decisones da lugar a respuestas diferenciadas para cada uno de ellos. Estas respuestas constituyen los términos de control sobre la variable de estado, y conforman el comportamiento futuro de la misma.

La respuesta de los agentes depende no sólo de la percepción que los mismos tienen sobre la variables de estado, sino también de las expectativas que formulan sobre el comportamiento de los otros agentes que interaccionan en el sistema. En definitiva, en la evolución temporal de la variable de estado interviene no sólo el comportamiento inercial del sistema a largo plazo, sino también las actuaciones en que se plasman las decisiones optimizadoras de los agentes, siendo estas últimas dependientes de su percepción del sistema y de las expectativas que formulan acerca del comportamiento optimizador de otros agentes.

En el modelo que se presenta a continuación, supondremos por simplicidad una única variable de estado y dos agentes, cuyo comportamiento es simétrico, por lo que bastará analizar el de uno de ellos para generalizar los resultados para el otro.

Uno de los ejemplos más comunes que es posible analizar bajo esta óptica es el relativo a la conducta de dos oligopolistas. La variable de estado sería la cantidad conjunta lanzada por ambos al mercado, en tanto que las variables de control serían las cantidades producidas por cada uno de ellos.

Palabras clave: Control óptimo, multiplicadores dinámicos de Lagrange, programación dinámica.

Clasificación del artículo según el sistema del JEL: C61.

Artículo recibido el 6 de junio de 2002. Aceptado el 15 de noviembre de 2002.

1. INTRODUCCIÓN

Supongamos una cierta ecuación de estado, en la que representa el estado en el momento t+1 y dos agentes, 1 y 2 que observan esta variable de estado, de manera distorsionada, a través de $z_{1,t}$ y de $z_{2,t}$ respectivamente.

$$\begin{cases} z_{1,t} = h_1 x_t + v_{1,t}, \ v_{1,t} \sim N(0,\sigma^2_{v_1}) \\ z_{2,t} = h_2 x_t + v_{2,t}, \ v_{2,t} \sim N(0,\sigma^2_{v_2}). \end{cases}$$

donde $v_{1,t}$ y $v_{2,t}$ son perturbaciones aleatorias. Los agentes escogen una estrategia a seguir para con esa realidad: $u_{i,t}$ (variable de control) que representa la estrategia del agente i en el momento t.

Supongamos que la ecuación de estado es

$$\boxed{x_{t+1} = \phi x_t + \gamma_1 u_{1,t} + \gamma_2 u_{2,t} + w_t,}$$

donde ϕ,γ_1,γ_2 son constantes y w_t es la componente estocástica (o *ruido*), de forma que $w_t \sim N(0,\sigma^2_w)$.

Supongamos, además, que cada uno de los agentes tiene una función objetivo que desea optimizar,

$$\sum_{t=0}^{T} F_{i,t} \frac{1}{(1+\beta)^t},$$

siendo β un factor de descuento y $F_{i,t}$ una función que en cada momento t depende de la percepción de la realidad $z_{i,t}$, que posee el agente i, de su estrategia, $u_{i,t}$, y de la estrategia que espera que escoja el otro agente j y que representaremos por $E_i(u_{j,t}),\ i, j = 1,2,\ i \neq j$, es decir,

$$F_{1,t} = F_{1,t}(z_{1,t}, u_{1,t}, E_1(u_{2,t}))$$
$$F_{2,t} = F_{2,t}(z_{2,t}, u_{2,t}, E_2(u_{1,t}))$$

El problema consiste entonces en *delimitar condiciones sobre las funciones $F_{i,t}$, condiciones que permitan llevar a cabo un problema de maximización de la función objetivo para que la estrategia escogida por cada uno de los agentes sea, en efecto, la estrategia óptima*. De esta forma se obtienen como soluciones del problema de maximización una sucesión de variables de control

$$\{u_{i,t}\},\ siendo\ i = 1,2$$

Nos preguntamos si podemos expresar la función objetivo dependiente sólo de las variables de estado (entendiendo como z_i la variable de estado distorsionada) y de control respectivamente.

Suponiendo que exista al menos una situación $Q=\left(z_{i,t},u_{i,t},E_i\left(u_{j,t}\right)\right)$, en la cual:

1. $F_{i,t}(z_{i,t},u_{i,t},E_i(u_{j,t}))=0$
2. $\dfrac{\partial F_{i,t}}{\partial z_{i,t}}(Q),\ \dfrac{\partial F_{i,t}}{\partial u_{i,t}}(Q)$ *existen y son continuas,*
3. $\dfrac{\partial F_{i,t}}{\partial E_i(u_{j,t})}(Q)\neq 0,$

entonces, gracias al Teorema de la Función Implícita, podemos afirmar que existe una única función continua y diferenciable $f_{i,t}$ en un entorno de Q, tal que

$$E_i(u_{j,t})=f_{i,t}(z_{i,t},u_{i,t}).$$

Este hecho tiene el significado de que el sujeto i para cada momento t no espera la misma estrategia del sujeto j.

Nos interesa expresar una variable como función de las otras dos, con la finalidad de simplificar el problema de partida.

Así pues, asumiremos, que

$$E_1(u_{2,t})=f_{1,t}(z_{1,t},u_{1,t}) \qquad \textbf{(1)}$$

$$E_2(u_{1,t})=f_{2,t}(z_{2,t},u_{2,t}) \qquad \textbf{(2)}$$

Obsérvese que el problema común a los dos agentes de maximizar su función objetivo, puede reducirse a un único problema, dado que existe una simetría total en el estudio de uno y otro caso. Así pues, en lo sucesivo, nos referiremos únicamente al problema analizado desde el punto de vista del primer agente.

El problema inicial de optimización por parte del primer agente es el siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{\{u_{1,0}\cdots u_{1,T-1}\}}{Maximizar} & \displaystyle\sum_{t=0}^{T} F_{1,t}(z_{1,t},u_{1,t},E_1(u_{2,t}))\frac{1}{(1+\beta)^t},\ \ siendo\ \ \beta>0 \\ sujeto\ \ a & x_{t+1}=\phi x_t+\gamma_1 u_{1,t}+\gamma_2 u_{2,t}+w_{1,t},\ \ con\ \ w_{1,t}\sim N(0,\sigma_{w_1}^2). \end{array}}$$

Sabemos que la percepción de la realidad que tiene el agente 1 es

$$z_{1,t}=h_1 x_t+v_{1,t}.$$

Este hecho y la ecuación (1), permiten escribir

$$\begin{aligned} F_{1,t} &= F_{1,t}(h_1 x_t + v_{1,t}, u_{1,t}, f_{1,t}(z_{1,t}, u_{1,t})) \\ &= F_{1,t}(h_1 x_t + v_{1,t}, u_{1,t}, f_{1,t}(h_1 x_t + v_{1,t}, u_{1,t})) \\ &= G_{1,t}(x_t, u_{1,t}) \end{aligned}$$

es decir, hemos expresado $F_{1,t}$ como la función $G_{1,t}$, que depende sólo de la variable de estado x_t y de la variable de control $u_{1,t}$.

Por ello, el *nuevo* programa de optimización es

$$\boxed{(P)\begin{cases} \underset{\{u_{1,0}\cdots u_{1,T-1}\}}{Maximizar} \quad \sum_{t=0}^{T} G_{1,t}(x_t, u_{1,t}) \dfrac{1}{(1+\beta)^t}, \quad siendo \;\; \beta > 0 \\ sujeto \;\; a \quad x_{t+1} = \phi x_t + \gamma_1 u_{1,t} + \gamma_2 u_{2,t} + w_{1,t}, \; con \;\; w_{1,t} \sim N(0, \sigma^2_{w_1}). \end{cases}}$$

Así pues, el principal resultado de este epígrafe es el siguiente:

TEOREMA 1.0.1. Si $G_{1,t}$ es una función cóncava, y la función $f_{1,t}$ tal que,

$$E_1(u_{2,t}) = f_{1,t}(z_{1,t}, u_{1,t})$$

es una función derivable con continuidad, entonces el problema (P) tiene solución.

De forma analítica, la condición de concavidad supuesta para la función $G_{1,t}$ se traduce en la verificación de las siguientes condiciones para todo instante t:

1. $Ambas \;\; G_{i,t} \in \quad , \; para \; i = 1, 2.$
2. $\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2} < 0.$
3. $\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2} \dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial u_{i,t})^2} > \left(\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{\partial x_t \partial u_{i,t}} \right)^2$ *de donde se obtiene que,* $\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial u_{i,t})^2} < \dfrac{\left(\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{\partial x_t \partial u_{i,t}} \right)^2}{\dfrac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2}} < 0.$

Para determinar las condiciones que la función objetivo debe verificar a fin de que exista solución en el anterior problema de maximización, procedemos a su resolución. Este es un programa de optimización de una función de dos variables sujeta a restricciones de igualdad, por lo que se resuelve por el método de los multiplicadores (dinámicos) de Lagrange. Para ello, en primer lugar, se construye la función Lagrangiana que resulta ser

$$L(x_t, u_{1,t}, \lambda(t)) = \sum_{t=0}^{T} \left[G_{1,t}(x_t, u_{1,t}) \frac{1}{(1+\beta)^t} \right] + \frac{\lambda(\mathrm{t})}{(1+\beta)^{t+1}} (x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}),$$

$$t = 0, \ldots T.$$

A continuación, se calculan los puntos que anulan simultáneamente todas las derivadas parciales de la función Lagrangiana, considerada ésta como función de las variables x_t, $u_{i,t}$ y $\lambda(t)$. Es decir, los *puntos críticos condicionados* son todos aquellos $p^* = (x_t^*, u_{1,t}^*)$ tales que $(x_t^*, u_{1,t}^*, \lambda(t))$ son solución del sistema de ecuaciones, para cada momento $t = 0,1,..., T$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_t} = \dfrac{1}{(1+\beta)^t} \dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t} - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}} \lambda(t)\phi = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_{1,t}} = \dfrac{1}{(1+\beta)^t} \dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}} - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}} \lambda(t)\gamma_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda(t)} = \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}} (x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}) = 0 \end{cases}$$

A fin de simplificar la notación, en lo sucesivo nos referiremos a la restricción del problema, como una función, g. Es decir, supondremos que

$$g(x_t, u_{1,t}) = x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}.$$

Nótese que de las dos primeras ecuaciones puede extraerse un valor común para $\lambda(t)$. Suponiendo que las constantes ϕ, γ_1, $\gamma_2 \neq 0$ se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t} = \dfrac{1}{1+\beta} \lambda(t)\phi \\ \dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}} = \dfrac{1}{1+\beta} \lambda(t)\gamma_1 \\ g(x_t, u_{1,t}) = 0 \end{cases}$$

lo que permite asimismo relacionar $\frac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}$ *con* $\frac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}$. De hecho, es claro que

$$\frac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}} = \frac{\gamma_1}{\phi}\frac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t},\ es\ decir,\ \gamma_1 = \phi\frac{\frac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}}{\frac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}} \quad \textbf{(3)}$$

análogamente, con respecto al segundo agente, se obtendría la relación

$$\gamma_2 = \phi\frac{\frac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}}{\frac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}} \quad \textbf{(4)}$$

Según una de las condiciones de segundo orden para extremos condicionados, se analiza el signo de la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana restringida a cierto subespacio que se especificará posteriormente. En este sentido, se calculan las derivadas parciales de segundo orden de la función Lagrangiana, para construir la matriz hessiana. Así pues, para cada punto crítico condicionado p^*, ésta es la matriz

$$H_{p^*} = \frac{1}{(1+\beta)^t}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{(\partial x_t)^2} & \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{\partial x_t \partial u_{1,t}} \\ \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{\partial u_{1,t}\partial x_t} & \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{(\partial u_{1,t})^2} \end{pmatrix},$$

y teniendo en cuenta el Teorema de Schwarz que garantiza, bajo ciertas condiciones, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, con lo cual la matriz H_{p^*} es simétrica y por ello representa una forma cuadrática, cuya expresión matricial

$$Q(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}\frac{1}{(1+\beta)^t}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{(\partial x_t)^2} & \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{\partial x_t \partial u_{1,t}} \\ \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{\partial u_{1,t}\partial x_t} & \frac{\partial^2 G_{1,t}(p^*)}{(\partial u_{1,t})^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

y que restringida a aquellos puntos *(x,u)* que verifican la siguiente condición, donde *x* representa la variable de estado y *u* la variable de control:

$$x\frac{\partial g}{\partial x_t}(p^*)+u\frac{\partial g}{\partial u_{1,t}}(p^*)=0$$

siendo *p** un punto crítico condicionado. Un sencillo cálculo indica que cada una de estas derivadas parciales son, para cualquier punto, en particular para *p**,

$$\frac{\partial g}{\partial x_t}(p^*)=-\phi$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_{1,t}}(p^*)=-\gamma_1$$

por lo que el programa de optimización inicial se reduce a determinar el signo de la forma cuadrática representada por la matriz H_{p^*} y restringida al subespacio de ecuación

$$u=-\frac{\phi}{\gamma_1}x \tag{5}$$

es decir, estudiamos la forma cuadrática restringida a aquellas situaciones en que, la variable de control $u_{1,t}$ es proporcional a la variable de estado x_t, de acuerdo con la solución obtenida en (5)

$$u_{1,t}=-\frac{\phi}{\gamma_1}x_t \tag{6}$$

Por tanto, la forma cuadrática restringida, objeto de nuestro estudio es:

$$Q(x,-\frac{\phi}{\gamma_1}x)=Q_t(x)=\frac{1}{(1+\beta)^t}\left(\frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial x_t)^2}x^2-2\frac{\partial^2 G_{1,t}}{\partial x_t\partial u_{1,t}}\frac{\phi}{\gamma_1}x^2+\frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial u_{1,t})^2}\left(-\frac{\phi}{\gamma_1}x\right)^2\right)$$

que puede expresarse como producto matricial de la siguiente forma:

$$Q_t(x)=\frac{1}{(1+\beta)^t}x^2\begin{pmatrix}1 & -\frac{\phi}{\gamma_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial x_t)^2} & \frac{\partial^2 G_{1,t}}{\partial x_t\partial u_{1,t}}\\ \frac{\partial^2 G_{1,t}}{\partial x_t\partial u_{1,t}} & \frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial u_{1,t})^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{\phi}{\gamma_1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(1+\beta)^t}x^2Q^*_{1,t}\begin{pmatrix}1,-\frac{\phi}{\gamma_1}\end{pmatrix}.$$

Para que se verifique $Q_t(x) < 0$, es necesario y suficiente que $Q^*_{1,t}\left(1, -\frac{\phi}{\gamma_1}\right)$ sea menor cero, es decir:

$$Q^*_{1,t}\left(1, -\frac{\phi}{\gamma_1}\right) = \left(1 \;\; -\frac{\phi}{\gamma_1}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial x_t)^2} & \frac{\partial^2 G_{1,t}}{\partial x_t \partial u_{1,t}} \\ \frac{\partial^2 G_{1,t}}{\partial x_t \partial u_{1,t}} & \frac{\partial^2 G_{1,t}}{(\partial u_{1,t})^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\phi}{\gamma_1} \end{pmatrix} < 0.$$

Observamos que este producto matricial es una forma cuadrática, evaluada en el punto $\left(1, -\frac{\phi}{\gamma_1}\right)$ y por ello, basta que sea Definida Negativa para que el problema de partida se pueda resolver por lo que se obtienen las condiciones anteriores:

1. $\frac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2} < 0.$

2. $\frac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2}\frac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial u_{i,t})^2} > \left(\frac{\partial^2 G_{i,t}}{\partial x_t \partial u_{i,t}}\right)^2$ *de donde se deduce,* $\frac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial u_{i,t})^2} < \frac{\left(\frac{\partial^2 G_{i,t}}{\partial x_t \partial u_{i,t}}\right)^2}{\frac{\partial^2 G_{i,t}}{(\partial x_t)^2}} < 0.$

Así pues, el óptimo de nuestro problema en cada momento *t* para cada agente *i* es:

$$(x_t^*, u_{i,t}^*) = \left(x_t^*, -\frac{\phi}{\gamma_1} x_t^*\right) \; siendo \; i = 1, 2.$$

2. CONCLUSIONES

1. La ecuación de estado: $\boxed{x_{t+1} = \phi x_t + \gamma_1 u_{1,t} + \gamma_2 u_{2,t} + w_t,}$

   es una ecuación en diferencias, cuya resolución se obtiene de forma recursiva, y se puede expresar:

$$\boxed{x_{t+1} = \phi^{t+1} x_0 + \sum_{i=0}^{t} \phi^{t-i}[\gamma_1 u_{1,i} + \gamma_2 u_{2,i} + w_i],} \qquad \textbf{(7)}$$

2. En cada momento *t* se verifica,

$$\boxed{\gamma_1 = \phi \frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}} \;\; y, \; \gamma_2 = \phi \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}} \qquad \textbf{(8)}$$

Dado que $u_{i,t} = -\dfrac{\phi}{\gamma_1} x_t$, obtendríamos las variables óptimas de control, para ambos agentes:

$$\boxed{u^*_{1,t} = -\frac{\phi}{\gamma_1} x_t = -\frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} x_t, \;\; u^*_{2,t} = -\frac{\phi}{\gamma_2} x_t = -\frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} x_t} \qquad \textbf{(9)}$$

y por tanto, $u^*_{1,t} = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} u^*_{2,t}$ teniendo en cuenta (8), obtenemos

$$u^*_{1,t} = \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} u^*_{2,t}. \qquad \textbf{(10)}$$

La expresión (9), representa **las funciones de reacción** y que en el óptimo están ligadas mediante la relacion (10).

3. Finalmente la trayectoria óptima resulta ser:

$$x^*_{t+1} = \phi x^*_t - \phi \frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} x^*_t - \phi \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} x^*_t + w_t$$

$$= \phi x^*_t \left[1 - \left(\frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} + \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} \right) \right] + w_t .$$

Desde el punto de vista económico suponemos que los valores de las variables de estado no se alteran notablemente, por ello, $\phi > 0$.

En la última expresión, observamos que la trayectoria óptima, depende de la acción de cada agente.

Teniendo en cuenta (7) y (9), podemos dar otra expresión de la trayectoria óptima, que es:

$$\boxed{x_{t+1} = \phi^{t+1} x_0^* + \sum_{i=0}^{t} \phi^{t-i} [-2\phi x_i^* + w_i],} \qquad \textbf{(11)}$$

Queremos analizar el comportamiento de dicha trayectoria, que en este caso, es solución de una ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes constantes. Partimos del hecho de que una solución de una ecuación de diferencias es una sucesión y nos ceñiremos sólo al estudio de la convergencia de dicha solución en los siguientes casos:

$$0 < \phi \left| 1 - \left(\frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} + \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} \right) \right| < 1$$

es decir,

$$1 < \frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} + \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} < 1 + \frac{1}{\phi}$$

o bien,

$$1 - \frac{1}{\phi} < \frac{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{1,t}}{\partial u_{1,t}}} + \frac{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial x_t}}{\dfrac{\partial G_{2,t}}{\partial u_{2,t}}} < 1 .$$

3. CASOS PARTICULARES

3.1 Función objetivo exponencial

Consideremos una función $G_{1,t}(x_t, u_{1,t}) = -e^{x_t^2 + u_{1,t}^2}$, por lo que nuestro problema es, siendo β el factor de descuento:

$$
\boxed{(P)\begin{cases} \underset{\{u_{1,0}\cdots u_{1,T-1}\}}{Maximizar} & \sum_{t=0}^{T}\left(-e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\right)\dfrac{1}{(1+\beta)^t} \\ sujeto\ \ a & x_{t+1} = \phi x_t + \gamma_1 u_{1,t} + \gamma_2 u_{2,t} + w_{1,t},\ \ con\ \ w_{1,t} \sim N(0,\sigma_{w_1}^2). \end{cases}}
$$

En este caso la función Lagrangiana es:

$$
L(x_t, u_{1,t}, \lambda(t)) = \sum_{t=0}^{T}\left[\left(-e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\right)\frac{1}{(1+\beta)^t}\right] + \frac{\lambda(\mathrm{t})}{(1+\beta)^{t+1}}(x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}),\ t = 0,\ldots T.
$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de primer orden

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_t} = \dfrac{-2x_t}{(1+\beta)^t}\left(e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\right) - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}\lambda(t)\phi = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial u_{1,t}} = \dfrac{-2u_{1,t}}{(1+\beta)^t}\left(e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\right) - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}\lambda(t)\gamma_1 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda(t)} = \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}} g(x_t, u_{1,t}) = \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}(x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}) = 0
\end{cases}
$$

De las dos primeras ecuaciones, se obtiene la siguiente igualdad

$$
\lambda(t) = -\frac{1+\beta}{\phi} 2x_t e^{x_t^2+u_{1,t}^2} = -\frac{1+\beta}{\gamma_1} 2u_{1,t} e^{x_t^2+u_{1,t}^2}
$$

De lo cual se deduce que $u_{1,t} = \dfrac{\gamma_1}{\phi} x_t$, es decir, la variable de control es proporcional a la variable de estado, para cada momento *t*.

La matriz Hessiana es

$$
H = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^t \begin{pmatrix} -2e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\left(1+2x_t^2\right) & -4x_t u_{1,t} e^{x_t^2+u_{1,t}^2} \\ -4x_t u_{1,t} e^{x_t^2+u_{1,t}^2} & -2e^{x_t^2+u_{1,t}^2}\left(1+2u_{1,t}^2\right) \end{pmatrix},
$$

que particularizada en los puntos $u_{1,t} = \frac{\gamma_1}{\phi} x_t$, es la matriz

$$H_{p^*} = \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^t \begin{pmatrix} -2e^{x_t^2\left(1+\left(\frac{\gamma_1}{\phi}\right)^2\right)}\left(1+2x_t^2\right) & -4\frac{\gamma_1}{\phi} x_t^2 e^{x_t^2\left(1+\left(\frac{\gamma_1}{\phi}\right)^2\right)} \\ -4\frac{\gamma_1}{\phi} x_t^2 e^{x_t^2\left(1+\left(\frac{\gamma_1}{\phi}\right)^2\right)} & -2e^{x_t^2\left(1+\left(\frac{\gamma_1}{\phi}\right)^2\right)}\left(1+2\left(\frac{\gamma_1}{\phi}\right)^2\right) \end{pmatrix},$$

asociada a una forma cuadrática definida negativa, que restringiremos a los puntos *(x,u)* que verifican la ecuación

$$x\frac{\partial g\left(p^*\right)}{\partial x_t} + u\frac{\partial g\left(p^*\right)}{\partial u_{1,t}} = 0,\ es\ decir,\ -\phi x - \gamma_1 u = 0$$

3.2. Función objetivo cuadrática

Consideramos en este ejemplo, como función cóncava $G_{1,t}(x_t, u_{1,t})$, una forma cuadrática definida negativa, cuya expresión matricial es,

$$G_{1,t}(x_t, u_{1,t}) = \left(x_t\ u_{1,t}\right)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ u_{1,t} \end{pmatrix}$$

siendo, $a_{1,1} < 0, a_{2,2} < 0$ y $a_{1,1}a_{2,2} > a_{1,2}^2$. En este caso el problema de optimización es:

$$\boxed{\begin{cases} \underset{\{u_{1,0}\cdots u_{1,T-1}\}}{\text{Maximizar}} \ \sum_{t=0}^{T}\left(x_t\ u_{1,t}\right)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ u_{1,t} \end{pmatrix}\frac{1}{(1+\beta)^t} \ \text{siendo } \beta>0 \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = \phi x_t + \gamma_1 u_{1,t} + \gamma_2 u_{2,t} + w_{1,t},\ \text{con}\ \ w_{1,t} \sim N(0, \sigma_{w_1}^2). \end{cases}}$$

La función Lagrangiana, es:

$$L(x_t, u_{1,t}, \lambda(t)) = \sum_{t=0}^{T}\left[G_{1,t}(x_t, u_{1,t})\frac{1}{(1+\beta)^t}\right] + \frac{\lambda(\mathrm{t})}{(1+\beta)^{t+1}}(x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}),\ t = 0,...T.$$

Calculamos los puntos críticos condicionados, es decir, aquéllos que anulan simultáneamente todas las derivadas parciales de la función Lagrangiana, considerada ésta como función de las variables x_t, $u_{1,t}$ y $\lambda(t)$. Son los puntos $p^*_{1,t} = (x^*_t, u^*_{1,t})$tales que $(p^*_{1,t}, \lambda(t))$ es solución del sistema de ecuaciones, para cada momento t = 0,1,...,T.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_t} = \dfrac{1}{(1+\beta)^t}\left(2a_{1,1}x_t + 2a_{1,2}u_{1,t}\right) - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}\lambda(t)\phi = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_{1,t}} = \dfrac{1}{(1+\beta)^t}\left(2a_{1,2}x_t + 2a_{2,2}u_{1,t}\right) - \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}\lambda(t)\gamma_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda(t)} = \dfrac{1}{(1+\beta)^{t+1}}(x_{t+1} - \phi x_t - \gamma_1 u_{1,t} - \gamma_2 u_{2,t} - w_{1,t}) = 0 \end{cases}$$

Despejando $\lambda(t)$ de las dos primeras ecuaciones, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\lambda(t) = \frac{1+\beta}{\phi}\left(2a_{1,1}x_t + 2a_{1,2}u_{1,t}\right) = \frac{1+\beta}{\gamma_1}\left(2a_{1,2}x_t + 2a_{2,2}u_{1,t}\right)$$

simplificando, se llega a la siguiente expresión,

$$u_{1,t} = \frac{a_{1,1}\gamma_1 - a_{1,2}\phi}{a_{2,2}\phi - a_{1,2}\gamma_1} x_t \, ,$$

en la cual, la variable de control, se observa que es proporcional a la variable de estado

$$u_{1,t} = \frac{H_1}{H_2} x_t$$

donde H_1 y H_2 se pueden expresar como el producto matricial de una matriz fila y una matriz columna; ambas matrices fila nos recuerdan, salvo signos, a las filas de la matriz asociada a la forma cuadrática $G_{1,t}$,

$$H_1 = \left(a_{1,1} \; -a_{1,2}\right)\begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \phi\end{pmatrix} \text{ y } H_2 = \left(-a_{1,2} \; a_{2,2}\right)\begin{pmatrix}\gamma_1 \\ \phi\end{pmatrix}.$$

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, B.D.O., and MOORE, J.B. (1979 Optimal Filtering, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

AZARIADIS, C. (1993), Intertemporal Macroeconomics, Blackwell Publishers, UK and USA.

BELLMAN, R. (1957), Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N.J.

KALMAN, R.E. (1960), A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME Ser. D.J. Basic Engrg. 82, 35-45.

SARGENT,T. (1987), Dynamic Macroeconomic Theory, Harvard University Press, USA.

SARGENT,T. (1987), Macroeconomic Theory, Academic Press, London.