Estudios de Economía Aplicada
Nº 13, 1999. Págs. 143-165

Competencia espacial con externalidades considerando decisiones individuales de los usuarios

SUÁREZ VEGA, R.
DORTA GONZÁLEZ, P.
SANTOS PEÑATE, D.R.
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

RESUMEN

En gran parte de los modelos de competencia espacial se asume que la elección de los usuarios está basada en el coste final del servicio (precio más coste de transporte) y que son exclusivamente las empresas las que presentan un comportamiento estratégico. Sin embargo, es bastante habitual que los usuarios también actúen estratégicamente con el fin de contrarrestar el efecto de las decisiones tomadas por el resto de los consumidores. Así, en mercados afectados por externalidades esto se traduce en un coste debido, por ejemplo, a la congestión que soporta el servicio. En este trabajo se consideran costes de externalidad y se analiza la situación donde los usuarios toman sus decisiones individualmente buscando minimizar sus costes, obteniéndose para esta situación un equilibrio de Nash. El comportamiento de las empresas se modela como un juego en dos etapas; en la primera eligen las localizaciones y, a partir de éstas, fijan simultáneamente los precios del producto en la segunda etapa.

Palabras clave: Localización, competencia, externalidad, duopolio, juegos.

ABSTRACT

Most of spatial competition models assume firm decisions exclusively. In these models, customers choose the facility minimizing price plus transport cost. However, in markets with externalities, customers decisions are taken in relation to the rest of customers. In this paper, externality costs are considered and customers decisions are taken individually. Firms strategy is modeled as a two stage game, first select locations and then prices.

Key words: Competition, location, externality, duopoly, games.

Código UNESCO: 1207, 5304.

Artículo recibido el 10 de febrero de 1999. Revisado el 30 de mayo de 1999.

1. Introducción

La competencia espacial entre empresas, conocida también como localización competitiva, es uno de los temas de investigación principales tanto en el área de la Organización Industrial como en la Ciencia Regional. En general, estos modelos se centran en las decisiones de localización, de fijación de precios y de niveles de producción que tiene que realizar una o varias empresas que quieren entrar o están operando en un mercado espacial. El objetivo principal de estas empresas es la maximización de sus beneficios, siendo más competitivas en precios y en localización que las otras empresas que operan en el mercado. Existe una extensa literatura sobre el tema con revisiones bibliográficas realizadas por Serra y ReVelle (1995), Eiselt, Laporte y Thisse (1993) y Friesz, Miller y Tobin (1988). Labbé, Peeters y Thisse (1995) hacen una recopilación de resultados en redes, mientras que Eiselt y Laporte (1996) ofrecen una extensa revisión del problema de Stackelberg.

El estudio de Hotelling (1929) constituye el primer análisis que incorpora la localización como una variable de elección determinante en un problema de competencia. En este trabajo, dos empresas compiten en un mercado lineal con demanda uniformemente distribuida a lo largo de una línea recta[1]. Este modelo ha tenido gran trascendencia en la literatura económica dando origen a un importante grupo de trabajos que analizan la localización más desde el punto de vista de las preferencias y la naturaleza de la competencia (ver Andaluz, (1995) para una recopilación de trabajos sobre este campo), destacando su aplicación al análisis de la diferenciación del producto, donde el espacio geográfico pasa a ser el espacio de características, la localización del consumidor se interpreta como su variedad ideal, la localización de la empresa representa la variedad ofrecida y el coste de transporte indica la pérdida de utilidad.

Por otra parte, otro importante grupo de trabajos consideran localizaciones física, considerando espacios más generales que el empleado por Hotelling. Hakimi (1983) analiza el problema de localización competitiva en redes y prueba que, bajo ciertos supuestos como costes de transporte cóncavos, existe un conjunto de localizaciones óptimas sobre los nodos de la red[2]. Un problema similar, añadiendo como variable de decisión el precio en destino del producto, es estudiado por Lederer y Thisse

---

1. Hotelling considera también competencia en precios y en su desarrollo utiliza un proceso en dos etapas

2. En el problema de Hakimi no se consideran precios y las firmas maximizan la cuota de mercado. Implícitamente se asume, por tanto, que ambas firmas fijan iguales precios

ÍNDICE

(1990). Estos autores consideran un juego en dos etapas donde en la primera se deciden las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, los precios. Se prueba la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto y que, en el caso de que los costes de transporte sean cóncavos, el conjunto de localizaciones factibles se reduce a los vértices de la red. Un resultado similar es obtenido por Labbé y Hakimi (1991) para el caso en el que las empresas deciden la cantidad a ofrecer en cada mercado separado espacialmente. Los modelos anteriores consideran exclusivamente la posibilidad de instalar una firma con un único servicio. Tobin y Friesz (1986) consideran una empresa maximizadora de beneficios que desea instalar varias plantas en un mercado separado espacialmente.

En algunas situaciones la utilidad de un usuario no viene dada únicamente por su elección, sino que depende también del comportamiento del resto de los consumidores. Esto sucede, por ejemplo, en aquellos problemas con limitación de capacidad y en mercados afectados por externalidades. En presencia de externalidad, si los usuarios toman sus decisiones individualmente sin tener en cuenta el efecto de las elecciones del resto, se produce un subóptimo social. Además de los costes de transporte, es preciso considerar un coste asociado al efecto de la externalidad en el mercado. Como consecuencia, no siempre es la asignación al centro de servicio más próximo la que proporciona el coste mínimo. Kohlberg (1983) considera una variante del modelo de Hotelling donde los consumidores tienen en cuenta junto con los costes de transporte el coste de espera para ser atendido en el servicio, el cual depende del número de clientes que eligen ese servicio. Brandeau y Chiu (1994a, 1994b) introducen también un coste de externalidad para servicios públicos y privados sobre un árbol, considerando que los consumidores minimizan la suma de los costes de transporte y de externalidad. En estos problemas se asume que el precio es el mismo entre empresas y viene dado de antemano. Dorta, Suárez y Santos (1999) incorporan el precio como variable de decisión sobre un problema de localización competitiva discreto con externalidades asumiendo variaciones conjeturales nulas. Un problema similar donde una de las empresas decide su precio teniendo en cuenta la reacción de la competidora, es decir, asumiendo variaciones conjeturales no nulas, es tratado por Suárez, Dorta y Santos (1998). En ambos trabajos se supone que las asignaciones son impuestas por un agente regulador para minimizar los costes totales y así obtener un óptimo de Pareto.

En este artículo se aborda el problema anterior pero asumiendo que los usuarios toman sus decisiones individualmente para obtener un equilibrio de Nash. Es evidente que la consideración de que los usuarios acuden al centro de servicio más próximo (o menos costoso) es una aproximación bastante burda del comportamiento de los consumidores. Por ejemplo, algunos usuarios prefieren acudir a una sucursal bancaria más alejada si en ella reciben un servicio más rápido (mayor número de emplea-dos) y/o un trato más personalizado[3]. Este trabajo considera que los usuarios tienen en cuenta, además de la distancia y el precio, la apreciación del servicio que van a recibir.

En general, el modelo presentado es aplicable a cualquier duopolio donde las empresas compiten en localización y precios, teniendo en cuenta que los usuarios no deciden exclusivamente basándose en la proximidad y el precio, sino que además tienen en cuenta el efecto de la externalidad. Así por ejemplo, una entidad bancaria que decide la ubicación de una sucursal y las comisiones que fija por sus servicios, ha de tener en cuenta el tiempo de espera para el servicio, que evidentemente depende, además de la propia estructura de la oficina, del volumen de usuarios que estima reunir el servicio. Es evidente que los usuarios consideran, además de los costes de traslado y las comisiones fijadas por la misma, la pérdida de tiempo de espera en la cola. Por lo tanto, la entidad ha de tener en cuenta todas estas circunstancias a la hora de diseñar su estrategia.

La principal novedad respecto a la literatura existente radica en el análisis de la externalidad asociada a decisiones individuales cuando las variables estratégicas de las firmas son las localizaciones y los precios. Bajo ciertas condiciones, se prueba la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto para el juego en el que las firmas deciden en primer lugar las localizaciones y posteriormente, conocidas éstas, los precios de sus productos.

El resto del trabajo está estructurado en cuatro secciones. En la sección 2 se establece la notación y se formula el modelo. En la sección 3 se estudia la existencia de equilibrios. En la sección 4 se muestra un ejemplo y finalmente, la sección 5 incluye algunas posibles extensiones del modelo y las conclusiones más destacadas del trabajo.

2. Modelo

Se considera un mercado donde se sirve un bien homogéneo y donde la demanda se encuentra concentrada en un conjunto finito *I* de puntos *i* $(i=1,\ldots,n)$. La demanda del mercado es totalmente inelástica respecto del precio, siendo λ_i la demanda en *i* y $\Lambda = \sum_i \lambda_i$ la demanda total. Dos empresas, A y B, pretenden establecerse en el mercado compitiendo en precios y localizaciones. Cada una de ellas elegirá su ubicación, x_A y x_B, de entre un conjunto finito de *m* posibles localizaciones $x_j \in J$ y fijará el precio del producto (precio f.o.b.) para la localización seleccionada teniendo en cuenta que los usuarios minimizan sus costes individualmente para llegar a un equilibrio de Nash.

Cada empresa posee una función de costes marginales asociada a cada localización x_j, $C'_A(x_j)$ y $C'_B(x_j)$, constante y no negativa. Además, cada empresa incurre en

3. El trato dispensado a los usuarios constituye una importante estrategia de marketing

unos costes fijos, $F_A(x_j)$ y $F_B(x_j)$, dependientes de la localización. Así, la función de beneficios para cada una de las empresas se puede expresar como

$$\pi_A(x_A, x_B, p_A, p_B) = (p_A - C_A'(x_A))\Lambda_A(x_A, x_B, p_A, p_B) - F_A(x_A)$$
$$\pi_B(x_A, x_B, p_A, p_B) = (p_B - C_B'(x_B))\Lambda_B(x_A, x_B, p_A, p_B) - F_B(x_B)$$

donde Λ_A (Λ_B) es la cuota de mercado captada por A (B). Se asume que la demanda total del mercado es satisfecha totalmente, es decir $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$. Para simplificar la notación, en lo sucesivo se omitirán los argumentos de la función cuota de mercado.

La demanda de cada nodo es distribuida entre los servicios con el fin de minimizar sus costes (producto, transporte y externalidad). El coste para los usuarios del nodo i viene dado por

$$C_i(x_A, x_B, p_A, p_B, \lambda_A, \lambda_B) = \lambda_{iA}(p_A + t_{iA} + E_A(\Lambda_A)) + \lambda_{iB}(p_B + t_{iB} + E_B(\Lambda_B))$$

donde $\lambda_F = (\lambda_{1F}, \lambda_{2F}, ..., \lambda_{nF})$ y λ_{iF} es la parte de la demanda del nodo *i* que es cubierta por la empresa *F, F=A, B.* Dado que para cada uno de los nodos se satisface toda la demanda, se tiene que $\lambda_i = \lambda_{iA} + \lambda_{iB}, \forall i,$ siendo $\lambda_{iA}, \lambda_{iB} \geq 0$. El término t_{iA} (t_{iB}) representa el coste de transporte de una unidad de demanda desde el punto i hasta la localización de *A (B)*. Los costes de externalidad unitarios, $E_A(\Lambda_A)$ y $E_B(\Lambda_B)$, son funciones no negativas, diferenciables y crecientes de la cuota de mercado captada, esto es,

$$\frac{\partial E_A}{\partial \Lambda_A} > 0, \quad \frac{\partial E_B}{\partial \Lambda_B} > 0$$

y puesto que $\Lambda_A = \Lambda - \Lambda_B$, se cumple que $\dfrac{\partial E_A}{\partial \Lambda_B} < 0, \quad \dfrac{\partial E_B}{\partial \Lambda_A} < 0.$

En este trabajo, por simplicidad se asume que los costes de externalidad son funciones lineales de la forma $E_F(L) = b_F L,\ b_F > 0\ (F = A, B)$. El valor b_F es un indicador de la *aversión del consumidor a la congestión* en el servicio de la firma *F*. Así, la función de costes para los individuos del nodo *i* será

$$C_i(x_A, x_B, p_A, p_B, \lambda_A, \lambda_B) = \lambda_{iA}(p_A + t_{iA} + b_A\Lambda_A) + \lambda_{iB}(p_B + t_{iB} + b_B\Lambda_B)$$

ÍNDICE

3. Análisis del equilibrio

Se analiza la existencia de un *equilibrio de Nash subjuego-perfecto* asociado al siguiente juego en dos etapas: en primer lugar las dos empresas competidoras deciden sus localizaciones para posteriormente, conocidas éstas, elegir los precios. Un equilibrio de Nash subjuego-perfecto es una situación donde tanto el juego que se plantea como cualquier subjuego se encuentran en equilibrio. Una vez fijados los precios y las localizaciones, los usuarios asignan sus demandas con el fin de minimizar los costes. El procedimiento seguido es inverso a la secuencia del juego. En primer lugar, dadas localizaciones y precios se estudia el equilibrio de Nash para las asignaciones; una vez conocidas estas asignaciones de equilibrio, se calculan los precios de equilibrio de Nash para localizaciones dadas y finalmente se estudia la existencia de equilibrio de Nash en localización. Además, se considera un equilibrio de Stackelberg en localizaciones, donde la firma líder es la primera en localizarse, conocido el equilibrio posterior de los precios.

Los siguientes lemas son resultados de existencia y unicidad de equilibrios de Nash para juegos no cooperativos de información completa (Friedman, 1991).

Lema 1.

Sea $G(I,S,P)$ *un juego no cooperativo de información completa donde* $I=\{1,2,\dots,l\}$ *es el conjunto de jugadores,* $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_l$ *es el espacio de estrategias siendo* $S_i \subset \mathbb{R}^m$ *el espacio de estrategias del jugador i, y* $P=(P_1,P_2,\dots,P_l)$ *la función de pagos con* P_i *la función de pagos del jugador i. El juego satisface las condiciones siguientes:*

- Condición 1. $S_i \subset \mathbb{R}^m$ *es compacto y convexo para cada* $i \in I$.
- Condición 2. $P_i(s)$ *es continua y acotada en S para cada* $i \in I$.
- Condición 3. $P_i(s \mid t_i)$ *es cóncava respecto de* $t_i \in S_i$, *para cada* $s \in S$, $i \in I$, *donde para una estrategia* $s=(s_1,s_2,\dots,s_l) \in S$, $s \mid t_i$ *denota* $(s_1,\dots,s_{i-1},t_i,s_{i+1},\dots,s_l)$, *es decir, el vector s con* t_i *en lugar de* s_i.

Entonces el juego G tiene al menos un equilibrio de Nash.

Lema 2.

Sea $G(I,S,P)$ un juego no cooperativo de información completa que satisface las condiciones siguientes:

- Condición 1. $S_i \subset \mathbb{R}^m$ *es compacto y convexo para cada* $i \in I$.
- Condición 4. $P_i(s)$ *es una función de clase* $C^{(2)}$ *en S para cada* $i \in I$.

ÍNDICE

– Condición 5. *$P_i(s \mid t_i)$ es estrictamente cóncava respecto de t_i Î S_i, para cada s Î S, i Î I.*

– Condición 6. *La matriz* $$J(s) = \left(\frac{\partial^2 P_i(s)}{\partial s_{ik} \partial s_{jl}} \right)_{i,\, j\in I;\, k,l=1,\ldots,m}$$ *es cuasidefinida negativa para cada s Î S, esto es, $J(s) + J^t(s)$ es definida negativa para cada s Î S.*

Entonces el juego G tiene un único equilibrio de Nash.

3.1. Asignaciones de equilibrio

Supóngase que los usuarios llevan a cabo sus elecciones de forma individual. Dadas las localizaciones, x_A y x_B, y los precios, p_A y p_B, se pretende encontrar para cada nodo *i* el par (l_{iA}, l_{iB}) solución del siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \min & C_i(\lambda_A, \lambda_B) \\ \text{s.a.} & \\ & \lambda_i = \lambda_{iA} + \lambda_{iB} \\ & \lambda_{iA}, \lambda_{iB} \geq 0 \end{array}$$

Haciendo $l_{iB} = l_i - l_{iA}$ y teniendo en cuenta que $\Lambda = \Lambda_A + \Lambda_B$, la función objetivo queda de la siguiente forma

$$C_i(\lambda_A) = \lambda_{iA}(p_A + t_{iA} + b_A \Lambda_A) + (\lambda_i - \lambda_{iA})(p_B + t_{iB} + b_B(\Lambda - \Lambda_A))$$

Un equilibrio de Nash en asignaciones, $\overline{\lambda}_A$, debe satisfacer

$$C_i(\overline{\lambda}_A) = \min_{0 \leq \lambda_{iA} \leq \lambda_i} C_i(\overline{\lambda}_{1A}, \ldots, \lambda_{iA}, \ldots, \overline{\lambda}_{nA}),\ i = 1, \ldots, n$$

Proposición 1. *Dado cualquier par de localizaciones y precios, existe al menos un equilibrio de Nash en asignaciones. Además, las expresiones*

$$\overline{\lambda}_{iA} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} F_j - nF_i \right)$$

con $F_i = \dfrac{1}{(b_A + b_B)}\left[-b_B(\Lambda + \lambda_i) + p_A - p_B + t_{iA} - t_{iB}\right]$, *constituyen un equilibrio de Nash en asignaciones si* $0 \leq \overline{\lambda}_{iA} \leq \lambda_i,\ i = 1,\ldots,n.$

Demostración. El coste $C_i(\lambda_{iA})$ es una función continua, acotada y estrictamente convexa respecto de λ_{iA} ya que $\dfrac{\partial^2 C_i}{\partial \lambda_{iA}^2} = 2(b_A + b_B) > 0,\ i = 1,\ldots,n,$ con λ_{iA} en el conjunto compacto y convexo $[0, \lambda_i]$. Aplicando el lema 1 se deduce que existe al menos un punto de equilibrio. Puesto que las expresiones $\overline{\lambda}_{iA}$, *i=1,...,n* satisfacen simultáneamente las condiciones de Kuhn-Tucker[4] de los problemas

$$\min\ C_i(\lambda_A)\ \ sujeto\ \ a\ \ 0 \leq \lambda_{iA} \leq \lambda_i$$

con *i=1,...,n,* dadas por

$$2\lambda_{iA} + \sum_{j\neq i} \lambda_{jA} + F_i + \mu_i \geq 0$$
$$\left(2\lambda_{iA} + \sum_{j\neq i} \lambda_{jA} + F_i + \mu_i\right)\lambda_{iA} = 0$$
$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_{iA}) = 0$$
$$\mu_i \geq 0$$
$$0 \leq \lambda_{iA} \leq \lambda_i$$

se deduce que constituyen un equilibrio de Nash.

Agrupando convenientemente se obtiene una expresión de la forma

$$\overline{\lambda}_{iA} = \frac{G(b_B)}{(b_A + b_B)}$$

en la que puede observarse el efecto negativo que tiene el incremento del coste de externalidad de una firma en su demanda captada.

4. El sistema $2\lambda_{iA} + \sum_{j\neq i} \lambda_{jA} = -F_i,\ i = 1,\ldots, n,$ es compatible determinado con solución $\overline{\lambda}_{iA}$.

En lo sucesivo, supondremos que la solución del problema sin restricciones verifica $0 \leq \overline{\lambda}_{iA} \leq \lambda_i$, $i = 1,\ldots,n$, es decir, la solución del problema relajado es factible. Posteriormente, en la proposición 3 se establecerán condiciones necesarias y suficientes para que esto suceda. En tal caso, las cuotas de mercado asociadas son

$$\overline{\Lambda}_A = \frac{(n+1)b_B\Lambda + n(p_B - p_A) + T_B - T_A}{(n+1)(b_A + b_B)} \quad \text{y} \quad \overline{\Lambda}_B = \Lambda - \overline{\Lambda}_A$$

donde $T_F = \sum_{i \in I} t_{iF}$ es el coste de transporte agregado para la firma *F, F=A, B.*

Cabe destacar que la cuota de mercado captada por A, decrece con el incremento del coste de su externalidad y crece con la diferencia de precios (p_B - p_A) y costes de transporte agregados (T_B - T_A). Además, como

$$\frac{\partial \overline{\Lambda}_A}{\partial b_B} = \frac{(n+1)b_A\Lambda - n(p_B - p_A) + T_A - T_B}{(n+1)(b_A + b_B)^2}$$

será creciente con el coste de externalidad de su competidora siempre que el suyo supere el umbral $\dfrac{n(p_B - p_A) + T_B - T_A}{(n+1)\Lambda}$. Este umbral constituye el valor de b_A que hace $\Lambda_A = \Lambda$, es decir que la firma A capte todo el mercado[5].

3.2. Precios de equilibrio

Para calcular los precios de equilibrio se consideran dadas las localizaciones. Así, la función de beneficio para la empresa *F* se puede expresar de la siguiente forma

$$\pi_F(p_A, p_B) = (p_F - C'_F)\overline{\Lambda}_F - F_F$$

Sustituyendo la cuota de mercado de equilibrio en la función de beneficio de *A* se tiene

$$\pi_A(p_A, p_B) = (p_A - C'_A)\frac{(n+1)b_B\Lambda + n(p_B - p_A) + T_B - T_A}{(n+1)(b_A + b_B)} - F_A$$

(la de B se obtiene sin más que permutar los subíndices).

5. Para b_A menor que dicho umbral no incrementa su cuota de mercado porque ya lo capta completamente

Proposición 2. *Si* $0 \le \overline{\lambda}_{iA} \le \lambda_i,\ i = 1,\dots,n,$ *existe un único equilibrio de Nash en precios para cualquier par de localizaciones de la primera etapa dado por*

$$(\overline{p}_A, \overline{p}_B) = \begin{cases} (\tilde{p}_A, C'_B) & \text{si} \quad h < -2r_A - r_B \\ (p^*_A, p^*_B) & \text{si} \quad -2r_A - r_B \le h \le r_A + 2r_B \\ (C'_A, \tilde{p}_B) & \text{si} \quad h > r_A + 2r_B \end{cases}$$

donde

$$p^*_A = \frac{1}{3n}(r_A + 2r_B + n(2C'_A + C'_B) - T_A + T_B)$$

$$p^*_B = \frac{1}{3n}(2r_A + r_B + n(C'_A + 2C'_B) + T_A - T_B)$$

$$\tilde{p}_A = \frac{1}{2n}(r_B + n(C'_A + C'_B) - T_A + T_B)$$

$$\tilde{p}_B = \frac{1}{2n}(r_A + n(C'_A + C'_B) + T_A - T_B)$$

siendo $r_A = (n+1)b_A\Lambda,\ r_B = (n+1)b_B\Lambda$ y $h = n(C'_A - C'_B) + T_A - T_B.$

Demostración. El beneficio $\pi_F(p_A, p_B)$ es una función de clase $C^{(2)}$ y estrictamente cóncava respecto de p_F ya que $\dfrac{\partial^2 \pi_F}{\partial p_F^2} = \dfrac{-2n}{(n+1)(b_A + b_B)} < 0,\ F = A, B,$ con p_F en el conjunto compacto y convexo $\left[C'_F, U\right]$, donde U es un valor suficientemente grande. La matriz $J(s) + J^t(s)$ es $\begin{bmatrix} -2k_1 & k_1 \\ k_1 & -2k_1 \end{bmatrix}$, donde $k_1 = \dfrac{2n}{(n+1)(b_A + b_B)}$. Esta matriz es definida negativa porque los menores principales son $J_1 = -2k_1 < 0$ y $J_2 = 3k_1^2 > 0$. Aplicando el lema 2 se deduce que existe un único punto de equilibrio. El par $(\overline{p}_A, \overline{p}_B)$ satisface simultáneamente las condiciones de Kuhn-Tucker[6] de los problemas[7]:

---

6. Basta considerar $(\lambda, \mu) = \begin{cases} \left(0, nk_1\left[2(C'_B - p^*_B) + p^*_A - \tilde{p}_A\right]\right) & \text{si} \quad h < -2r_A - r_B \\ (0,0) & \text{si} \quad -2r_A - r_B \le h \le r_A + 2r_B \\ \left(nk_1\left[2(C'_A - p^*_A) + p^*_B - \tilde{p}_B\right], 0\right) & \text{si} \quad h > r_A + 2r_B \end{cases}$ expresiones que puede comprobarse que son ≥ 0.

$$\begin{cases} \max\limits_{p_A \geq C'_A} \pi_A(p_A, \overline{p}_B) \\ \max\limits_{p_B \geq C'_B} \pi_B(\overline{p}_A, p_B) \end{cases}$$

dadas por las ecuaciones siguientes

$$k_2(r_B - 2np_A + np_B + nC'_A - T_A + T_B) + \lambda = 0$$

$$k_2(r_A - 2np_B + np_A + nC'_B + T_A - T_B) + \mu = 0$$

$$\lambda(p_A - C'_A) = 0$$

$$\mu(p_B - C'_B) = 0$$

$$p_A \geq C'_A$$

$$p_B \geq C'_B$$

$$\lambda, \mu \geq 0$$

donde $k_2 = \dfrac{k_1}{2n}$. Entonces se deduce que $(\overline{p}_A, \overline{p}_B)$ son los precios de equilibrio.

La figura 1 muestra las curvas de reacción de los duopolistas y los precios de equilibrio, que vienen dados por la intersección de ambas curvas. Nótese que la curva de reacción de la firma *F* es derivable excepto en dos puntos.

En lo sucesivo asumiremos que se satisface la condición

$$-2b_A - b_B \leq \frac{n(C'_A - C'_B) + T_A - T_B}{(n+1)\Lambda} \leq b_A + 2b_B \quad \text{(C1)}$$

Puede comprobarse que en tal caso el precio de equilibrio es (p^*_A, p^*_B). Obsérvese que si la demanda es suficientemente grande, en cuyo caso la externalidad juega un papel significativo, el cociente en valor absoluto en (*C*1) será pequeño y estará dentro del intervalo.

Bajo la condición (C1) los precios de equilibrio se incrementan con los costes de externalidad, en mayor medida con los del rival. El hecho de que un aumento del

7. La cota superior del intervalo puede ser eliminada asumiendo que es suficientemente grande. Esta suposición es posible dado que bajo las hipótesis del problema el precio de reserva es infinito. En otro caso, podrían establecerse las nuevas condiciones de optimalidad de forma similar y obtener el correspondiente equilibrio

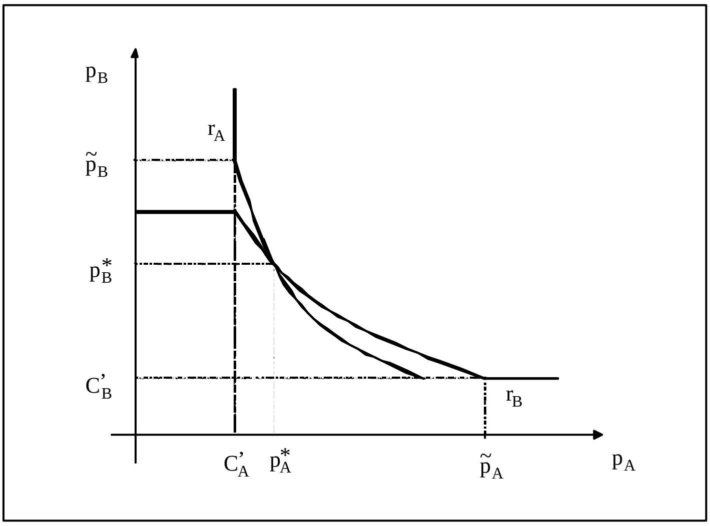

Fig.1: Curvas de reacción

coste de externalidad de una firma provoque a su vez un aumento en su precio está justificado por la consecuente subida del precio del rival. Igualmente, se incrementan con los costes marginales, en mayor medida con los propios, y con el aumento del coste de transporte agregado de su rival, reduciéndose con el suyo.

Una vez conocidos los precios de equilibrio, es posible establecer condiciones necesarias y suficientes para que $0 \le \overline{\lambda}_{iA} \le \lambda_i,\ i = 1,\dots,n.$

Proposición 3. *Dadas dos localizaciones, una condición necesaria y suficiente para que las asignaciones óptimas del problema sin restricciones bajo la condición (C1) satisfagan* $0 \le \overline{\lambda}_{iA} \le \lambda_i, i = 1,\dots,n,$ *es,* $\max_{i \in I}\{t_{iA} - t_{iB} - b_B\lambda_i\} \le Q \le \min_{i \in I}\{t_{iA} - t_{iB} + b_A\lambda_i\}$ *(C2), donde*

$$Q = \frac{1}{n+1}\left[\frac{3n+2}{3n}(T_A - T_B) + \frac{C'_B - C'_A}{3}\right]\frac{(b_A - b_B)\Lambda}{3n}$$

Demostración. Este resultado se prueba en un apéndice.

De la misma forma que para la condición (*C*1), si la demanda en cada nodo es suficientemente grande, la condición (*C*2) también se satisface. Entonces, en lo sucesivo asumiremos que la demanda en cada punto es suficientemente grande y que se satisfacen, por tanto, las condiciones (*C*1) y (*C*2).

3.3 Localizaciones de equilibrio

Finalmente, conocidos los precios de equilibrio bajo las condiciones (*C*1) y (*C*2), se estudian dos escenarios para la localización: entradas simultáneas y localización con anticipación, que corresponden a los equilibrios de Nash y Stackelberg respectivamente. En el primer escenario la entrada se produce en el mismo momento, mientras que en el segundo no existen empresas operando y una de ellas es la primera en entrar con la intención de anticiparse a la competencia futura.

3.3.1 Equilibrio de Nash

Se trata de estudiar el equilibrio de Nash en localizaciones conocido el comportamiento posterior en precios. Sustituyendo la diferencia de precios $\overline{p}_B - \overline{p}_A$ por

$$\frac{1}{3n}\left[(n+1)(b_A - b_B)\Lambda + n\left(C'_B(x_B) - C'_A(x_A)\right) - 2(T_B(x_B) - T_A(x_A))\right]$$

en la función de beneficio de la firma A

$$\pi_A(x_A, x_B) = \left[\overline{p}_A(x_A, x_B) - C'_A(x_A)\right]\overline{\Lambda}_A(x_A, x_B) - F_A(x_A)$$

se obtiene

$$\frac{\left[(n+1)(b_A + 2b_B)\Lambda + n\left(C'_B(x_B) - C'_A(x_A)\right) + T_B(x_B) - T_A(x_A)\right]^2}{9n(n+1)(b_A + b_B)} - F_A(x_A)$$

(la expresión para B se obtiene intercambiando los subíndices).

Las localizaciones, $\overline{x}_A$ y $\overline{x}_B$, correspondientes al equilibrio de Nash tienen que verificar

$$\pi_A(\overline{x}_A, \overline{x}_B) = \max_{x_A \in J} \pi_A(x_A, \overline{x}_B)$$

$$\pi_B(\overline{x}_A, \overline{x}_B) = \max_{x_B \in J} \pi_B(\overline{x}_A, x_B)$$

Se trata, por tanto, de resolver el siguiente problema

$$\max_{x_A \in J}\left\{\frac{\left[(n+1)(b_A+2b_B)\Lambda+n\left(C'_B(x_B)-C'_A(x_A)\right)+T_B(x_B)-T_A(x_A)\right]^2}{9n(n+1)(b_A+b_B)}-F_A(x_A)\right\}$$

$$\max_{x_B \in J}\left\{\frac{\left[(n+1)(2b_A+b_B)\Lambda+n\left(C'_A(x_A)-C'_B(x_B)\right)+T_A(x_A)-T_B(x_B)\right]^2}{9n(n+1)(b_A+b_B)}-F_B(x_B)\right\}$$

Una forma de obtener una solución de equilibrio consiste en determinar, partiendo de dos localizaciones iniciales, elecciones consecutivas para cada una de las empresas hasta que ninguna de ellas tenga incentivo a relocalizarse. Si el proceso no da lugar a ciclos, la solución de equilibrio se obtiene en un número finito de pasos. En el siguiente resultado se prueba que no existen ciclos y, por tanto, que existe un equilibrio de Nash en localizaciones. En consecuencia, se garantiza la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-pefecto.

Teorema
Si se dan las condiciones (C1) y (C2), existe un equilibrio de Nash subjuego-perfecto asociado al juego en dos etapas donde, en la primera, dos empresas deciden localizaciones de entre un conjunto finito de posibilidades y, en la segunda, los precios de sus productos.

Demostración. Este resultado se prueba en un apéndice.

El siguiente algoritmo puede emplearse para obtener un equilibrio de Nash subjuego-perfecto bajo las condiciones (C1) y (C2).

ALGORITMO 1. *Obtención de un equilibrio de Nash en los supuestos del teorema*

Paso 0.

Hacer $k=0$. Tomar un par de localizaciones iniciales $\left(x_A^k, x_B^k\right)$, hacer $\pi_A^k=\pi_A\left(x_A^k, x_B^k\right)$ y $\pi_B^k=\pi_B\left(x_A^k, x_B^k\right)$.

<u>Paso 1.</u> (Relocalización de A)

Calcular $\pi_A^* = \pi_A\left(x_A^*, x_B^k\right) = \max_{x_A \in J} \pi_A\left(x_A, x_B^k\right)$.

Si $k \neq 0$ y $\pi_A^* \leq \pi_A^k$, parar. Las localizaciones de equilibrio son x_F^k y los precios asociados $\bar{p}_F$, *F=A,B.*

En otro caso, hacer $x_A^{k+1} = x_A^*$, $\pi_A^{k+1} = \pi_A^*$ e ir al Paso 2.

<u>Paso 2.</u> (Relocalización de B)

Calcular $\pi_B^* = \pi_B\left(x_A^{k+1}, x_B^*\right) = \max_{x_B \in J} \pi_B\left(x_A^{k+1}, x_B\right)$.

Si $\pi_B^* > \pi_B^k$, hacer $x_B^{k+1} = x_B^*$, $\pi_B^{k+1} = \pi_B^*$, *k=k+1*, e ir al Paso 1.

En otro caso, parar. Las localizaciones de equilibrio son x_A^{k+1} y x_B^k, y los precios asociados $\bar{p}_F$, *F=A,B.*

En los pasos 1 y 2 cada una de las empresas decide relocalizarse si con ello aumenta su beneficio. Si la empresa A no modifica su localización inicial, se investigan las posibles relocalizaciones de B y si de entre las alternativas posibles no mejora, la empresa decide no moverse, alcanzándose una situación de equilibrio. Además, este proceso finaliza en un número finito de pasos como se demostró en el teorema anterior.

3.3.2 Equilibrio de Stackelberg

Un escenario diferente corresponde al problema de Stackelberg[8]. Se trata de una situación en la que no existe ninguna empresa operando en el mercado y una de ellas, por ejemplo A, es la primera en localizarse teniendo en cuenta la futura entrada de una competidora. El equilibrio de Stackelberg puede obtenerse de la siguiente manera. Suponiendo que A es la empresa líder y B la seguidora, B elegirá la localización que maximice sus beneficios dada la elección de A. Si x_A es la localización seleccionada por A, la decisión de B, x_B^* / x_A , será la solución del problema

$$\max_{x_B \in J} \pi_B\left(x_A, x_B\right)$$

8. También conocido como (1/1)-centroide en Hakimi (1983) y localización con anticipación en Serra y ReVelle (1995)

Entonces, la empresa líder decidirá la localización x_A^* solución de

$$\max_{x_A \in J} \pi_A\left(x_A, x_B^* / x_A\right)$$

Dado que se trata de un problema discreto, siempre existirá la menos un equilibrio de Stackelberg. El siguiente algoritmo puede emplearse para obtener uno de estos equilibrios.

ALGORITMO 2. *Obtención de un equilibrio de Stackelberg.*

Paso 1.

Hacer $\pi_A^* = 0$, $k=1$.

Paso 2.

Sea x_B^* / x_k una solución del problema $\max_{x_B \in J} \pi_B\left(x_k, x_B\right)$.

Si $\pi_A\left(x_k, x_B^* / x_A\right) > \pi_A^*$, hacer $\pi_A^* = \pi_A\left(x_k, x_B^* / x_A\right)$, $x_A^* = x_k$ y $x_B^* = x_B^* / x_A$.

Si $k < |J|$, hacer $k=k+1$ y repetir el Paso 2. En otro caso, parar. La elección de la empresa líder será x_A^* y la respuesta de la empresa seguidora es x_B^*.

4. Ejemplo

Se considera la red de la figura 2 donde los nodos son a la vez puntos de demanda y posibles localizaciones. La demanda de cada uno de los nodos es de veinte unidades y la distancia que los separa es la que aparece en las aristas que los une. Los costes de externalidad son $b_A=0.45$ y $b_B=0.55$, mientras que los costes marginales y fijos para cada una de las empresas y posibles localizaciones son los siguientes:

$$C'_A = \{60,60,60,75,75,75,90\}$$

$$C'_B = \{90,75,75,75,60,60,60\}$$

$$F_A = \{200,300,100,200,500,150,200\}$$

$$F_B = \{100,200,500,150,200,200,300\}$$

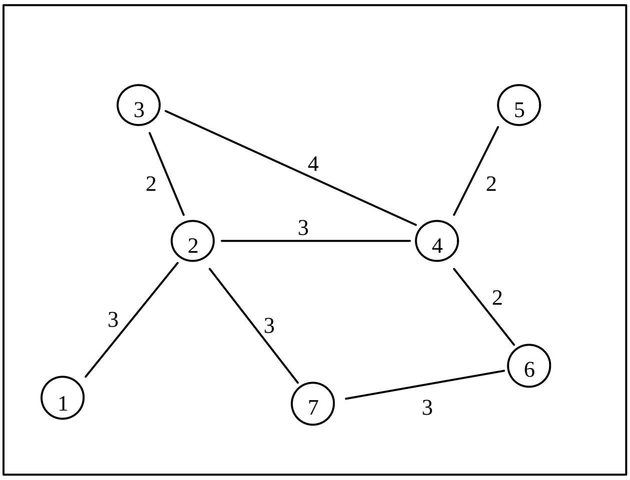

Fig. 2: Red empleada en el ejemplo

Puede comprobarse fácilmente que los datos del problema satisfacen las condiciones (C1) y (C2), por lo que la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto queda garantizada. En la tabla 1 se muestran los beneficios obtenidos por ambas empresas para cada par de localizaciones. Se puede comprobar que las localizaciones $x_A=3$ y $x_B=6$ constituyen el único equilibrio de Nash ya que ninguna de las empresas tiene incentivo para relocalizarse. Las cuotas de mercado en el equilibrio son $\overline{\Lambda}_A = 72.33$ y $\overline{\Lambda}_B = 67.67$ con unos precios de $\overline{p}_A = 142.66$ y $\overline{p}_B = 137.33$.

Por otro lado, se observa que la respuesta de B a cualquier decisión de A siempre es la misma, $x_B=6$. Por lo tanto, el equilibrio de Stackelberg estará formado por el x_A^* que verifique

$$\pi_A(x_A^*, x_B = 6) = \max_{x_A} \pi_A(x_A, x_B = 6)$$

Sin más que hallar el máximo valor para los beneficios de A en la columna correspondiente a $x_B=6$ se tiene que $x_A=3$. Entonces, el equilibrio de Nash anterior es también el único equilibrio de Stackelberg si la firma A es líder.

Tabla 1. Beneficios para cada par de localizaciones

π_A / π_B	$x_B=1$	$x_B=2$	$x_B=3$	$x_B=4$	$x_B=5$	$x_B=6$	$x_B=7$
$x_A=1$	7313 3867	6415 4469	6466 4126	6423 4513	5752 5059	5725 5085	5731 4978
$x_A=2$	7330 3783	6425 4378	6476 4036	6432 4422	5755 4962	5728 4987	5735 4881
$x_A=3$	7476 3822	6574 4420	6625 4078	6581 4464	5907 5007	5879 5033	5886 4926
$x_A=4$	6627 4394	5773 5039	5821 4694	5779 5083	5143 5663	5117 5690	5123 5583
$x_A=5$	6254 4454	5404 5104	5452 4759	5411 5147	4778 5731	4752 5759	4759 5652
$x_A=6$	6633 4430	5781 5078	5829 4733	5788 5122	5154 5704	5128 5731	5134 5624
$x_A=7$	5828 5088	5026 5786	5071 5438	5033 5829	4438 6452	4414 6481	4420 6374

Tabla 2. Solución para distintos costes de externalidad.

(b_A,b_B)	(0.2,0.5)	(0.4,0.5)	(0.5,0.5)	(0.6,0.5)	(0.8,0.5)
π_A	3384	4678	5400	6171	7864
π_B	1816	4006	5400	6993	10776
$\overline{p}_A$	84	94.6	100	105.3	116
$\overline{p}_B$	68	89.3	100	110.6	132
$\overline{\Lambda}_A$	80	72.59	70	67.88	64.62
$\overline{\Lambda}_B$	60	67.41	70	72.12	75.38

Con el fin de analizar el efecto de la externalidad se han estudiado otras situaciones donde los costes variables y fijos son los mismos en todas las localizaciones para ambas empresas ($C'_F = 20$ y $F_F = 200,\ F = A,B$). Los datos son los que aparecen en la tabla 2. En todos estos casos, independientemente de los costes de externalidad, tanto el equilibrio de Nash como el de Stackelberg coinciden en el par (2,2). Un incremento en los costes de externalidad produce una reducción de la cuota de mercado captada por la empresa. Sin embargo, se produce una subida en los precios que se refleja en un aumento en los beneficios, mayor en la empresa con menores costes de externalidad. Además, los beneficios son mayores para la empresa que cuenta con un menor coste de externalidad. Evidentemente, si estos costes son iguales para ambas empresas, la cuota de mercado se reparte equitativamente, imponiéndose un único precio de mercado.

5. Conclusiones y posibles extensiones

La presencia de externalidades en un mercado puede conducir a situaciones de subóptimos sociales. Para evitarlo es preciso una negociación entre los usuarios de los servicios o bien es necesario un agente regulador que lleve a cabo las asignaciones. Como en la mayoría de los mercados competitivos no existe este agente y la negociación es poco probable, las decisiones se toman de forma individual. En este trabajo se analiza dicha situación, modelándose el comportamiento de las empresas como un juego competitivo en dos etapas. En la primera se eligen las localizaciones y en la segunda, conocidas éstas, se determinan los precios. Se han considerado costes lineales para externalidades negativas, llegándose a la expresión de las asignaciones y precios de equilibrio de Nash bajo ciertos supuestos. Estos supuestos son válidos cuando la demanda es suficientemente grande. De hecho, no parece lógico modelar el efecto de la externalidad en el caso contrario[9]. Puede observarse el efecto negativo que sobre las asignaciones tiene el coste de externalidad asociado al servicio. Como era de esperar, el incremento de dicho coste le supone a la empresa una reducción de su cuota de mercado. La respuesta estratégica de una empresa a un aumento del coste de externalidad asociado, lejos de lo que cabría esperar en un principio, es un aumento del precio de equilibrio. Este incremento viene motivado por el hecho de que su competidora aumenta también su precio aprovechando esta circunstancia. Por tanto, puede concluirse que el coste de externalidad tiene un efecto negativo sobre los precios y por consiguiente sobre la utilidad de los usuarios. Finalmente, se demuestra la existencia de un equilibrio de Nash subjuego-perfecto bajo estos mismos supuestos.

Posibles extensiones para este trabajo pueden ser la generalización al caso oligopolístico, la incorporación de funciones de demanda elásticas al precio y funciones para los costes de externalidad no necesariamente lineales. Finalmente, puesto que las empresas podrían modificar su coste de externalidad invirtiendo en las características del servicio, sería interesante estudiar cuales deberían ser estas inversiones óptimas.

9. Por ejemplo, cuando no existe peligro de congestión.

ÍNDICE

Bibliografía

ANDALUZ FUNCIA, J. (1995): "Competencia en localización y precios: Influencia de los costes de transporte", Cuadernos Aragoneses de Economía, 5, págs. 343-358.

BRANDEAU, M. y S. CHIU (1994ª): "Facility location in a user-optimizing environment with market externalities: Analysis of customer equilibria and optimal public facility locations", Location Science, 2, págs. 129-147.

BRANDEAU, M. y S. CHIU (1994b): "Location of competing private facilities in a user-optimizing environment with market externalities", Transportation Science, 28, págs. 125-140.

CORNER, R. y T. SANDLER (1986): The theory of externalities, public goods, and club goods, Cambridge University Press.

DORTA GONZÁLEZ, P., R. SUÁREZ VEGA y D.R. SANTOS PEÑATE (1999): "Modelo de competencia espacial incorporando externalidades", por aparecer en Investigación Operacional, 3.

EISELT, H.A. y G. LAPORTE (1996): "Secuential location problems", European Journal of Operational Research, 96, págs. 217-231.

EISELT, H.A., G. LAPORTE y J.F. THISSE (1993): "Competitive locations models: a framework and bibliography", Transportation Science, 27, págs. 44-54.

FRIEDMAN (1991): *Game theory with applications to economics*, Oxford University Press.

FRIESZ, T.L., T. MILLER y R.L.TOBIN (1988): "Competitive network facility location models: a survey", Papers of the Regional Science Association, 65, págs. 47-57.

HAKIMI, S.L. (1983): "On locating new facilities in a competitive environment", European Journal of Operational Research, 12, págs. 29-35.

HOTELLING, H. (1929): "Stability in competition", Economic Journal, 39, págs. 41-57.

KOHLBERG, E. (1983): "Equilibrium store locations when consumers minimize travel time plus waiting time", Economics Letters, 11, págs. 211-216.

LABBÉ, M., D. PEETERS y J.F. THISSE (1995): "Location on networks", in Handbooks in Operations Research and Management Science, vol. 8: Network Routing, págs. 551-624.

LABBÉ, M. y S.L. HAKIMI (1991): "Market and location equilibrium for two competitors", Operation Research, 39, págs. 749-756.

LEDERER, P. y J.F. THISSE (1990): "Competitive location on networks under delivered pricing", Operational Research Letters, 9, págs. 147-153.

SERRA, D. y C. REVELLE (1995): "Competitive location in discrete space", in Facility Location: A Survey of Applications and Methods, Z. Drezner (ed.), Springer-Verlag.

SUÁREZ VEGA, R., P. DORTA GONZÁLEZ y D.R. SANTOS PEÑATE (1998): "Externality in a Stackelberg spatial competition model", working paper, Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión, Univ. de Las Palmas de Gran Canaria.

TOBIN, R.L. y T.L. FRIESZ (1986): "Spatial competition facility location models: definition, formulation and solution approach", Annals of Operation Research, 6, págs. 49-74.

Apéndice

Demostración de la Proposición 3. Hay que comprobar que (*C*2) ocurre si y sólo si la solución del problema relajado es factible, es decir

$$0 \le \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=1;\, j\ne i}^{n} F_j - nF_i\right) \le \lambda_i, \ \forall i \in I$$

Operando se tiene

$$0 \le \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n} F_j - (n+1)F_i\right) \le \lambda_i, \ \forall i \in I$$

es decir

$$0 \le -F_i - \overline{\Lambda}_A \le \lambda_i, \ \forall i \in I$$

Sustituyendo,

$$0 \le \overline{p}_B - \overline{p}_A + t_{iB} - t_{iA} - (b_A + b_B)\overline{\Lambda}_A + b_B(\Lambda + \lambda_i) \le (b_A + b_B)\lambda_i, \quad \forall i \in I$$

y por lo tanto,

$$t_{iA} - t_{iB} + (b_A + b_B)\overline{\Lambda}_A - b_B(\Lambda + \lambda_i) \le \overline{p}_B - \overline{p}_A \le t_{iA} - t_{iB} + (b_A + b_B)\overline{\Lambda}_A - b_B(\Lambda + \lambda_i) + (b_A + b_B)\lambda_i$$

$\forall i \in I$. Sustituyendo la cuota de mercado, $\overline{\Lambda}_A$, y operando se tiene

$$t_{iA} - t_{iB} - b_B\lambda_i + \frac{n(\overline{p}_B - \overline{p}_A) + T_B - T_A}{n+1} \le \overline{p}_B - \overline{p}_A \le t_{iA} - t_{iB} + b_A\lambda_i + \frac{n(\overline{p}_B - \overline{p}_A) + T_B - T_A}{n+1}, \quad \forall i \in I$$

que es equivalente a

$$t_{iA} - t_{iB} - b_B\lambda_i \leq \frac{\overline{p}_B - \overline{p}_A + T_A - T_B}{n+1} \leq t_{iA} - t_{iB} + b_A\lambda_i, \quad \forall i \in I$$

Sustituyendo los precios de equilibrio, operando y obligando a que las desigualdades anteriores se verifiquen para todos los nodos de demanda se llega a la expresión buscada

$$\max_{i\in I}\{t_{iA} - t_{iB} - b_B\lambda_i\} \leq Q \leq \min_{i\in I}\{t_{iA} - t_{iB} + b_A\lambda_i\}$$

Demostración del Teorema. La existencia del equilibrio de Nash para la segunda etapa una vez conocidas las localizaciones fue probada con anterioridad. Sólo resta comprobar la existencia de un par de localizaciones de equilibrio para la primera etapa del juego y para ello basta con probar que dada una localización de partida para cada una de las empresas, si cada una responde a la elección del rival relocalizándose al nodo que maximiza su beneficio, entonces este proceso converge en un número finito de pasos hacia un equilibrio.

Para probar que el proceso no cicla, se supone por reducción al absurdo que existen dos subconjuntos $\{x_A^1, x_A^2, \ldots, x_A^p\}$ y $\{x_B^1, x_B^2, \ldots, x_B^p\}$ de localizaciones que representan las elecciones de A y B respectivamente (se considera sin pérdida de generalidad que A es la primera en decidir) de tal manera que:

$$\begin{gathered}
\pi_A(x_A^2, x_B^1) > \pi_A(x_A^1, x_B^1) \\
\pi_B(x_A^2, x_B^2) > \pi_B(x_A^2, x_B^1) \\
\pi_A(x_A^3, x_B^2) > \pi_A(x_A^2, x_B^2) \\
\vdots \\
\pi_A(x_A^1, x_B^p) > \pi_A(x_A^p, x_B^p) \\
\pi_B(x_A^1, x_B^1) > \pi_B(x_A^1, x_B^p)
\end{gathered}$$

es decir, el proceso cicla en el paso p. Entonces, sumando las inecuaciones, pasando todo al primer miembro y agrupando bajo el mismo sumatorio se tiene

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\pi_A(x_A^{i+1}, x_B^i) - \pi_A(x_A^i, x_B^i) + \pi_B(x_A^{i+1}, x_B^{i+1}) - \pi_B(x_A^{i+1}, x_B^i)\right] > 0$$

donde $x_A^{p+1} = x_A^1$ y $x_B^{p+1} = x_B^1$.

Se emplea la notación T_{k^i} y C'_{k^i} para indicar los costes de transporte y marginales si la firma *k* se localiza en x_k^i, $k = A, B$. Además se definen las constantes

$$r_1 = (n+1)(b_A + 2b_B)\Lambda \quad \text{y} \quad r_2 = (n+1)(2b_A + b_B)\Lambda.$$

Así, sustituyendo las expresiones de los beneficios deducidas con anterioridad, simplificando los costes fijos y sacando factor común se tiene,

$$\frac{1}{9n(n+1)(b_A+b_B)}\sum_{i=1}^{p}\left\{\begin{array}{l}(r_1 + n(C'_{B^i} - C'_{A^{i+1}}) + T_{B^i} - T_{A^{i+1}})^2 - (r_1 + n(C'_{B^i} - C'_{A^i}) + T_{B^i} - T_{A^i})^2 + \\ (r_2 + n(C'_{A^{i+1}} - C'_{B^{i+1}}) + T_{A^{i+1}} - T_{B^{i+1}})^2 - (r_2 + n(C'_{A^{i+1}} - C'_{B^i}) + T_{A^{i+1}} - T_{B^i})^2\end{array}\right\} > 0$$

Como el primer factor es positivo, $\sum_{i=1}^{p}(T_{B^i} - T_{A^i}) = \sum_{i=1}^{p}(T_{B^{i+1}} - T_{A^{i+1}})$ y $\sum_{i=1}^{p}(C'_{B^i} - C'_{A^i}) = \sum_{i=1}^{p}(C'_{B^{i+1}} - C'_{A^{i+1}})$, desarrollando convenientemente los cuadrados y simplificando, resulta la siguiente expresión

$$2\sum_{i=1}^{p}\left\{nr_1(C'_{A^i} - C'_{A^{i+1}}) + nr_2(C'_{B^i} - C'_{B^{i+1}}) + r_1(T_{A^i} - T_{A^{i+1}}) + r_2(T_{B^i} - T_{B^{i+1}})\right\} > 0$$

Pero al desarrollar el sumatorio se anulan todos los términos y se obtiene la contradicción buscada ($0 > 0$).