

Estudios de Economía Aplicada
Nº 14, 2000. Págs. 95-115

El pesar en el proceso analítico jerárquico¹

MORENO JIMÉNEZ, J.M^a
ESCOBAR URMENETA, M^a T.
*Departamento Métodos Estadísticos
Universidad de Zaragoza*

RESUMEN

El trabajo analiza el significado del pesar asociado a las prioridades obtenidas en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), y, tal y como solicitan Loomes y Sudgen (1982) para la Toma de Decisiones (TD) en general, ofrece una expresión de las prioridades de AHP en función del pesar. Se ha encontrado la relación entre el pesar, evaluado tanto en términos absolutos como en términos relativos, y las prioridades obtenidas en AHP para dos procedimientos de normalización (modo distributivo e ideal) y dos de síntesis (aditiva y multiplicativa). Se ha probado que esta relación es independiente del método de normalización, y la forma que adopta depende del método de síntesis y de la forma en que se evalúa el pesar. Si la evaluación del pesar se efectúa en términos absolutos y se emplea la síntesis aditiva se obtienen una relación aditiva; y si el pesar se evalúa en términos relativos y se utiliza la síntesis multiplicativa la relación es multiplicativa. En ambos casos la aplicación de AHP y la minimización del pesar proporcionan los mismos resultados en selección multicriterio de alternativas.

Palabras clave: Decisión Multicriterio, Proceso Analítico Jerárquico (AHP), Prioridades, Pesar.

ABSTRACT

The paper analyses the meaning of the regret associated with the priorities obtained with the Analytic Hierarchy Process (AHP), and, as it is required by Loomes and Sudgen (1982) for Decision Making, offers an expression of the AHP priorities in terms of the regret. We have found the relationship between the regret, evaluated both in absolute and in relative terms, and the AHP priorities obtained with two

1. Una versión inicial de este trabajo se ha presentado en la XIII Reunión Anual Asepelt-España celebrada en Burgos, los días 17 y 18 de junio de 1999.

normalization methods (distributive and ideal) and two synthesis procedures (additive and multiplicative). We have proved that this relationship is independent of the normalization method employed, and that the form it adopts depends on the synthesis method and the way the regret is evaluated. If the regret is evaluated in absolute terms and the additive synthesis method is employed, the relationship has an additive form. If the regret is evaluated in relative terms and the multiplicative synthesis method is employed, the relationship is multiplicative. In both cases the application of AHP and the minimization of the regret provides the same results in multicriteria selection of alternatives.

Key words: Multicriteria Decision Making, Analytic Hierarchy Process (AHP), Priorities, Regret.

Clasificación AMS: 90A05, 90B50, 90C31.

Artículo recibido el 6 de septiembre de 1999. Aceptado en noviembre de 1999.

1. Introducción

La Toma de Decisiones es una de las actividades del ser humano que mejor reflejan su nivel de desarrollo y libertad. Su estudio científico ha venido dominado hasta los años 70 por el conocido como enfoque tradicional o clásico, que, basado en el paradigma de la racionalidad sustantiva, suponía un único objetivo, el conocimiento a priori de las alternativas y consecuencias asociadas a las mismas, y la utilización del criterio de maximización de la utilidad esperada a la hora de priorizar y seleccionar la 'mejor' alternativa en un problema dado.

A partir de los 70 y fruto fundamentalmente del trabajo de los conductivistas y psicólogos del conocimiento esta aproximación ha sido cuestionada empíricamente (Kahneman y Tversky, 1979; Tversky y Kahneman, 1992; Prelec, 1998), en especial dentro del campo social. La existencia de múltiples actores y criterios, tanto tangibles como intangibles, y el no cumplimiento de los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada ha motivado la búsqueda de aproximaciones más flexibles y realistas que el enfoque tradicional (Moreno-Jiménez y otros, 1999).

Uno de los enfoques alternativos es la Teoría del Pesar Esperado (Bell, 1982; Loomes y Sudgen, 1982, 1987). Esta aproximación metodológica incorpora aspectos subjetivos relativos a la percepción que el individuo tiene de la importancia relativa de las alternativas en función de las consecuencias que tienen y las que podrían tener. Para ello, busca minimizar el pesar esperado, esto es, la discrepancia entre la valoración dada a la alternativa comparada y la valoración de la mejor alternativa asociada al estado de la naturaleza considerado. Esta forma de abordar la solución del problema multicriterio está en consonancia con una de las filosofías más extendidas en la misma: la 'búsqueda de metas' mediante la minimización de la distancia de las diferentes alternativas al denominado punto ideal.

A continuación se aborda, desde el punto de vista de la Teoría del Pesar, el estudio de una de las Técnicas de Decisión Multicriterio más extendidas, el Proceso Analítico Jerárquico (AHP) propuesto por Saaty (1977, 1980). Esta técnica combina aspectos tangibles e intangibles para obtener en una escala de razón las prioridades relativas asociadas a las alternativas del problema (Escobar y Moreno-Jiménez, 1994, 1998).

La relación existente entre estas prioridades y el pesar asociado a cada alternativa es analizada, tal y como solicitan Loomes y Sudgen (1982) para la Toma de Decisiones en general, obteniéndose una expresión que los relaciona. Este análisis se ha efectuado para las prioridades obtenidas aplicando AHP (medidas relativas) con diferentes procedimientos de normalización (distributivo e ideal) y síntesis (aditiva y multiplicativa).

El trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: la sección §2 revisa el concepto de pesar y su utilización en la Toma de Decisiones (TD). La sección §3 obtiene la relación de las prioridades de AHP con el pesar, evaluado en términos absolutos y en términos relativos, utilizando distintos métodos de normalización y síntesis. La cuarta sección (§4) aplica las expresiones obtenidas en la sección anterior a un ejemplo sencillo. Para cada uno de los tres casos considerados en esta sección, se comprueba cómo las ordenaciones alcanzadas con las prioridades y con el pesar coinciden. Por último, en la quinta sección (§5) se destacan las conclusiones más interesantes y se indican una serie de futuras líneas de investigación.

2. El pesar en la toma de decisiones

Bajo la denominación de Análisis de Decisiones, a veces llamado Análisis Estadístico de la Decisión, se incluyen un conjunto de herramientas que permiten analizar de forma cuantitativa las decisiones, en general bajo incertidumbre y con múltiples objetivos. Una de estas 'herramientas' es el denominado criterio minimax, o minimización de la pérdida de oportunidad esperada. Para aplicar este criterio se construye una matriz de pesar, en la que se refleja para cada estado de la naturaleza, el pesar que el decisor tiene por no haber elegido la mejor opción en ese caso. Dada esa matriz se intenta minimizar el pesar máximo o pérdida de oportunidad máxima. En este caso, los valores de la tabla representan costes de oportunidad, esto es, lo que se pierde al no tomar la mejor decisión para un estado de la naturaleza dado.

Loomes y Sudgen (1982, 1983, 1986, 1987) proponen dos modelos de elección bajo incertidumbre, complementarios psicológicamente, conocidos como Teoría del Pesar ('Regret') y Teoría de la Decepción ('Dissapointment'). De forma simultánea otros autores desarrollaron modelos que incluyen conceptos psicológicos y propiedades teóricas similares (Bell, 1982, 1985; Fishburn, 1982, 1983; y Machina, 1982). Estos modelos son una parte de la literatura desarrollada en los años 80 como respuesta a la creciente evidencia experimental de la violación sistemática de los axiomas básicos de la Teoría de la Utilidad esperada.

La idea central de la Teoría del Pesar es considerar la relatividad de las consecuencias y no sólo su valor absoluto. Los individuos, en la Toma de Decisiones, no sólo se fijan en las consecuencias asociadas a la alternativa elegida, sino también en las consecuencias de las restantes alternativas que potencialmente se podían haber considerado (la decisión depende del contexto o marco en el que se encuadra el problema).

Existen un gran número de modelos de elección bajo incertidumbre que no siguen una evaluación funcional definida sobre las distribuciones de probabilidad. Estos modelos se pueden encuadrar dentro de los modelos dependientes del contexto

(Kahneman y Tversky, 1984, p.347). Por ejemplo, los efectos del pesar pueden interpretarse como si proporcionaran un marco que determina la codificación de los resultados en diferentes estados basándose en la alternativa que debería haberse elegido para dicho estado. Modificaciones en el conjunto de alternativas implican un cambio en el marco que alterará la evaluación de las mismas. Este tipo de modelos (como la teoría del pesar) no preservan, en general, la primera dominancia estocástica ya que la misma distribución de probabilidad puede ser evaluada de forma distinta en marcos diferentes. Sin embargo, estos modelos pueden preservar nociones más débiles de la dominancia estocástica, como por ejemplo, la dominancia por estados (Quiggin, 1990).

Destaca como aspecto positivo de la Teoría del Pesar, la posibilidad que ofrece de recoger en un modelo alternativo a la teoría convencional, la capacidad de los individuos de anticipar los sentimientos de pesar y agrado en la Toma de Decisiones. Por el contrario, en el lado negativo, la Teoría del Pesar tiene fuertes implicaciones normativas. Esta teoría describe una forma de comportamiento que, aunque contradice los axiomas de la teoría de la utilidad esperada, es racional en el sentido clásico.

3. Prioridades y pesar en AHP

3.1. Prioridades en AHP

El método convencional de AHP (Saaty, 1980) proporciona la prioridad, o importancia relativa, de los elementos comparados mediante: (1) la aplicación del método del autovector principal normalizado según el 'modo distributivo' para calcular las prioridades locales; (2) el principio de composición jerárquica para obtener las prioridades globales, y (3) la agregación multiaditiva para obtener las prioridades totales. Estas prioridades (totales) pueden ser utilizadas con distintos fines: selección de una o varias alternativas (problema tipo α); ordenación de todas ellas (problema tipo γ), etc.

La unicidad del vector de prioridades locales se consigue en AHP mediante la normalización. Los métodos de normalización más utilizados son el 'modo distributivo' (dividir por la suma) y el 'modo ideal' (dividir por el máximo). Se aconseja la utilización del modo distributivo cuando el reparto de recursos escasos sea el objetivo y el modo ideal (Belton y Gear, 1983; Saaty y Vargas, 1993) cuando lo sea la selección de la mejor alternativa. Se han propuesto otros procedimientos de normalización (Schoner y Wedley, 1989; Schoner, Wedley y Choo, 1993) y dedicado numerosos trabajos en la literatura por su influencia en el cambio de rango (Belton y Gear, 1983; Saaty, 1994a; Aguarón y otros, 1995).

Algunos autores (Stillwell y otros, 1987; Moreno-Jiménez, 1996, 1997; Buchanan y otros, 1998; Homburg, 1998) proponen la modelización de los problemas complejos en dos bloques o partes diferenciadas. El primer bloque corresponde a la parte más estructurada del problema, para la que más información y menos incertidumbre existe. El segundo bloque corresponde a la parte más abierta, incierta y desconocida del problema. Al dividir la jerarquía en dos partes, pueden considerarse distintas formas de normalizar los vectores de prioridades dependiendo de la parte del problema a la que correspondan.

Siguiendo esta idea, en este trabajo, además de emplear la normalización distributiva en el que se aplica el modo distributivo en todos los niveles de la jerarquía, se ha considerado una segunda forma de normalización de los vectores de prioridades locales (de aquí en adelante, 'normalización ideal') que consiste en normalizar los vectores de prioridades de las alternativas con respecto a los atributos (parte inferior de la jerarquía) utilizando el modo ideal, y los demás vectores de prioridades locales (parte superior de la jerarquía) utilizando el modo distributivo.

Aplicando el Principio de Composición Jerárquica (Saaty, 1980) a las prioridades locales se obtienen las prioridades globales, que a su vez mediante una síntesis multiaditiva proporciona las prioridades totales. Frente a este método de síntesis, existe otro denominado Síntesis de Razones o Multiplicativo (Lootsma, 1990; Saaty, 1994b; Aguarón y otros, 1995; Barzilai y Lootsma, 1997; Vargas, 1997) que proporciona las prioridades totales mediante la multiplicación de las prioridades locales de las alternativas elevadas a las prioridades de los atributos. Esta forma de síntesis es independiente de la normalización empleada, habiéndose demostrado (Aguarón y otros, 1995) que en el caso consistente, este método mantiene la ordenación al añadir o eliminar alternativas.

A la hora de establecer la relación entre las prioridades y el pesar en AHP y con objeto de facilitar la comprensión de los resultados presentados, se va a considerar una jerarquía con cuatro niveles. Los tres primeros niveles corresponden a la meta global (nivel 1), criterios (nivel 2) y atributos o subcriterios (nivel 3); y el último nivel a las alternativas (nivel 4).

La notación utilizada es la siguiente: H es la jerarquía con los cuatro niveles mencionados (meta, criterios, subcriterios y alternativas) (véase Figura 3.1); m es el número de criterios ($C_j, j = 1, \dots, m$), n_j el número de subcriterios para el criterio j ($j = 1, \dots, m$) ($SC_{j,i}, i = 1, \dots, n_j$), y n el número de alternativas ($A_k, k = 1, \dots, n$). Se denomina $w_{j,i}(k)$ a la prioridad de la alternativa k en el subcriterio i (que a su vez cuelga del criterio j), $w_{j,i}$ a la prioridad del subcriterio i con respecto al criterio j y w_j a la prioridad del criterio j con respecto a la meta (véase Figura 3.2).

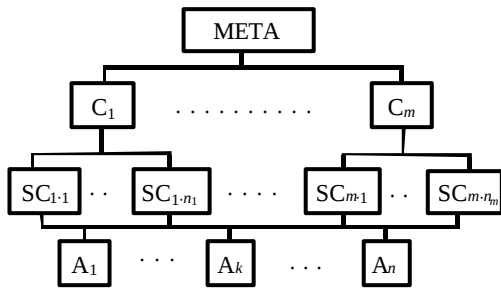


Figura 3.1. Jerarquía con cuatro niveles

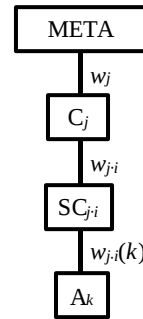


Figura 3.2. Prioridades locales en la jerarquía

En las condiciones anteriores, las prioridades totales de la alternativa k obtenidas mediante la síntesis aditiva ($w(k)$) y multiplicativa ($W(k)$), son respectivamente:

$$w(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}(k) \quad (3.1)$$

$$W(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (w_{j,i}(k))^{w_j w_{j,i}} \quad (3.2)$$

En el caso de utilizar el método de normalización ideal, los valores correspondientes a las prioridades anteriores se denotan por $v(k)$ y $V(k)$ respectivamente. Sus expresiones se obtienen sustituyendo $w_{j,i}(k)$ por $v_{j,i}(k)$ en 3.1 (síntesis aditiva) y 3.2 (síntesis multiplicativa):

$$v(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} v_{j,i}(k) \quad (3.3)$$

$$V(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (v_{j,i}(k))^{w_j w_{j,i}} \quad (3.4)$$

donde

$$v_{j,i}(k) = w_{j,i}(k) / w_{j,i}^* \quad (3.5)$$

siendo $w_{j,i}^* = \text{Max}\{w_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\}$, y denotando por $w_{j,i}(k)$, $w_{j,i}$ y w_j , los elementos de los vectores de prioridades locales normalizados según el modo distributivo.

3.2. Pesar evaluado en términos absolutos

Una primera aproximación para evaluar el pesar es definir éste en términos absolutos, esto es, a partir de las diferencias entre el valor óptimo y el valor asociado a cada alternativa.

Definición 3.1. (i) El *pesar local* de la alternativa k en el subcriterio i del criterio j , medido en términos absolutos, ($k = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$), $r_{j,i}(k)$, se define como:

$$r_{j,i}(k) = w_{j,i}^* - w_{j,i}(k) \quad (3.6)$$

donde

$$w_{j,i}^* = \text{Max}\{w_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\}.$$

El valor $r_{j,i}(k)$ representa la pérdida de prioridad local por no haber escogido aquella alternativa con mayor prioridad en el subcriterio considerado.

(ii) El *pesar* de la alternativa k con respecto al criterio j , medido en términos absolutos, se obtiene agregando los términos del *pesar local* de dicha alternativa correspondientes a los subcriterios que cuelgan del criterio j , ponderados por las prioridades de dichos subcriterios con respecto al criterio j , esto es,

$$r_j(k) = \sum_{i=1}^{n_j} w_{j,i} r_{j,i}(k) \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.7)$$

(iii) El *pesar total* de la alternativa k , medido en términos absolutos, se obtiene aplicando el principio de composición jerárquica a los criterios considerados en la jerarquía, esto es,

$$r(k) = \sum_{j=1}^m w_j r_j(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} r_{j,i}(k) \quad (3.8)$$

Este procedimiento para obtener el *pesar total* de las alternativas se extiende a una jerarquía con un número cualquiera de niveles, sin más que aplicar el Principio de Composición Jerárquica a los términos que miden el *pesar* de las alternativas con respecto a los elementos del último nivel de la jerarquía.

Si se utiliza el *pesar total*, $r(k)$, para la selección de la 'mejor' alternativa (problema $P(\alpha)$), se elige aquella que tenga un menor *pesar total*.

Teorema 3.1.

Si se utiliza la síntesis aditiva y el pesar es evaluado en términos absolutos, se verifica que para toda alternativa A_k , $k = 1, \dots, n$, la suma de su prioridad, $w(k)$ (dada por la expresión 3.1), y su pesar, $r(k)$ (dado por la expresión 3.8), es una constante, esto es,

$$w(k) + r(k) = w^* \quad (3.9)$$

donde

$$w^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}^* \quad (3.10)$$

es una constante independiente de la alternativa k considerada que representa la *prioridad ideal total*, esto es, la máxima prioridad total que una alternativa (alternativa ideal) puede recibir en el problema concreto que se está resolviendo.

DEMOSTRACIÓN: Suponiendo una jerarquía con cuatro niveles (la extensión al caso general se obtiene aplicando el principio de agregación jerárquica), para cada alternativa k ($k = 1, \dots, n$) el pesar total viene dado como la diferencia de dos términos:

$$\begin{aligned} r(k) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} r_{j,i}(k) \quad (3.8) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} (w_{j,i}^* - w_{j,i}(k)) = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}^* - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}(k). \end{aligned}$$

El primero (w^*) no depende de las alternativas ni de los criterios, mientras que el segundo coincide con la prioridad total de la alternativa k , $w(k)$, dada en la expresión

3.1. El resultado queda como $w^* = w(k) + r(k)$, donde $w^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}^*$ repre-

senta la composición jerárquica de los valores máximos de las prioridades de las alternativas respecto de los elementos del nivel inmediatamente superior al de las alternativas (en el desarrollo anterior, los subcriterios).

Nota 1: El resultado anterior (Teorema 3.1) se verifica independientemente de cuál sea el método de normalización utilizado, siempre que las expresiones empleadas para calcular el pesar y la prioridad totales utilicen los mismos vectores de prioridades locales ($w_{j,i}(k)$, $w_{j,i}$ y w_j).

Denotando por $q(k)$ el pesar evaluado en términos absolutos cuando se utiliza la normalización ideal se tiene:

Corolario 3.1. En las condiciones del Teorema 3.1, y aplicando el método de normalización ideal se verifica que para toda alternativa A_k , $k = 1, \dots, n$, la suma de su prioridad total, $v(k)$ (dada por la expresión 3.3), y su pesar total, $q(k)$, es igual a la unidad, o lo que es lo mismo, la constante w^* del Teorema 3.1 es igual a 1, esto es,

$$v(k) + q(k) = 1$$

DEMOSTRACIÓN: Basta demostrar que la constante del Teorema 3.1 es igual a la unidad.

En el caso particular de normalización ideal, dicha constante es

$$v^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} v_{j,i}^*, \text{ donde } v_{j,i}^* = \text{Max}\{v_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\}, \text{ y } v_{j,i}(k) = w_{j,i}(k)/w_{j,i}^*.$$

Con este método de normalización la máxima prioridad para cada subcriterio es

$$v_{j,i}^* = 1. \text{ Por tanto, } v^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} v_{j,i}^* = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} = 1, \text{ ya que } w_j \text{ y } w_{j,i} \text{ son las}$$

componentes de los vectores de prioridades locales de la parte superior de la jerarquía, que han sido normalizados según el modo distributivo.

Corolario 3.2.

- (i) La alternativa con mayor prioridad total es la alternativa con menor pesar total.
- (ii) Las ordenaciones alcanzadas maximizando las prioridades y minimizando el pesar coinciden.

Nota 2: Este último corolario refleja que la resolución del problema $P. \alpha$ (selección de la mejor alternativa) y $P. \gamma$ (ordenación del conjunto de alternativas) por los dos procedimientos descritos, AHP utilizando el método de síntesis aditiva y minimización del pesar evaluado en términos absolutos, conducen a los mismos resultados. Además, los valores obtenidos en las condiciones anteriores proporcionan, como solicitan Loomes y Sudgen (1982), el pesar de cada alternativa, justificando una interpretación de las prioridades basada en el pesar.

Nota 3: Al añadir o eliminar una nueva alternativa al problema, los $w_{j,i}$ y w_j no se modifican pero sí que puede que lo hagan los $w_{j,i}(k)$, y por tanto, el valor de $w_{j,i}^* = \text{Max}\{w_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\}$. Caso de producirse un cambio en éstos, el pesar asociado a cada una de las alternativas se modifica y puede llegar a producirse el conocido Problema del Cambio de Rango (Belton y Gear, 1983; Saaty, 1994a). Este hecho permite dar una explicación del problema del cambio de rango en AHP en términos

del pesar. Es inmediato comprobar que con la normalización distributiva se verifica

$$\sum_{k=1}^n r(k) = n \cdot w^* - 1.$$

Nota 4: En diversos trabajos, los autores (Escobar, 1998; Escobar y Moreno-Jiménez, 1999) han demostrado que la expresión del pesar total evaluado en términos absolutos (3.8) coincide con un caso particular de la Programación por Compromiso. Esto ha permitido relacionar varias Técnicas de Decisión Multicriterio que están siendo ampliamente utilizadas en la literatura, como son: el Proceso Analítico Jerárquico, la Programación por Compromiso (Zeleny, 1973, 1982; Yu, 1973, 1985) y la Programación Jerárquica por Compromiso (Escobar y Moreno-Jiménez, 1997).

3.3. Pesar evaluado en términos relativos

Algunos autores consideran que al trabajar con prioridades medidas en escalas de razón es más adecuado utilizar cocientes en lugar de diferencias para evaluar las divergencias o discrepancias entre los valores. Siguiendo esta idea y el modo multiplicativo como procedimiento de síntesis se tiene:

Definición 3.2.

(i) El *pesar local* de la alternativa k en el subcriterio i del criterio j , *medido en términos relativos*, ($k = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, n_j$; $j = 1, \dots, m$) se define como el cociente entre el valor máximo de la prioridad y el valor de la misma:

$$R_{j,i}(k) = w_{j,i}^* / w_{j,i}(k) \quad (3.11)$$

(ii) El *pesar* de la alternativa k con respecto al criterio j , medido en términos relativos, se obtiene multiplicando los términos de los pesares locales de dicha alternativa correspondientes a los subcriterios que cuelgan del criterio j , esto es,

$$R_j(k) = \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)} \right)^{w_{ji}} \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.12)$$

(iii) El *pesar total* de la alternativa k , *medido en términos relativos*, se obtiene utilizando el método de síntesis multiplicativo, esto es,

$$R(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{ji}} = \prod_{j=1}^m (R_j(k))^{w_j} \quad (3.13)$$

Tomando logaritmos en la expresión anterior, se tiene que esta forma de medir el pesar es equivalente a utilizar la expresión del pesar obtenida utilizando el principio de composición jerárquica para los logaritmos de las prioridades de las alternativas:

$$\log R(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_{j,i} w_j (\log w_{j,i}^* - \log w_{j,i}(k)) \quad (3.14)$$

Teorema 3.2.

Si se utiliza la síntesis multiplicativa y el pesar evaluado en términos relativos, se verifica que para toda alternativa A_k , $k = 1, \dots, n$, el producto de su prioridad, $W(k)$ (dada por la expresión 3.2) y su pesar, $R(k)$ (dado por la expresión 3.13) es una constante, esto es,

$$W(k) \cdot R(k) = W^* \quad (3.15)$$

donde

$$W^* = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (w_{j,i}^*)^{w_j w_{ji}} \quad (3.16)$$

es una constante independiente de la alternativa k considerada que representa la *prioridad ideal total*, esto es, la máxima prioridad total que una alternativa (alternativa ideal) puede recibir en el problema concreto que se está resolviendo.

DEMOSTRACIÓN: Al igual que en caso del pesar definido en términos absolutos, para demostrar este resultado se ha considerado una jerarquía con cuatro niveles. El pesar total expresado en términos relativos (expresión 3.13) puede desarrollarse utilizando la definición del pesar local (expresión 3.11):

$$R(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (R_{j,i}(k))^{w_j w_{ji}} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{ji}} = \frac{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (w_{j,i}^*)^{w_j w_{ji}}}{\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (w_{j,i}(k))^{w_j w_{ji}}} = \frac{W^*}{W(k)}.$$

Luego, $R(k) \cdot W(k) = W^*$, constante que no depende de la alternativa considerada. Esta constante se obtiene componiendo de forma multiplicativa los valores óptimos de cada uno de los subcriterios del problema, y representa la prioridad ideal total.

Nota 5: El resultado anterior (Teorema 3.2) es independiente del método de normalización empleado, siempre que las expresiones empleadas para calcular el pesar y la prioridad totales utilicen los mismos vectores de prioridades locales ($w_{j,i}(k)$, $w_{j,i}$ y w_j).

Denotando por $Q(k)$ el pesar evaluado en términos absolutos cuando se utiliza la normalización ideal se tiene:

Corolario 3.3.

En las condiciones del Teorema 3.2, y aplicando el método de normalización ideal se verifica que para toda alternativa A_k , $k = 1, \dots, n$, el producto de su prioridad, $V(k)$ (dada por la expresión 3.4) y su pesar, $Q(k)$ es igual a la unidad, o lo que es lo mismo, la constante W^* del Teorema 3.2 es igual a 1, esto es,

$$V(k) \cdot Q(k) = 1$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la constante del Teorema 3.2 es igual a la unidad. En el caso particular de la normalización ideal, dicha constante es

$$V^* = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (v_{j,i}^*)^{w_j w_{ji}}, \text{ donde } v_{j,i}^* = \text{Max}\{v_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\} = 1 \text{ tal y como se}$$

demostró en el Corolario 3.1.

$$\text{Por tanto, } V^* = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (v_{j,i}^*)^{w_j w_{ji}} = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (1)^{w_j w_{ji}} = 1.$$

Teorema 3.3.

En las condiciones del Teorema 3.2 se verifica que para toda alternativa A_k , $k = 1, \dots, n$, el pesar total expresado en términos relativos obtenido a partir de las prioridades locales normalizadas con el método distributivo, $R(k)$, y el obtenido a partir de las prioridades locales normalizadas con el método ideal, $Q(k)$, coinciden.

DEMOSTRACIÓN: Las expresiones del pesar evaluado en términos relativos partiendo de los vectores de prioridades locales normalizados según los modos distributivo e ideal son respectivamente:

$$R(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{ji}} \quad \text{y} \quad Q(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{v_{j,i}^*}{v_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{ji}}.$$

Por definición, $v_{j,i}(k) = w_{j,i}(k)/w_{j,i}^*$, y $v_{j,i}^* = \text{Max}\{v_{j,i}(k); k = 1, \dots, n\} = 1$. Por tanto,

el cociente que aparece en cada término de la expresión de $Q(k)$, $\frac{v_{j,i}^*}{v_{j,i}(k)} = \frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)}$

que coincide con el cociente de cada término de $R(k)$, luego $R(k) = Q(k)$.

Corolario 3.4. En las condiciones del Teorema 3.2,

(i) $R(k) \cdot V(k) = 1$.

(ii) Las ordenaciones que se alcanzan maximizando las prioridades (W y V), y minimizando el pesar total expresado en términos relativos (R y Q), coinciden.

DEMOSTRACIÓN: inmediato por los Teoremas 3.2, 3.3 y el Corolario 3.3.

En el siguiente cuadro (Tabla 3.1) se presentan para cada uno de los casos estudiados en este trabajo las expresiones de la prioridad total y el pesar total. Los casos considerados son cuatro y dependen del método de síntesis y forma de evaluar el pesar por una parte (la síntesis aditiva se ha asociado al pesar evaluado en términos absolutos, y la síntesis multiplicativa al pesar evaluado en términos relativos) y del método de normalización empleado por otra (normalización distributiva y normalización ideal).

Tabla 3.1. Relaciones entre prioridades y pesar

<i>Síntesis aditiva y pesar evaluado en términos absolutos</i>	<i>Síntesis multiplicativa y pesar evaluado en términos relativos</i>
<i>Normalización distributiva</i> $w(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} w_{j,i}(k)$ $r(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} (w_{j,i}^* - w_{j,i}(k))$ $w(k) + r(k) = w^*$	$W(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (w_{j,i}(k))^{w_j w_{j,i}}$ $R(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{w_{j,i}^*}{w_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{j,i}}$ $W(k) \cdot R(k) = W^*$
<i>Normalización ideal</i> $v(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} v_{j,i}(k)$ $q(k) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} w_j w_{j,i} (v_{j,i}^* - v_{j,i}(k))$ $v(k) + q(k) = 1$	$V(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} (v_{j,i}(k))^{w_j w_{j,i}}$ $Q(k) = \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^{n_j} \left(\frac{v_{j,i}^*}{v_{j,i}(k)} \right)^{w_j w_{j,i}}$ $V(k) \cdot Q(k) = 1$

4. Caso práctico

En este apartado se utilizan las expresiones de pesar tanto en términos absolutos como en términos relativos, para resolver un sencillo caso práctico, en el que se ponen de manifiesto los resultados demostrados en el apartado anterior. Concretamente, el problema ha sido resuelto aplicando en primer lugar el método AHP convencional y calculado el pesar en términos absolutos. En las dos aproximaciones restantes se han obtenido las prioridades aplicando el método AHP en su versión multiplicativa y el pesar se ha evaluado en términos relativos, difiriendo en el método de normalización utilizado. En la segunda aproximación se han utilizado los vectores de prioridades locales normalizados según el modo distributivo, mientras que en la tercera, se ha empleado el método de normalización ideal.

El problema considerado se ha modelizado considerando una jerarquía formada por cuatro niveles: meta, criterios, subcriterios y alternativas. El número de criterios es $m = 2$, y para cada criterio el número de subcriterios es también $n_1 = n_2 = 2$. El número de alternativas es $n = 3$. En la siguiente tabla se muestran las prioridades de los distintos elementos con respecto a los elementos del nivel superior, cuando el método de normalización empleado es el modo distributivo (puede observarse que los elementos de los vectores de prioridades suman 1).

Tabla 4.1. Prioridades locales (normalización distributiva)

	C1 3/5		C2 2/5	
	SC1.1 1/3	SC1.2 2/3	SC2.1 2/3	SC2.2 1/3
A1	0.1	0.2	0.2	0.4
A2	0.3	0.5	0.3	0.4
A3	0.6	0.3	0.5	0.2

Para construir la tabla de pesar en términos absolutos, se buscan los valores máximos de las prioridades de las alternativas con respecto a cada uno de los subcriterios en la tabla de prioridades locales (Tabla 4.1). Estos valores máximos son 0.6, 0.5, 0.5 y 0.4 respectivamente para cada uno de los cuatro subcriterios. La tabla de pesar queda:

Tabla 4.2. Pesar local evaluado en términos absolutos (normalización distributiva)

	C1 3/5		C2 2/5	
	SC1,1 1/3	SC1,2 2/3	SC2,1 2/3	SC2,2 1/3
A1	0.5	0.3	0.3	0
A2	0.3	0	0.2	0
A3	0	0.2	0	0.2

Aplicando el método AHP convencional, se tiene que la prioridad total y el pesar total medido en términos absolutos de las alternativas son:

Tabla 4.3. Prioridades y pesar totales (síntesis aditiva y normalización distributiva)

	<i>Prioridad</i>	<i>Pesar</i>
A1	31/150	45/150
A2	59/150	17/150
A3	60/150	16/150

La ordenación de las alternativas utilizando el método AHP convencional es, por tanto, $A3 > A2 > A1$. Se alcanza la misma ordenación al ordenar el pesar de menor a mayor. Se observa que la suma de la prioridad y el pesar totales de cada alternativa es constante e igual a $76/150$, valor que también se obtiene de componer de forma jerárquica los valores máximos de las prioridades de cada subcriterio, es decir el valor de w^* dado en la expresión 3.10.

La segunda aproximación en la resolución del problema planteado ha consistido en utilizar el método de síntesis multiplicativo y obtener el pesar evaluado en términos relativos, a los vectores de prioridades normalizados según el modo distributivo. En primer lugar se ha evaluado el pesar local en términos relativos:

Tabla 4.4. Pesar local evaluado en términos relativos (normalización distributiva)

	C1 3/5		C2 2/5	
	SC1,1 1/3	SC1,2 2/3	SC2,1 2/3	SC2,2 1/3
A1	6	5/2	5/2	1
A2	2	1	5/3	1
A3	1	5/3	1	2

Las prioridades totales se obtienen aplicando el método de síntesis multiplicativa a las prioridades locales dadas en la Tabla 4.1. Asimismo, el pesar total se obtiene aplicando la síntesis multiplicativa a los términos que representan el pesar local dado en la tabla 4.4.

**Tabla 4.5. Prioridades y pesar totales
(síntesis multiplicativa y normalización distributiva)**

	<i>Prioridad</i>	<i>Pesar</i>
A1	0,19096832	2,63586758
A2	0,38240121	1,31633269
A3	0,37411755	1,34547872

La ordenación que se alcanza al ordenar las prioridades de mayor a menor o el pesar de menor a mayor es: $A2 > A3 > A1$, que difiere de la alcanzada al aplicar el método convencional de AHP. Se comprueba que para cada alternativa, el producto de la prioridad total y el pesar total expresado en términos relativos es igual a una cantidad constante: 0,50336721. Esta constante es igual a la composición multiplicativa de los valores máximos de las prioridades locales del último nivel de la jerarquía (expresión 3.16).

Una tercera aproximación en la resolución de este ejemplo ha sido la utilización del modo ideal como método de normalización. Esta forma de normalización ha sido utilizada únicamente en el último nivel de la jerarquía, mientras que en la parte superior de la misma, se mantiene como método de normalización el modo distributivo. Para el cálculo de las prioridades totales se ha vuelto a utilizar el método de síntesis multiplicativa y el pesar se ha evaluado en términos relativos.

En las siguientes tablas se muestran las prioridades locales al utilizar el método de normalización ideal (Tabla 4.6) y el pesar evaluado en términos relativos a partir de estas nuevas prioridades (Tabla 4.7).

**Tabla 4.6. Prioridades locales
(normalización ideal)**

	C1 3/5		C2 2/5	
	SC1,1 1/3	SC1,2 2/3	SC2,1 2/3	SC2,2 1/3
A1	1/6	2/5	2/5	1
A2	1/2	1	3/5	1
A3	1	3/5	1	1/2

**Tabla 4.7. Pesar local evaluado en
términos relativos (normalización ideal)**

	C1 3/5		C2 2/5	
	SC1,1 1/3	SC1,2 2/3	SC2,1 2/3	SC2,2 1/3
A1	6	5/2	5/2	1
A2	2	1	5/3	1
A3	1	5/3	1	2

Para obtener la prioridad total y el pesar total asociado a cada alternativa se ha utilizado como método de composición el método de Síntesis de Razones, o método multiplicativo.

**Tabla 4.8. Prioridades y pesar totales
(síntesis multiplicativa y normalización ideal)**

	<i>Prioridad</i>	<i>Pesar</i>
A1	0,37938173	2,63586758
A2	0,75968637	1,31633269
A3	0,74322989	1,34547872

La ordenación que se alcanza es: $A2 > A3 > A1$, que coincide con la obtenida en la segunda aproximación del problema que sólo difiere de esta última en el método de normalización utilizado. Además, para cada alternativa, el producto de la prioridad total y el pesar es igual a la unidad, y se observa que los valores del pesar total para los dos métodos de normalización considerados, distributivo (última columna de la Tabla 4.5) e ideal (última columna de la Tabla 4.8) coinciden, tal y como se ha demostrado en el Teorema 3.3.

Para concluir esta sección mencionar que en el trabajo se ha incidido exclusivamente en la relación existente entre el pesar y las prioridades, tanto para síntesis aditiva como multiplicativa. Las diferentes ordenaciones derivadas por ambos métodos (son muy próximas) es una cuestión que se aleja del objetivo del estudio y que ha sido ampliamente tratada en la literatura (véase para referencias Vargas, 1997).

5. Conclusiones y futuras líneas de investigación

En este trabajo se ha encontrado la relación entre el pesar, evaluado tanto en términos absolutos como en términos relativos, y las prioridades obtenidas en AHP para dos procedimientos de normalización (modo distributivo e ideal) y dos de síntesis (aditiva y multiplicativa). Se ha probado que esta relación es independiente del método de normalización, y la forma que adopta depende del método de síntesis y la forma en que el pesar es evaluado. Si la evaluación del pesar se efectúa en términos absolutos y se emplea la síntesis aditiva la relación es de tipo aditivo; y si el pesar se evalúa en términos relativos y se utiliza la síntesis multiplicativa la relación es de tipo multiplicativo.

En la relación demostrada entre la prioridad asociada a una alternativa y su pesar, se obtiene una constante que no depende de la alternativa considerada, y que representa la prioridad ideal, o máxima prioridad que puede recibir una alternativa en el problema concreto que se está resolviendo.

La relación encontrada proporciona una interpretación de las prioridades obtenidas con AHP en términos de pesar, que ha permitido a su vez atender a la solicitud de Loomes y Sudgen (1982) de considerar las valoraciones en términos de pesar para la Toma de Decisiones en general. Más aun, ha permitido dar una interpretación del problema del cambio de rango que se produce en AHP.

Por último señalar que la conexión existente entre prioridades y pesar ha permitido relacionar varios enfoques multicriterio ampliamente utilizados en la literatura, como el Proceso Analítico Jerárquico, la Programación por Compromiso y la Programación Jerárquica por Compromiso, línea en la que actualmente están investigando los autores.

Bibliografía

- AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1995): Normalización y Cambio de Rango en el Proceso Analítico Jerárquico (AHP), *ACTES DES IV^{ÈMES} JOURNÉES ZARAGOZA-PAU DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES*, 37-46, Publications de l'Université de Pau.
- BARZILAI, J.; LOOTSMA, F.A. (1997): Power Relations and Group Aggregation in the Multiplicative AHP and SMART, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 6, 155-165.
- BELL, D. (1982): Regret in Decision Making under Uncertainty, *Operations Research*, 30, 5, 961-981.
- BELL, D. (1985): Dissapointment in Decision Making under Uncertainty, *Operations Research*, 33,1,1-27.
- BELTON, V.; GEAR, A.E. (1983): On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies, *Omega*, 11 (3), 228-230.
- BUCHANAN, J.T.; HENIG, E.J.; HENIG, M.I. (1998): Objectivity and Subjectivity in the Decision Making Process, *Annals of Operations Research*, 80, 333-345.
- ESCOBAR, M.T. (1998): *La Incertidumbre en las Técnicas de Decisión Multicriterio Jerárquicas. El Problema del Cambio de Rango*. Tesis Doctoral.
- ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1994): Técnicas Multicriterio Discretas en la Planificación de Cuencas Fluviales, *Estudios de Economía Aplicada*, 1, 7-29.
- ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1997): The Hierarchical Compromise Programming, *TOP*, 5 (2), 253-281.
- ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1998): Problemas de Gran Tamaño en el Proceso Analítico Jerárquico, *Estudios de Economía Aplicada*, 8, 25-40.

- ESCOBAR, M.T.; MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1999): El Proceso Analítico Jerárquico y la Programación Jerárquica por Compromiso, *Documento de Trabajo*.
- FISHBURN, P. (1982): Nontransitive Measurable Utility, *Journal of Mathematical Psychology*, 26, 31-67.
- FISHBURN, P. (1983): Transitive Measurable Utility, *Journal of Economic Theory*, 31, 293-317.
- HOMBURG, C. (1998): Hierarchical Multiobjective Decision Making, *European Journal of Operational Research*, 105, 155-161.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. (1979): Prospect Theory: An analysis of decisions under Risk, *Econometrica*, 4, 263-291.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. (1984): Choices, Values and Frames, *American Psychologist*, 39, 341-350.
- LOOMES, G.; SUDGEN, R. (1982): Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty, *Economic Journal*, 92, 805-824.
- LOOMES, G.; SUDGEN, R. (1983): Regret Theory and Measurable Utility, *Economic Letters*, 12, 19-21.
- LOOMES, G.; SUDGEN, R. (1986): Disappointment and dynamic consistency in choice under uncertainty, *Review of Economic Studies*, 53, 271-282.
- LOOMES, G.; SUDGEN, R. (1987): Testing for regret and disappointment in choice under uncertainty, *Economic Journal*, 97 (S), 118-129.
- LOOTSMA, F.A. (1990): A Multiplicative Variant of the Analytic Hierarchy Process, Delft University of Technology, *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics*, 90-45.
- MACHINA, M.J. (1982): 'Expected Utility' Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, 50, 2, 277-323.
- MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1996): Metodología Multicriterio en el Plan Nacional de Regadíos (Documento Privado).
- MORENO-JIMÉNEZ, J.M. (1997): Priorización y Toma de Decisiones Ambientales, *Actas del I Encuentro Iberoamericano de Evaluación y Decisión Multicriterio*, Santiago de Chile, 113-145.
- MORENO-JIMÉNEZ, J.M.; AGUARÓN, J.; ESCOBAR, M.T.; TURÓN, A. (1999): The Multicriteria Procedural Rationality on Sisdema, *European Journal of Operational Research*, 119 (2), 388-403.
- PRELEC, D. (1998): The Probability Weighting Function, *Econometrica*, 60, 497-528.
- QUIGGIN, J. (1990): Stochastic Dominance in Regret Theory, *Review of Economic Studies*, 57, 503-511.

- SAATY, T.L. (1977): A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology*, 15 (3), 234-281.
- SAATY, T.L. (1980): *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. Mc Graw-Hill, New York. (2ª impresión 1990, RSW Pub. Pittsburgh)
- SAATY, T.L. (1994a): How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process, *Interfaces*, 24 (6), 19-43.
- SAATY, T.L. (1994b): Observations on Multiplicative Composition in the Analytic Hierarchy Process, *Proceedings of the 3rd International Symposium on the Analytic Hierarchy Process*, 169-176.
- SAATY, T.L.; VARGAS, L.G. (1993): Experiments on Rank Preservation and Reversal in Relative Measurement, *Mathematical and Computer Modelling*, 17 (4/5), 13-18.
- SCHONER, B.; WEDLEY, C.W. (1989): Ambiguous Criteria Weights in AHP: Consequences and Solutions, *Decision Sciences*, 20, 462-475.
- SCHONER, B.; WEDLEY, C.W.; CHOO, E.U. (1993): A Unified Approach to AHP with Linking Pins, *European Journal of Operational Research*, 64, 384-392.
- STILLWELL, W.G.; VON WINTERFELDT, D.; JOHN, R.S. (1987): Comparing Hierarchical and Nonhierarchical Weighting Methods for Eliciting Multiattribute Value Models, *Management Science*, 33 (4), 442-450.
- TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. (1992): Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, *J.Risk Uncertainty*, 5, 297-323.
- VARGAS, L.G. (1997): Comments on Barzilai and Lootsma. Why the Multiplicative AHP is Invalid: A Practical Counterexample, *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, 6, 169-170.
- YU, P.L. (1973): A Class of Solution for Group Decision Problems, *Management Science*, 19, 936-946.
- YU, P.L. (1985): *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*. Plenum Press, New York.
- ZELENY, M. (1973): Compromise Programming, en Cochrane J.L. y Zeleny M. (eds.): *Multiple criteria decision making*, University of South Carolina Press, Columbia, 262-301.
- ZELENY, M. (1982): *Multiple Criteria Decision Making*, McGraw-Hill, New York.