

Estudios de Economía Aplicada
Nº 15, 2000. Págs. 75-102

Predicción de variables económicas: Ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô

GÓMEZ GARCÍA, J.
BUENDÍA MOYA, F.
PALACIOS SANCHEZ, M.A.
Universidad de Murcia

RESUMEN

En este trabajo se utilizan los procesos log-normales multidimensionales con factores exógenos, entendidos como procesos de **Itô**, como metodología para modelizar el comportamiento temporal de la variable bidimensional (Gasto Público Nacional, Gasto Privado Nacional).

Se estudian la existencia y unicidad de soluciones y se resuelve la E.D.E. que gobierna este tipo de procesos, obteniendo la expresión analítica de los mismos y todas sus propiedades estadísticas, en particular su función de densidad de transición y los momentos de las distribuciones p -dimensionales. Se aplican los resultados obtenidos para estudiar las características de la variable considerada y efectuar predicciones sobre la misma.

Palabras clave: Ecuación diferencial estocástica, procesos de Itô, difusión lognormal multidimensional.

ABSTRACT

In this article the problem of modelling the inter-temporal behaviour of a bi-dimensional variable (Spanish Public and Private Spending in this case) is faced by considering it as a log-normal multidimensional process with exogenous factors, taken as an Itô process. The stochastic differential equation that governs it is solved and the existence and uniqueness of its solutions is studied. Particular emphasis is put on the analytic expression of the transition density function and the moments of its p -dimensional distributions. The results, so obtained are applied to the study of the characteristic of the variable being considered and of its prediction function.

Keywords: Stochastic differential equation; Itô processes; log-normal multidimensional diffusion.

Artículo recibido en julio de 1999. Revisado en diciembre de 1999.

1. Introducción

Las aplicaciones de la difusión estocástica log-normal han sido hasta hace poco mucho más restringidas que las de la distribución log-normal, que ha sido utilizada como modelo probabilístico desde hace bastante tiempo. En general, los procesos de difusión son importantes por sus aplicaciones y en las últimas décadas la modelización estocástica ha alcanzado gran relieve. En particular, el proceso log-normal ha sido utilizado para modelizar variables, económicas sobre todo, en cuya evolución se pueda formular una hipótesis de cambio proporcional al estado del sistema. Es el prototipo de procesos para los movimientos de precios especulativos en donde la varianza del logaritmo del precio crece proporcionalmente al tiempo. Tintner y Sengupta, en su *Stochastic Economic* (1972) consideran estos procesos como gobernadores de gran número de fenómenos en los que se trata de estudiar el comportamiento de una variable económica. Así, los trabajos de Cox y Ross(1976) y Merton(1976), representaron importantes contribuciones en las aplicaciones de estos procesos a campos como marketing, seguros, control de precios, cartera de valores, etc.

Entre otros trabajos en los que se estudian los procesos log-normales o se aplican a problemas de desarrollo económico o gasto público destacamos los de Tintner, G y Bello(1968); Tintner, G, and Gómez, G.L.(1979); Tintner, G and Narayanan, R.(1966); Tintner, G and Patel, R.C.(1966); Tintner, G and Sengupta(1972); Tintner, G and Thomas(1963); Gómez, L and Tintner, G.(1981); Gutiérrez, R.(1981); Gutiérrez, R., Hermoso, A. and Molina, M.(1986); Hermoso Carazo, M.A.(1983); Molina Fernández, M.(1983); Gutiérrez, R., Angulo, J.M., González, A. and Pérez, R.(1991); Palacios Sanchez, M.A.(1995).

En estos trabajos, que tienen como objetivos, unos la aplicación a la modelización de ciertas variables económicas y otros la inferencia sobre el coeficiente de tendencia del proceso, se parte para definir el proceso del carácter markoviano o de la propiedad de difusión y de la función de densidad de transición, o bien se define por sus dos primeros momentos infinitesimales y se plantean las ecuaciones de Kolmogorov asociadas al proceso para dar la función de densidad de transición como solución común de las mismas. Pero en realidad no se resuelven las ecuaciones de difusión ni se analiza en cada caso si la función de densidad de transición es solución de alguna de las ecuaciones de difusión, cuestión necesaria puesto que las ecuaciones de difusión son válidas bajo ciertas hipótesis sobre la función de densidad de transición y esta es desconocida. Es precisamente lo que pretenden hallar.

En los trabajos anteriores que presentan los procesos log-normales como solución de ciertas ecuaciones diferenciales estocásticas (E.D.E) sólo se estudia la existencia y unicidad de las soluciones, pero no se resuelven esas ecuaciones ni se obtiene, por tanto, las expresiones analíticas de cada uno de los procesos ni se hace el estudio de estos a través de las soluciones de las E.D.E. planteadas.

Nosotros, en este trabajo, estudiamos los procesos log-normales multidimensionales con factores exógenos, exclusivamente desde la perspectiva de las soluciones de una cierta E.D.E, o sea, como procesos de **ITÔ**. Planteamos, estudiamos la existencia y unicidad de soluciones y resolvemos la E.D.E. que gobierna este tipo de procesos, obteniendo la expresión analítica de los mismos y hallando a partir del estudio de esta solución todas las propiedades estadísticas de estos procesos, en particular su función de densidad de transición y los momentos de las distribuciones p-dimensionales o momentos del proceso propiamente dichos, y no sólo los de las distribuciones unidimensionales, únicos momentos obtenidos hasta ahora. Por tanto, no utilizamos las ecuaciones de Kolmogorov para el cálculo de la densidad de transición, sino que hallamos esta a partir de la expresión analítica de los procesos, y analizamos si la densidad de transición es solución, y solución única, de alguna de las ecuaciones de Kolmogorov. Nuestro procedimiento no es sólo una alternativa al empleo de las ecuaciones de difusión, que en general se han resuelto explícitamente sólo para unos pocos casos sencillos (ver, p.e. Bouleau(1988 pp.325); Todorovic(1992 pp.226); Arnold(1974 pp.160); Bhattacharya-Waymire(1990 pp.390-393) ó Sobczyk(1991 pp.41-46)) para el cálculo de las densidades de transición, sino que representa una metodología que se revela potente para desarrollar las propiedades estadísticas de estos procesos, obtenidos como solución de una determinada E.D.E.

Un tratamiento análogo para el caso de los procesos log-normales unidimensionales con factores exógenos se puede ver en Buendía Moya y Gómez García (1995), para una generalización de los procesos log-normales unidimensionales, una generalización del proceso de Uhlenbeck-Ornstein y para las potencias de los procesos lognormales, en Buendía Moya y Gómez García (1997), y para los procesos log-normales multidimensionales homogéneos en Buendía Moya y Gómez García (1998).

La importancia de introducir factores que sólo dependen del tiempo en el coeficiente de tendencia o en el vector de coeficientes de tendencia de los procesos log-normales es grande. Desde el punto de vista matemático tiene interés porque las E.D.E que aparecen ya no son tiempo independientes, claro está, y los procesos solución no son ya homogéneos, por lo que se precisa una discusión más detallada acerca de sus ecuaciones de Kolmogorov. Por otra parte, los procesos que se obtienen al reducir las E.D.E mediante un cambio de variable no son ahora movimientos Brownianos. Pero las soluciones, tanto en el caso vectorial como en el escalar, mantienen el carácter log-normal (ver Buendía Moya, F.(1998)).

Desde el punto de vista de las aplicaciones a la modelización de variables económicas, por ejemplo, el introducir factores exógenos puede mejorar la capacidad explicativa y la fiabilidad predictiva del modelo (ver Tintner and Gómez(1979) o Palacios Sánchez(1995)).

Aplicaremos este modelo para el estudio de la evolución y comportamiento del vector aleatorio (consumo público, consumo privado) en España durante el periodo. 1984-1997, como un proceso log-normal bidimensional. Introduciremos los factores exógenos *Exportaciones* y *Producto interior bruto per cápita* (P.I.B) de forma lineal respecto de los parámetros en el vector de coeficientes de tendencia del proceso (vector *drift*). Después de estimar los parámetros del modelo comparamos los valores reales con los estimados a través de los vectores de medias, de medianas y de modas del proceso y analizamos en cada caso la bondad de las estimaciones y la fiabilidad de las predicciones del modelo. Estudiamos, además, la correlación entre las variables de las distribuciones unidimensionales y bidimensionales del proceso estimado.

Para otras formas funcionales de introducir los factores exógenos en el vector drift del proceso, manteniendo el carácter log-normal de las soluciones de la E.D.E, ver Buendía Moya, F. (1998).

2. El proceso log-normal. Existencia y unicidad de soluciones

2.1. Construcción de la E.D.E. Existencia y unicidad de soluciones

Consideramos la función

$$m: [0, \infty) \times (\mathbf{R}^+)^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

$$m(t, x) = \left[\left(m_1^0 + \sum_{j=1}^k m_1^j G_j(t) \right) x_1, \left(m_2^0 + \sum_{j=1}^k m_2^j G_j(t) \right) x_2, \dots, \left(m_n^0 + \sum_{j=1}^k m_n^j G_j(t) \right) x_n \right]^T \quad (2.1.1)$$

de componentes

$$m_i(t, x) = \left(m_i^0 + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right) x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.2)$$

donde $m_i^j \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, k$), y las funciones $G_1(t), \dots, G_k(t)$, llamadas *factores exógenos*, pues no dependen del estado del proceso, están definidas sobre $[0, \infty)$ y son continuas y acotadas y con valores en \mathbf{R} .

Asimismo, consideremos la función matricial

$$\begin{aligned} \beta &: [0, \infty) \times (\mathbf{R}^+)^n \rightarrow M_{n \times n}(\mathbf{R}) \\ \beta &: (t, \mathbf{x}) = (\beta_{ij} x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

con $\mathbf{B} = (\beta_{ij})_{ij=1,2,\dots,n}$ una matriz dada de elementos $\beta_{ij} \in \mathbf{R}$, definida positiva y simétrica.

Como $\mathbf{B} = (\beta_{ij})_{ij=1,2,\dots,n}$ es fijada de antemano, buscamos una matriz $\mathbf{b}^*(t, \mathbf{x})$ tal que

$$\beta^*(t, \mathbf{x})[\beta^*(t, \mathbf{x})]^t = \beta(t, \mathbf{x}) = (\beta_{ij} x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n} \tag{2.1.4}$$

Entonces planteamos la E.D.E.

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(t) &= \mathbf{m}(t, \mathbf{X}(t))dt + \beta^*(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \in (\mathbf{R}^+)^n \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

donde $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ es un proceso con valores en $(\mathbf{R}^+)^n$ y, naturalmente, $\mathbf{W}(t)$ es un proceso Wiener o de movimiento Browniano n-dimensional *standard*.

Esta ecuación diferencial estocástica tiene sentido, pues las funciones $\mathbf{m}(t, \mathbf{x})$ y $\mathbf{b}^*(t, \mathbf{x})$ cumplen $\forall T \in [0, \infty)$ y $\forall x \in (\mathbf{R}^+)^n$:

$$(1) \quad \int_0^T \|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})\| dt < \infty$$

$$(2) \quad \int_0^T \|\beta^*(t, \mathbf{x})\|^2 dt < \infty$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{m}(t, \mathbf{x})\| &= \left\{ \sum_{i=1}^n [m_i(t, \mathbf{x})]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[m_i^0 + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right]^2 x_i^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| m_i^0 + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right| x_i \leq (k+1) \sum_{i=1}^n M_i x_i < \infty \end{aligned}$$

con $M_i = \max\{m_i^0, \max_{t \in [0, T]} m_i^j G_j(t)\}; j = 1, 2, \dots, k\}$, que existen por ser cada $G_j(t)$ continua en $[0, T]$. De ahí se obtiene (1).

$$\|\beta^*(t, \mathbf{x})\|^2 = \text{traza}\{\beta^*(t, \mathbf{x})[\beta^*(t, \mathbf{x})]^t\} = \text{traza}\beta(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 < \infty$$

de donde resulta (2).

Para establecer la existencia y unicidad del proceso solución de la E.D.E. (2.1.5) podemos, naturalmente, comprobar que las funciones $\mathbf{m}(t, \mathbf{x})$ y $\beta^*(t, \mathbf{x})$ satisfacen las condiciones del teorema de existencia, unicidad y carácter de difusión de las soluciones (ver, por ejemplo, Gihman and Skorohod (1972 pp. 40-43), ó Arnold (1974 pp. 153). Sin embargo, nosotros obtendremos esa conclusión aplicando el teorema de *cambio de estado* (ver Bhattacharya-Waymire (1990 pp.382) ó Ikeda-Watanabe (1989 pp.197) al proceso $\mathbf{Y}(t) = \log \mathbf{X}(t)$ (logaritmo Neperiano) que satisface una E.D.E más sencilla, que nosotros vamos a establecer en lo que sigue, y para la que es inmediata la comprobación de la existencia y unicidad de la solución $\mathbf{Y}(t)$ y el carácter de difusión de esta.

2.2. Expresión del proceso log-normal vectorial con factores exógenos

Si definimos la variable

$$\mathbf{Y}(t) = \log \mathbf{X}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))^t = (\log X_1(t), \log X_2(t), \dots, \log X_n(t))^t$$

y aplicamos el *lema* de **Itô** para procesos vectoriales obtenemos (ver Buendía Moya, F. (1998)), que el proceso $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$ verifica la E.D.E.

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y} &= \left(\mathbf{m}(t) - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) dt + \mathbf{B}^* d\mathbf{W} \\ \mathbf{Y}(0) &= \log \mathbf{X}_0 \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(t) &= \left(m_1^0 + \sum_{j=1}^k m_1^j G_j(t), m_2^0 + \sum_{j=1}^k m_2^j G_j(t), \dots, m_n^0 + \sum_{j=1}^k m_n^j G_j(t) \right)^t \\ &= (m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))^t = \mathbf{m}^0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j G_j(t) \end{aligned}$$

$$\left(\text{Si ponemos } \mathbf{m}^0 = \begin{pmatrix} m_1^0 \\ m_2^0 \\ \vdots \\ m_n^0 \end{pmatrix}, \mathbf{m}^1 = \begin{pmatrix} m_1^1 \\ m_2^1 \\ \vdots \\ m_n^1 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{m}^k = \begin{pmatrix} m_1^k \\ m_2^k \\ \vdots \\ m_n^k \end{pmatrix} \right)$$

$diag \mathbf{B} = (\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{nn})^t$ y \mathbf{B}^* verificando $\mathbf{B}^*(\mathbf{B}^*)^t = \mathbf{B}$.

Si en (2.2.1) ponemos

$$\mathbf{m}(t) - \frac{1}{2} diag \mathbf{B} = \mu(t) \tag{2.2.2}$$

podremos escribir esa ecuación de la forma

$$\begin{aligned} d\mathbf{Y}(t) &= \mu(t)dt + \mathbf{B}^* d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{Y}(0) &= \log \mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}_0 \in R^n \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

para la que es sencillo obtener (ver, p.e., Buendía Moya, F. (1998)) que tiene una única solución $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, que es un proceso de difusión con vector de coeficientes de tendencia $\mathbf{m}(t)$ y matriz de difusión $\mathbf{B}^*(\mathbf{B}^*)^t = \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$, y que este proceso solución es

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t) &= \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} diag \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k m^j (G_j)_0^t + \sigma \mathbf{W}(t) \\ (\sigma = \mathbf{B}^* &= (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

donde

$$(G_j)_0^t = \int_0^t G_j(s) ds$$

Se sigue de lo anterior que el proceso $\{X(t) = e^{Y(t)}, t \geq 0\}$ es solución de la E.D.E. (2.1.5), que es solución única y que es un proceso de difusión con vector de coeficientes tendencia (vector *drift*) $m(t, x)$ dado por (2.1.1), y matriz de difusión

$$\beta^*(t, x)[\beta^*(t, x)]^t = (t, x) = (\beta_{ij} x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

Este proceso es el *proceso logarítmico-normal n-dimensional con k factores exógenos*, denotado $LN(n, k, m)$, donde m hace referencia al vector paramétrico m_i^j ($j = 0, 1, \dots, k; i = 1, 2, \dots, n$), $(k + 1) \times n$ dimensional.

2.3. Características estadísticas del proceso

El proceso $\{Y(t), t \geq 0\}$ es, por tanto, un proceso Gaussiano vectorial, no de movimiento Browniano (el vector de coeficientes de tendencia ó vector *drift* no es constante), con funciones media y covarianza

$$E[Y(t)] = Y_0 + \left(m^0 - \frac{1}{2} \text{diag} B \right) t + \sum_{j=1}^k m^j (G_j)_0^t$$

$$\text{Cov}[Y(t), Y(s)] = \text{Cov}[\sigma W(t), \sigma W(s)] = \sigma [\min(t, s) I] \sigma^t = \min(t, s) B \quad (2.3.1)$$

de donde, en particular, la matriz de varianzas-covarianzas de la variable n -dimensional general $Y(t)$, será

$$\text{Cov}[Y(t)] = \text{Cov}[Y(t), Y(t)] = tB \quad (2.3.2)$$

de modo que $Y(t)$ sigue una distribución

$$N_n \left(Y_0 + \left(m^0 - \frac{1}{2} \text{diag} B \right) t + \sum_{j=1}^k m^j (G_j)_0^t, tB \right) \quad (2.3.3)$$

La función generatriz de momentos de las distribuciones p -dimensionales del proceso $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$ es para toda colección finita (t_1, t_2, \dots, t_p) de números reales positivos, (ver Arnold (1974 pp. 25))

$$E \left\{ \exp \left[\sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{Y}(t_i) \right] \right\} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \cdot \left[\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}_0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t_i + \sum_{r=1}^k \mathbf{m}^r (G_r)_0^{t_i} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_i \cdot [\min(t_i, t_j) \mathbf{B}] \mathbf{u}_j' \right\}$$

en donde $\mathbf{u}_i = (u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^n) \in R^n, i = 1, 2, \dots, p$. (2.3.4)

En particular, para las distribuciones bidimensionales y unidimensionales del proceso tenemos respectivamente

$$F_{Y(t), Y(s)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = E \{ \exp[\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Y}(t) + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Y}(s)] \}$$

$$= \exp \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{u}_1 \cdot \left[\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t \right] + \frac{1}{2} \mathbf{u}_1 \cdot (t \mathbf{B}) \mathbf{u}_1' \\ & + \mathbf{u}_2 \cdot \left[\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) s + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^s \right] + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2 \cdot (s \mathbf{B}) \mathbf{u}_2' \\ & + \mathbf{u}_1 \cdot [\min(t, s) \mathbf{B}] \mathbf{u}_2' \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

$$F_{Y(t)}(\mathbf{u}) = E \{ \exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{Y}(t)] \} = \exp \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{u} \cdot \left[\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t \right] \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot (t \mathbf{B}) \mathbf{u}' \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

Entonces para el proceso $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ tenemos, de (2.2.4)

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \exp \left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t + \mathbf{W}(t) \right] \quad (2.3.7)$$

$t \geq 0$

y $\mathbf{X}(t)$ está *log-normalmente* distribuida. En forma de componentes es

$$X_i(t) = X_{0i} \exp \left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{ii} \right) t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t + \sum_{r=1}^n \mathbf{s}_{ir} W_r(t) \right] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$t \geq 0$ (2.3.8)

Los momentos de las distribuciones p -dimensionales conjuntas del proceso $LN(n, k, \mathbf{m}) \{ \mathbf{X}(t), t \geq 0 \}$ los hallaremos a partir de (2.3.4) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & m_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p} [\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \dots, \mathbf{X}(t_p)] = \\ & E \left\{ [X_1(t_1)]^{u_1^1} \cdot [X_2(t_1)]^{u_1^2} \dots [X_n(t_1)]^{u_1^n} \dots [X_1(t_p)]^{u_p^1} \cdot [X_2(t_p)]^{u_p^2} \dots [X_n(t_p)]^{u_p^n} \right\} \\ & = E \left\{ \exp \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n u_i^j Y_j(t_i) \right] \right\} = E \left\{ \exp \left[\sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{Y}(t_i) \right] \right\} \\ & = \exp \left\{ \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \cdot \left[\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t_i + \sum_{r=1}^k \mathbf{m}^r (G_r)_0^{t_i} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \mathbf{u}_i \cdot [\min(t_i, t_j) \mathbf{B}] \cdot \mathbf{u}_j^t \right\} \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

Nos interesan especialmente los siguientes momentos de las distribuciones bidimensionales y unidimensionales del proceso:

1). Para $p = 2$, $\mathbf{u}_1 = \left(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0 \right)$ y $\mathbf{u}_2 = \left(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0 \right)$

$$\begin{aligned}
 E[X_i(t)X_j(s)] &= \exp \left\{ \begin{aligned} &Y_{0i} + \left(m_i^0 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{ii} \right) t + \sum_{r=1}^k m_i^r (G_r)_0^t + \frac{1}{2} \mathbf{b}_{ii} t + Y_{0j} \\ &+ \left(m_j^0 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{jj} \right) s + \sum_{r=1}^k m_j^r (G_r)_0^s + \frac{1}{2} \mathbf{b}_{jj} s + \mathbf{b}_{ij} \min(t, s) \end{aligned} \right\} \\
 &= X_{0i} X_{0j} \exp \left\{ m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^k [m_i^r (G_r)_0^t + m_j^r (G_r)_0^s] + \mathbf{b}_{ij} \min(t, s) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

2) Los momentos marginales cualesquiera de las distribuciones unidimensionales, o sea de la variable $\mathbf{X}(t)$ general del proceso.

Para $p = 1, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n)$ y $t_1 = t$

$$\begin{aligned}
 m_{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n}[\mathbf{X}(t)] &= E\{[X_1(t)]^{\mathbf{n}_1} \cdot [X_2(t)]^{\mathbf{n}_2} \dots [X_n(t)]^{\mathbf{n}_n}\} = E\{\exp[\mathbf{u} \cdot \mathbf{Y}(t)]\} \\
 &= \exp \left\{ \mathbf{u} \cdot \left[\log \mathbf{X}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t \right] + \frac{1}{2} \mathbf{u} (\mathbf{B} t) \mathbf{u}^t \right\} \\
 &= X_{01}^{\mathbf{n}_1} \cdot X_{02}^{\mathbf{n}_2} \dots X_{0n}^{\mathbf{n}_n} \exp \left\{ \mathbf{u} \cdot \left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t \right] + \frac{1}{2} t \mathbf{u} \mathbf{B} \mathbf{u}^t \right\}
 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

3). Los casos particulares del anterior

3.1. Para $p = 1$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (0, 0, \dots, 2, 0, \dots, 0)$

$$E\{[X_i(t)]^2\} = (X_{0i})^2 \exp \left[2m_i^0 t + 2 \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t + \mathbf{b}_{ii} t \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3.12}$$

3.2. Para $p = 1$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

$$E[X_i(t)] = X_{0i} \exp \left(m_i^0 t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3.13}$$

(vector de medias)

De las expresiones anteriores deducimos para la matriz función covarianza del proceso

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(s)] &= (\mathbf{Cov}[X_i(t), X_j(s)])_{i,j=1,2,\dots,n} \\
 \mathbf{Cov}[X_i(t), X_j(s)] &= E[X_i(t)X_j(s)] - E[X_i(t)]E[X_j(s)] \\
 &= X_{oi}X_{oj} \exp\left\{m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^k [m_i^r (G_r)_o^t + m_j^r (G_r)_o^s] + \mathbf{b}_{ij} \min(t, s)\right\} \\
 &\quad - X_{oi} \exp\left(m_i^0 t + \sum_{r=1}^k m_i^r (G_r)_o^t\right) X_{oj} \exp\left(m_j^0 s + \sum_{r=1}^k m_j^r (G_r)_o^s\right) \\
 &= X_{oi}X_{oj} \exp\left\{m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^k [m_i^r (G_r)_o^t + m_j^r (G_r)_o^s]\right\} \{ \exp[\mathbf{b}_{ij} \min(t, s)] - 1 \} \\
 i, j &= 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

y para la matriz de varianzas-covarianzas de la variable n -dimensional $\mathbf{X}(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cov}[X_i(t), X_j(t)] &= E[X_i(t) \cdot X_j(t)] - E[X_i(t)]E[X_j(t)] \\
 &= X_{oi}X_{oj} \exp\left[(m_i^0 + m_j^0)t + \sum_{r=1}^k (m_i^r + m_j^r)(G_r)_o^t \right] \times [\exp(\mathbf{b}_{ij}t) - 1] \quad i, j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

En particular, para las varianzas marginales de $X(t)$

$$\mathbf{Var}[X_i(t)] = X_{oi}^2 \exp\left[2m_i^0 t + 2 \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_o^t \right] \times [\exp(\mathbf{b}_{ii}t) - 1] \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.3.16}$$

La matriz función de correlaciones del proceso será

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij}(t,s) &= \text{Corr}[X_i(t), X_j(s)] = \frac{\text{Cov}[X_i(t), X_j(s)]}{\sqrt{\text{Var}[X_i(t)] \text{Var}[X_j(s)]}} \\ &= \frac{\exp[\mathbf{b}_{ij} \min(t,s)] - 1}{[\exp(\mathbf{b}_{ii}t) - 1]^{1/2} [\exp(\mathbf{b}_{jj}s) - 1]^{1/2}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

y la matriz de correlaciones de la variable n -dimensional $\mathbf{X}(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ij}(t) &= \text{Corr}[X_i(t), X_j(t)] = \frac{\text{Cov}[X_i(t), X_j(t)]}{\sqrt{\text{Var}[X_i(t)] \text{Var}[X_j(t)]}} \\ &= \frac{\exp(\mathbf{b}_{ij}t) - 1}{[\exp(\mathbf{b}_{ii}t) - 1]^{1/2} [\exp(\mathbf{b}_{jj}t) - 1]^{1/2}} \\ &\quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

que, como se ve, no dependen de los coeficientes de tendencia del proceso ni, por tanto, de los factores exógenos.

Para las modas y medianas de los procesos componentes $\{X_i(t), t \geq 0\}$, teniendo en cuenta las expresiones de estas medidas para los procesos log-normales unidimensionales (ver Buendía Moya, F. (1988, pp.184), las fórmulas (2.3.3), (2.3.7) y (2.3.8) y las distribuciones marginales del proceso $LN(n, k, \mathbf{m}) \{X(t), t \geq 0\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Moda}[X_i(t)] &= X_{oi} \exp\left[\left(m_i^0 - \frac{3}{2} \mathbf{b}_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0\right] \\ \text{Mediana}[X_i(t)] &= X_{oi} \exp\left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2} \mathbf{b}_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0\right] \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

2.4. La densidad de transición del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$.

Para hallar la función de densidad de transición $p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0)$ del proceso Gaussiano $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$ dado por (2.2.4), solución única de la E.D.E (2.2.3), planteamos la ecuación integral estocástica, para t_0 arbitrario

$$\mathbf{Y}(t, t_0) = \mathbf{Y}(t_0) + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\mu}(s) ds + \int_{t_0}^t \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{W}(s) \quad (2.4.1)$$

que es la misma ecuación (2.2.3) pero con condición inicial $\mathbf{Y}(t_0) \equiv$ v.a no degenerada) e independiente de $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t_0), t \geq t_0$.

La solución de (2.4.1) es, evidentemente

$$\mathbf{Y}(t, t_0) = \mathbf{Y}(t_0) + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t - t_0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t + \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t_0)] \quad (2.4.2)$$

La variable $\mathbf{Y}(t, t_0)$, condicionada por $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ ($\in \mathbf{R}^n$ y cualquiera) es

$$\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t - t_0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t + \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t_0)] \quad (2.4.3)$$

Por tanto

$$\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{y}_0) \approx N_n \left(\mathbf{y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t - t_0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t, \mathbf{B}(t - t_0) \right) \quad (2.4.4)$$

Así que la función de densidad de transición del proceso $\mathbf{Y}(t, t_0)$ dado por (2.4.2) será

$$p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \{\det[\mathbf{B}(t-t_0)]\}^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}Q\right) \quad (2.4.5)$$

donde

$$Q = \left[\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t-t_0) - \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t \right]^t [\mathbf{B}(t-t_0)]^{-t} \\ \times \left[\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t-t_0) - \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t \right] \quad (2.4.6)$$

Observamos ahora que los procesos $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$ y $\{\mathbf{Y}(t, t_0), t \geq t_0\}$, soluciones únicas, respectivamente, de las ecuaciones (2.2.3) y (2.4.1), que sólo se diferencian en la condición inicial, tienen la misma ecuación adelantada de difusión

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\beta_{ij} p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0)] - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[m_i^0 - \beta_{ii} + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right] p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0) \right\} \\ = \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0) \quad (2.4.7)$$

con $p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0) = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0)$ que por tener coeficientes de difusión y de tendencia acotados, (ver Wong (1971 pp. 176-177)), tiene una única solución fundamental $p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0)$ que es, por tanto, la función de densidad de transición de uno y otro proceso.

Hemos llegado, entonces, a que la función de densidad de transición $p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0)$ del proceso $\{\mathbf{Y}(t), t \geq 0\}$, solución de la E.D.E. (2.2.3), es la dada por las fórmulas (2.4.5) y (2.4.6).

Después de esto, para la función de densidad de transición del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$ $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, solución de nuestra E.D.E inicial (2.1.5), tenemos

$$p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) = p(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0) \frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} =$$

$$= \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) (2\mathbf{P})^{n/2} \{\det[\mathbf{B}(t-t_0)]\}^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{Q}\right) \quad (2.4.8)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \left[\log \mathbf{x} - \log \mathbf{x}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t-t_0) - \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t \right] [\mathbf{B}(t-t_0)]^{-1} \\ & \times \left[\log \mathbf{x} - \log \mathbf{x}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \mathbf{B} \right) (t-t_0) - \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_{t_0}^t \right] \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Si escribimos ahora las ecuaciones de difusión atrasada y adelantada respectivamente del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) + \sum_i \left[m_i^0 + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right] x_{0i} \frac{\partial}{\partial x_{0i}} p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_{0i} x_{0j} \frac{\partial^2}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[x_i x_j p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) \right] \\ - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[m_i^0 + \sum_{j=1}^k m_i^j G_j(t) \right] x_i p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) \right\} = \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) \end{aligned}$$

$$\text{con } p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.4.11)$$

como no son ecuaciones tiempo-independientes y además las funciones $\mathbf{m}(t, \mathbf{x})$ y $\sigma(t, \mathbf{x})$ aquí no son acotadas, aunque la E.D.E. (2.1.5), que rige el proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$, tenga solución única, no hubiéramos podido asegurar a priori que alguna de las ecuaciones de difusión tenga una única solución fundamental que sea la función de densidad de transición del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$ (ver Buendía Moya, F. (1988 pp.219-222)), es decir, las ecuaciones de difusión no nos hubieran servido para hallar la densidad de transición del proceso. Sin embargo, podemos comprobar

que $p(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0)$ dada por (2.4.8) y (2.4.9) verifica ambas ecuaciones de difusión, lo que es natural puesto que la densidad de transición del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$ satisfaca las condiciones bajo las que se deducen las ecuaciones de difusión (ver, p.e., Wong (1971 pp. 170).

Observación

En la E.D.E. (2.1.5) que define el proceso log-normal con factores exógenos

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{m}(t, \mathbf{X}(t))dt + \beta^*(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \in (\mathbb{R}^+)^n \quad t \geq 0$$

con $\beta^*(t, \mathbf{x})[\beta^*(t, \mathbf{x})]^T = \beta(t, \mathbf{x}) = (\beta_{ij}x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n}$ y $(\beta_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} = \mathbf{B}$ una matriz real definida positiva y simétrica dada de antemano, para cada una de las distintas posibles matrices $\beta^*(t, \mathbf{x})$ que verifiquen la relación anterior, el proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$, $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, solución de la E.D.E. correspondiente (2.1.5), tiene el mismo vector de tendencia $\mathbf{m}(t, \mathbf{x})$, dado por (2.1.1), y la misma matriz de difusión

$$\beta(t, \mathbf{x}) = (\beta_{ij}x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

así como los mismos momentos y la misma función de densidad de transición, que no dependen de la estructura particular de cada matriz $\beta^*(t, \mathbf{x}) = \sigma(t, \mathbf{x})$, como se puede ver en las fórmulas (2.3.9), (2.3.10), (2.3.11), (2.4.8) y (2.4.9). Como cada solución es un proceso de Markov continuo- muestral c.s. con la misma distribución inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$ y el mismo espacio de valores, entonces cualquiera que sea la matriz $\beta^*(t, \mathbf{x})$ que satisfaga

$$\beta^*(t, \mathbf{x})[\beta^*(t, \mathbf{x})]^T = \beta(t, \mathbf{x}) = (\beta_{ij}x_i x_j)_{i,j=1,2,\dots,n}$$

el proceso solución de la E.D.E.(2.1.5) es el mismo.

Notamos, sin embargo, que en la expresión de la variable del proceso $LN(n, k, \mathbf{m})$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 \exp \left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} \text{diag } \mathbf{B} \right) t + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}^j (G_j)_0^t + \sigma \mathbf{W}(t) \right]$$

$$t \geq 0$$

interviene la matriz real \mathbf{s} , que no es única verificando $\sigma\sigma^t = \mathbf{B}$. Pero el proceso es el mismo para cada solución \mathbf{s} de esta ecuación.

2.5. Estimación de parámetros

En las condiciones prácticas usuales para conducir la inferencia en procesos, esto es, suponiendo que el muestreo es equidistante en el tiempo, que los factores exógenos son conocidos sólo en los tiempos muestrales del proceso y que en cada intervalo $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ los factores exógenos son constantes, es decir, en cada intervalo

$$G_i(t_\alpha) = G_{i\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

se tendría, para intervalos de amplitud unidad $\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} G_i(t) dt = G_{i\alpha}$.

Entonces, centrándonos en el caso de dos factores exógenos $G_1(t)$ y $G_2(t)$ los estimadores de los vectores paramétricos $\mathbf{m}^0, \mathbf{m}^1$ y \mathbf{m}^2 satisfacen las siguientes ecuaciones, obtenidas por el método de máxima verosimilitud (ver Palacios Sanchez, M.A)

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^0 &= \hat{\mathbf{m}}^0 - \frac{1}{2} \text{diag} \hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=2}^n [\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}] \\ \hat{\mathbf{m}}^1 \left[\sum_{\alpha=2}^n G_{1\alpha}^2 \right] &= \sum_{\alpha=2}^n [\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mu}^0 - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}] G_{1\alpha} \\ \hat{\mathbf{m}}^2 \left[\sum_{\alpha=2}^n G_{2\alpha}^2 \right] &= \sum_{\alpha=2}^n [\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mu}^0 - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha}] G_{2\alpha} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

de donde se obtienen $\hat{\mu}^0$, $\hat{\mathbf{m}}^1$ y $\hat{\mathbf{m}}^2$.

La matriz $\hat{\mathbf{B}}$, estimada de \mathbf{B} , se obtiene a partir de los estimadores $\hat{\mu}^0$, $\hat{\mathbf{m}}^1$ y $\hat{\mathbf{m}}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &= \frac{1}{n-1} \cdot \\ &\sum_{\alpha=2}^n [\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}]^t \cdot [\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}] \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

En las condiciones establecidas al principio, una vez estimados los parámetros del proceso, en las expresiones de los momentos y medidas de posición a estimar pondremos

$$(G_i)_o^t = \sum_{\alpha=1}^t G_{i\alpha} .$$

3. Aplicación

Aunque la modelización estocástica se ha usado con éxito en ciertos campos científicos (biología, marketing, finanzas) son escasos los estudios macroeconómicos en los que se haya utilizado difusiones multidimensionales o en los que se haya modelado conjuntamente variables endógenas con otras variables exógenas controlables externamente. En este apartado, mostramos las posibilidades de esta metodología para explicar y predecir los valores de dos variables macroeconómicas: *Gasto público y el Consumo El privado*.

Sea $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t))$ un proceso estocástico bidimensional donde $\mathbf{X}_1(t)$ representa el Gasto público en España en el año t y $\mathbf{X}_2(t)$ representa el Consumo privado en España en el año t . El análisis de la evolución de las variables y la bondad del ajuste obtenido mediante una regresión exponencial para cada una de ellas nos permiten aceptar un crecimiento exponencial de la tendencia del proceso y una hipótesis de variación del mismo proporcional a su estado, y por ello suponer que $\mathbf{X}(t)$ satisface la E.D.E. (2.1.5). Aplicando los resultados teóricos obtenidos en los apartados 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 se estiman los coeficientes de tendencia y de difusión, la solución de la E.D.E., así como sus características más importantes (valor esperado, mediano, modal, varianza) para cada t y también los valores de la función de correlación para cada proceso marginal en diferentes instantes de tiempo y para el proceso bidimensional en el mismo o diferentes tiempos.

Como se ha señalado en la parte teórica, los resultados obtenidos allí se pueden utilizar para efectuar predicciones sobre valores futuros de $\mathbf{X}(t)$. Asimismo, verificaremos que eligiendo adecuadamente factores exógenos controlables se mejora la bondad del ajuste y que esto constituye un procedimiento de control de los valores futuros del proceso. Se ha ensayado como factores exógenos los siguientes: Producto Interior Bruto, Renta Nacional, Formación Bruta de Capital, Población Total de Derecho, Renta per Cápita, Exportaciones e Importaciones, y se ha seleccionado los *P.I.B. per cápita y Exportaciones*.

Los datos correspondientes a dichas variables están tomados del Banco de Datos de Series TEMPUS del I.N.E. y son observaciones anuales para el periodo 1983-1997, que se expresan en términos constantes (millones de pesetas) de 1986.

Cuando se quiere efectuar predicciones en tiempos donde los factores exógenos no son conocidos hay que predecirlos formulando alguna hipótesis sobre tales valores. Ejemplos de hipótesis posibles, entre otras muchas, son:

- 1) El factor exógeno crece a una tasa igual a la media en el periodo conocido.
- 2) El factor exógeno crece a una tasa igual al máximo de las tasas en periodo conocido.
- 3) El factor exógeno crece a una tasa igual al mínimo de las tasas en periodo conocido.
- 4) El factor exógeno se mantiene constante con valores iguales a la última observación.
- 5) El factor exógeno se predice mediante modelos de regresión.

3.1. Estimación del modelo y predicción

Utilizando las expresiones (2.5.1) se obtienen las siguientes estimaciones de los parámetros $\hat{\mu}^0$, \hat{m}^1 y \hat{m}^2 que aparecen en la tabla 1.

Tabla 1. Valores estimados de los parámetros $\hat{\mu}^0$, \hat{m}^1 y \hat{m}^2 .

Vector paramétrico	$\hat{\mu}^0$	\hat{m}^1	\hat{m}^2
Sin fac. exógenos	(0,0346; 0,0227)		
PIB per cápita	(0,0377; 0,0242)	(-0,3157; 0,1826)	
Exportaciones	(0,0374; 0,0245)	(-0,1095; -0,0477)	
PIB p.c. y Expcciones	(0,0377; 0,0242)	(-0,086; -0,071)	(-0,245; 0,2406)

A partir de los valores estimados de los parámetros y las expresiones:

$$X_i(t) = X_{oi} \exp \left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2} \beta_{ii} \right) t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t + \sum_{r=1}^n \sigma_{ir} W_r(t) \right] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$t \geq 0$$

$$E[X_i(t)] = X_{oi} \exp \left(m_i^0 t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t \right) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Moda}[X_i(t)] = X_{oi} \exp \left[\left(m_i^0 - \frac{3}{2} \beta_{ii} \right) t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t \right]$$

$$\text{Mediana}[X_i(t)] = X_{oi} \exp \left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2} \beta_{ii} \right) t + \sum_{j=1}^k m_i^j (G_j)_0^t \right]$$

$$\rho_{ij}(t,s) = \text{Corr}[X_i(t), X_j(s)] = \frac{\exp[\beta_{ij} \min(t,s)] - 1}{[\exp(\beta_{ii}t) - 1]^{1/2} [\exp(\beta_{jj}s) - 1]^{1/2}} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

se obtienen los valores de tales características en los tiempos observados. Los resultados se recogen en las Tablas 2,3,4,5. A continuación de las mismas aparecen las representaciones gráficas de la trayectoria observada del proceso y de las características estimadas en cada supuesto.

Tabla 2. Valores reales y estimados para el Consumo público y privado, sin factores exógenos

Años	CP	Media	Mediana	Moda	CPN	Media	Mediana	Moda
1984	4.263.698	4.308.982	4.308.660	4.308.338	19.106.333	19.586.561	19.585.930	19.585.300
1985	4.498.034	4.413.919	4.413.589	4.413.259	19.781.170	19.545.332	19.544.703	19.544.073
1986	4.740.221	4.656.512	4.656.164	4.655.815	20.437.730	20.235.675	20.235.023	20.234.371
1987	5.159.905	4.907.232	4.906.865	4.906.498	21.621.852	20.907.320	20.906.647	20.905.974
1988	5.368.137	5.341.702	5.341.303	5.340.903	22.683.719	22.118.649	22.117.937	22.117.225
1989	5.813.462	5.557.271	5.556.855	5.556.440	23.965.871	23.204.915	23.204.167	23.203.420
1990	6.197.776	6.018.286	6.017.836	6.017.386	24.838.577	24.516.526	24.515.736	24.514.947
1991	6.543.696	6.416.140	6.415.660	6.415.181	25.556.381	25.409.284	25.408.466	25.407.647
1992	6.808.095	6.774.248	6.773.741	6.773.235	26.121.790	26.143.581	26.142.739	26.141.897
1993	6.971.511	7.047.962	7.047.435	7.046.908	25.542.843	26.721.981	26.721.120	26.720.260
1994	6.948.140	7.217.136	7.216.596	7.216.057	25.775.213	26.129.732	26.128.890	26.128.049
1995	7.074.014	7.192.941	7.192.404	7.191.866	26.184.264	26.367.441	26.366.591	26.365.742
1996	7.141.101	7.323.250	7.322.703	7.322.155	26.701.914	26.785.890	26.785.028	26.784.165
1997	7.239.097	7.392.701	7.392.148	7.391.596	27.531.636	27.315.434	27.314.554	27.313.675
R ²		0.978	0.978	0.978		0.968	0.968	0.968
ERCM		0,00067	0,00067	0,00067		0,00045	0,00045	0,00045

Tabla 3. Valores reales y estimados para el Consumo público y privado, considerando como factor exógeno las Exportaciones

Años	CP	Media	Mediana	Moda	CPN	Media	Mediana	Moda
1984	4.263.698	4.266.183	4.263.414	4.260.646	19.106.333	19.512.893	19.504.695	19.496.500
1985	4.498.034	4.413.542	4.410.677	4.407.813	19.781.170	19.555.908	19.547.692	19.539.479
1986	4.740.221	4.660.175	4.657.150	4.654.126	20.437.730	20.254.313	20.245.803	20.237.297
1987	5.159.905	4.887.091	4.883.919	4.880.748	21.621.852	20.881.985	20.873.211	20.864.441
1988	5.368.137	5.327.097	5.323.639	5.320.183	22.683.719	22.105.074	22.095.787	22.086.503
1989	5.813.462	5.554.693	5.551.087	5.547.483	23.965.871	23.213.645	23.203.892	23.194.143
1990	6.197.776	6.014.048	6.010.144	6.006.242	24.838.577	24.523.183	24.512.880	24.502.581
1991	6.543.696	6.379.055	6.374.914	6.370.776	25.556.381	25.359.890	25.349.236	25.338.585
1992	6.808.095	6.738.641	6.734.267	6.729.895	26.121.790	26.098.744	26.087.779	26.076.818
1993	6.971.511	7.002.291	6.997.745	6.993.203	25.542.843	26.661.856	26.650.654	26.639.457
1994	6.948.140	7.106.165	7.101.552	7.096.942	25.775.213	25.969.036	25.958.125	25.947.219
1995	7.074.014	7.134.687	7.130.055	7.125.427	26.184.264	26.289.441	26.278.395	26.267.355
1996	7.141.101	7.259.091	7.254.379	7.249.669	26.701.914	26.698.888	26.687.670	26.676.458
1997	7.239.097	7.294.771	7.290.035	7.285.303	27.531.636	27.172.992	27.161.575	27.150.163
R ²		0.985	0.985	0.985		0.971	0.971	0.971
ERCM		0,00057	0,00059	0,00060		0,00042	0,00042	0,00043

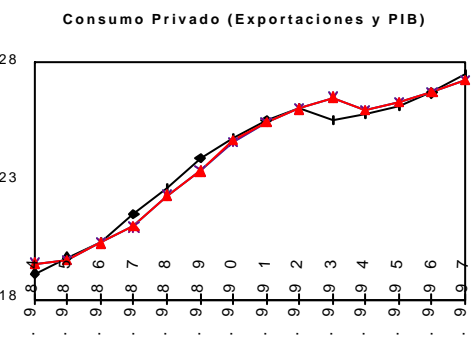
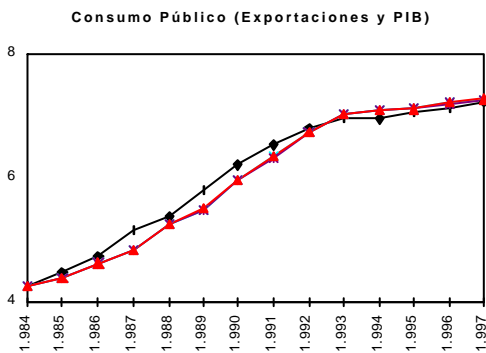
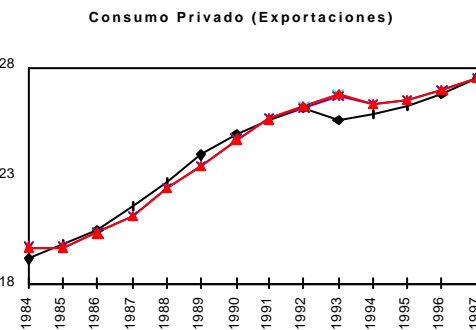
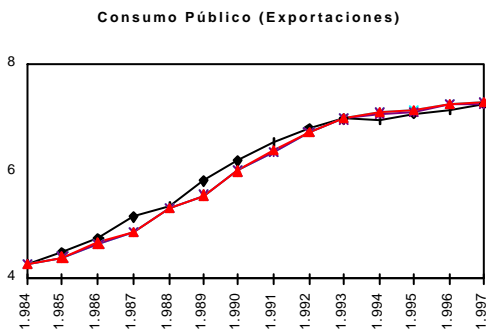
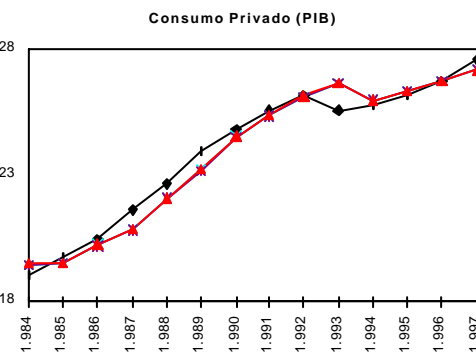
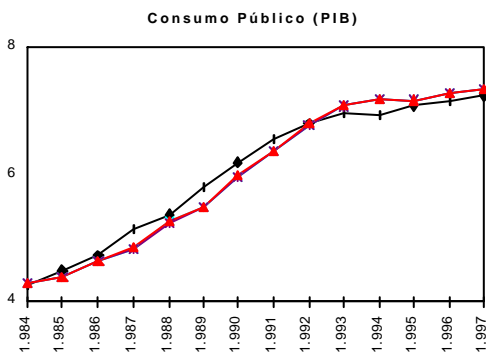
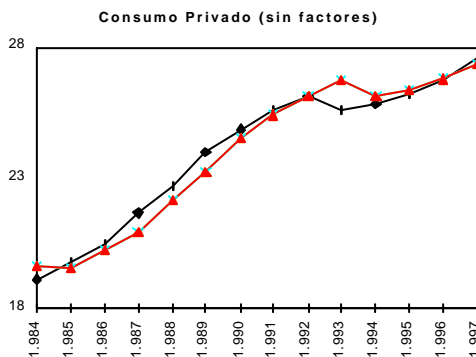
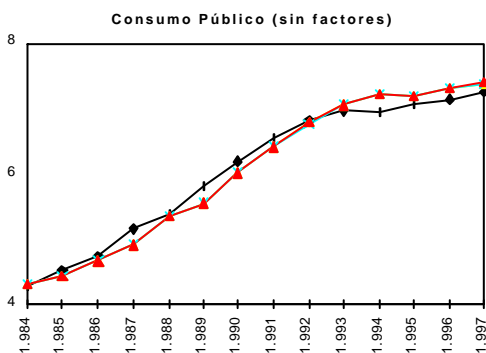
Tabla 4. Valores reales y estimados para el Consumo público y privado, considerando como factor exógeno el P.I.B. per cápita

Años	CP	Media	Mediana	Moda	CPN	Media	Mediana	Moda
1984	4.263.698	4.304.912	4.300.869	4.296.830	19.106.333	19.661.241	19.654.257	19.647.275
1985	4.498.034	4.392.602	4.388.477	4.384.355	19.781.170	19.664.125	19.657.139	19.650.156
1986	4.740.221	4.634.915	4.630.562	4.626.213	20.437.730	20.356.396	20.349.164	20.341.936
1987	5.159.905	4.848.783	4.844.230	4.839.680	21.621.852	21.121.455	21.113.952	21.106.452
1988	5.368.137	5.262.773	5.257.830	5.252.892	22.683.719	22.382.761	22.374.810	22.366.861
1989	5.813.462	5.499.075	5.493.910	5.488.750	23.965.871	23.422.862	23.414.541	23.406.223
1990	6.197.776	5.978.022	5.972.408	5.966.798	24.838.577	24.692.248	24.683.476	24.674.707
1991	6.543.696	6.375.082	6.369.094	6.363.113	25.556.381	25.587.069	25.577.979	25.568.893
1992	6.808.095	6.794.949	6.788.567	6.782.192	26.121.790	26.182.667	26.173.366	26.164.068
1993	6.971.511	7.091.201	7.084.542	7.077.888	25.542.843	26.714.525	26.705.035	26.695.549
1994	6.948.140	7.194.517	7.187.760	7.181.009	25.775.213	26.262.669	26.253.339	26.244.013
1995	7.074.014	7.171.252	7.164.517	7.157.788	26.184.264	26.499.762	26.490.348	26.480.938
1996	7.141.101	7.280.289	7.273.452	7.266.621	26.701.914	26.964.944	26.955.364	26.945.789
1997	7.239.097	7.351.140	7.344.236	7.337.338	27.531.636	27.494.116	27.484.349	27.474.585
R ²		0.975	0.975	0.975		0.975	0.975	0.975
ERCM		0,00088	0,00090	0,00092		0,00035	0,00035	0,00034

Tabla 5. Valores reales y estimados para el Consumo público y privado, considerando como factores exógenos las Exportaciones y el P.I.B. per cápita

Años	CP	Media	Mediana	Moda	CPN	Media	Mediana	Moda
1984	4.263.698	4.265.655	4.262.471	4.259.289	19.106.333	19.514.276	19.509.920	19.505.566
1985	4.498.034	4.390.377	4.387.100	4.383.826	19.781.170	19.656.210	19.651.823	19.647.437
1986	4.740.221	4.635.545	4.632.085	4.628.628	20.437.730	20.358.933	20.354.389	20.349.846
1987	5.159.905	4.838.731	4.835.120	4.831.511	21.621.852	21.085.799	21.081.093	21.076.388
1988	5.368.137	5.260.961	5.257.035	5.253.111	22.683.719	22.376.732	22.371.738	22.366.745
1989	5.813.462	5.501.650	5.497.544	5.493.441	23.965.871	23.432.170	23.426.940	23.421.711
1990	6.197.776	5.974.589	5.970.129	5.965.673	24.838.577	24.680.935	24.675.427	24.669.920
1991	6.543.696	6.345.542	6.340.806	6.336.073	25.556.381	25.490.089	25.484.400	25.478.712
1992	6.808.095	6.751.938	6.746.899	6.741.863	26.121.790	26.046.959	26.041.145	26.035.333
1993	6.971.511	7.034.670	7.029.419	7.024.173	25.542.843	26.540.019	26.534.096	26.528.174
1994	6.948.140	7.101.554	7.096.254	7.090.957	25.775.213	25.984.270	25.978.471	25.972.673
1995	7.074.014	7.119.508	7.114.194	7.108.884	26.184.264	26.343.132	26.337.252	26.331.374
1996	7.141.101	7.228.595	7.223.200	7.217.809	26.701.914	26.808.109	26.802.126	26.796.144
1997	7.239.097	7.272.555	7.267.127	7.261.703	27.531.636	27.253.100	27.247.018	27.240.937
R ²		0.982	0.982	0.982		0.981	0.981	0.981
ERCM		0,00081	0,00083	0,00085		0,00026	0,00026	0,00026

La bondad de las predicciones se mide con el coeficiente de determinación R² y el ERCM (raíz del error relativo cuadrático medio) indicando qué modelo produce los valores mínimos.



Real
 Mediana
 Moda
 Media

Para realizar predicciones fuera del rango de valores observados, donde los valores de los factores exógenos no son conocidos, es necesario, como se ha dicho antes, efectuar alguna hipótesis sobre su comportamiento, y con arreglo a cada una de ellas realizar las predicciones de los valores del proceso. En este sentido se puede comentar que si el factor exógeno es controlable, constituye un control retroalimentado del sistema.

Así, para los años 2000, 2005 y 2010 y para cada una de las hipótesis 1, 2, 3, y 4 se obtienen las predicciones que figuran en las tablas 6 y 7:

Tabla 6: Valores estimados del Consumo Público

<i>Consumo público</i>	<i>t=2000</i>	<i>t=2005</i>	<i>t=2010</i>
Sin factores	8.031.530	9.549.665	11.354.760
H-1:media	8.030.520	9.683.895	11.676.676
H-2:máximo	7.952.713	9.590.068	11.564.366
H-3:mínimo	8.083.258	9.747.490	11.754.366
H-4:constante	7.969.910	9.610.806	11.589.539

Tabla 7: Valores estimados del Consumo Privado Nacional

<i>Consumo privado</i>	<i>t=2000</i>	<i>t=2005</i>	<i>t=2010</i>
Sin factores	29.473.327	33.018.530	36.990.169
H-1:media	29.624.561	33.440.256	37.747.419
H-2:máximo	29.849.447	33.694.108	38.033.967
H-3:mínimo	29.375.498	33.159.114	37.430.065
H-4:constante	29.639.808	33.457.467	37.766.847

Por último, como resultado de interés, se obtienen las correlaciones para cada proceso marginal en diferentes tiempos y también las correlaciones bidimensionales en los mismos y diferentes instantes de tiempo. Para los tiempos 1995, 2000, 2005 se obtienen los resultados que figuran en la tabla 8.

Tabla 8: Correlaciones entre el Consumo Público y el Consumo Privado Nacional.

	X_1 (1995)	X_1 (2000)	X_1 (2005)	X_2 (1995)	X_2 (2000)	X_2 (2005)
X_1 (1995)	1	0.8395	0.7373	0.7472	0.6275	0.5513
X_1 (2000)	0.8395	1	0.8783	0.6273	0.7469	0.6563
X_1 (2005)	0.7373	0.8783	1	0.5510	0.6561	0.7467
X_2 (1995)	0.7472	0.6273	0.5510	1	0.8397	0.7378
X_2 (2000)	0.6275	0.7469	0.6561	0.8397	1	0.8786
X_2 (2005)	0.5513	0.6563	0.7467	0.7378	0.8786	1

Se observa que, para cada componente, la correlación de las variables correspondientes a diferentes tiempos es alta, con tendencia a disminuir a medida que aumenta el intervalo de tiempo. Observamos también el mismo comportamiento para la correlación entre las variables derivadas de componentes diferentes. El conocimiento de estas correlaciones puede ayudar a interpretar valores futuros de cada componente.

4. Conclusiones

Hemos utilizado un modelo de proceso estocástico obtenido como solución de una ecuación diferencial estocástica en el sentido de Itô, que hemos supuesto, razonablemente, que verifica la variable vectorial objeto de estudio. La utilización de la expresión de la solución de esta E.D.E., que nos proporciona el conocimiento de la distribución de la variable en cada instante, se ha revelado como una metodología potente y rigurosa para obtener las características estadísticas del proceso, en particular su función de densidad de transición, los momentos de sus distribuciones p -dimensionales y su función de correlación, cuyas expresiones han sido utilizadas para el análisis y predicción de los valores de la variable. Hemos establecido la capacidad de explicación del modelo y la fiabilidad de las predicciones que este modelo proporciona. La introducción de factores exógenos adecuados ha mejorado sucesivamente la bondad de los ajustes y constituyen por tanto una herramienta de control del proceso.

Bibliografía

ARNOLD L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley.

BHATTACHARYA R. N; WAYMIRE E.C. (1990): *Stochastic Processes with Applications*. John Wiley.

BOULEAU N. (1988): *Processus Stochastiques et Applications*. Hermann.

BUENDÍA MOYA F. (1998): "Contribución al estudio de los procesos estocásticos de difusión logarítmico-normales como procesos de Itô". Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.

BUENDÍA MOYA F. y GÓMEZ GARCÍA J. (1995): "Estudio del proceso estocástico logarítmico-normal unidimensional con factores exógenos como solución de una ecuación de Itô". IX Reunión Asepelt-España. Santiago de Compostela.

BUENDÍA MOYA F. y GÓMEZ GARCÍA J. (1997): "Estudio como proceso de Itô de una generalización del proceso log-normal. Potencias de los procesos log-normales". XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Valencia.

BUENDÍA MOYA F. y GÓMEZ GARCÍA J. (1998): "El proceso estocástico de difusión logarítmico-normal vectorial como proceso de Itô". XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Almería.

COX J.C. and ROSS (1976): "The evaluation of option for alternative stochastic processes". *J. Financial Econ.*, 3, 145-166.

GIHMAN and SKOROHOD (1972): *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.

GÓMEZ L. and TINTNER G. (1981): The application of diffusion processes in problems of developmental economic planning: a case study (Colombia). *Studies in Economic Theory and Practice*. North-Holland.

GUTIÉRREZ R. (1981): "Inferencia en los procesos de difusión logarítmico-normales multidimensionales con factores exógenos". *Cuadernos de Estadística*, 6, 6-15.

GUTIÉRREZ R.; ANGULO J.M.; GONZÁLEZ A.; PÉREZ R. (1991): "Inference in lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: Application to modelling in economics". *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Vol.7, 295-316.

GUTIÉRREZ R.; HERMOSO A. and MOLINA M. (1986): "On the estimation of the drift coefficient in randomly stopped diffusion processes". *Trabajos de Estadística*, 1(2), 57-66.

HERMOSO CARAZO M.A. (1983): Test de Hipótesis sobre el Coeficiente Tendencia de un Proceso de Difusión Multidimensional. Aplicación al Proceso Logarítmico Normal con Factores Exógenos. Tesis Doctoral, Univ. de Granada.

IKEDA N-WATANABE S. (1989): *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North-Holland.

MERTON R.C. (1976): "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous". *J. Financial Econ.*, 3, 125-144.

MOLINA FERNÁNDEZ M. (1983): Estimación del Coeficiente Tendencia de un Proceso de Difusión Multidimensional. Aplicación al Proceso Logarítmico Normal con Factores Exógenos. Tesis Doctoral, Univ. de Granada.

PALACIOS SANCHEZ M.A. (1995): "Procesos estocásticos de difusión. Aplicaciones económicas". Tesis Doctoral. Univ. de Murcia.

SOBCZYK (1991): *Stochastic Differential Equations whit Applications to Physics and Engineering*. Kluwer Academic Publishers.

TINTNER G. y BELLO (1968): "Aplicación de un proceso de difusión logarítmico-normal al crecimiento económico". *Trabajos de Estadística*, 19, 83-97.

TINTNER G. and GÓMEZ G.L. (1979): "The application of the diffusion processes in problems of developmental economic planning". *Trabajos de Estadística*, 30 (2), 33-55.

TINTNER G. and NARAYANAN R. (1966): "A multidimensional stochastic process for the explanation of economic development". *Metrika* 11, 85-96.

TINTNER G. and PATEL R.C. (1966): "A lognormal diffusion process applied to the development of Indian agriculture with some considerations on economic policy". *Journal of the Indian Society of Agricultural Statistic*, 18, 36-44.

TINTNER G. and THOMAS E.J. (1963): "Un modele stochastique de développement économique avec application a l'industrie Anglaise". *Revue d'Economie Politique*, 73, 143-47.

TINTNER G. and SENGUPTA J.K. (1972): *Stochastic Economics*. Academic Press.

TODOROVIC P. (1992): *An Introduction to Stochastic Processes and their Applications*. Springer-Verlag.

WONG E. (1971): *Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems*. McGraw-Hill Book Company.