ÍNDICE

ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA | Nº 18, 2001. PÁGS. 129-142

Derivabilidad y escindibilidad de las leyes financieras

*CRUZ RAMBAUD, S. y **VALLS MARTÍNEZ, Mª del C.
Dpto. de Dirección y Gestión de Empresas. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Almería.
Telf.: 950 215 184-Fax: 950 215 178 • *E-mail:scruz@ualm.es - **E-mail:mcvalls@ualm.es

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el análisis matemático-financiero de algunas condiciones necesarias que han de verificar las leyes financieras dinámicas que son favorables, desfavorables o indiferentes a la escisión del plazo temporal.

Teniendo en cuenta que la exigencia de continuidad en la definición de ley financiera no implica su derivabilidad, estas condiciones necesarias se refieren a un planteamiento general de no derivabilidad, por lo que se relaciona la conveniencia de escindir el plazo temporal con las derivadas por la derecha y por la izquierda de la ley. Como consecuencia, se demuestra que, en el caso particular de leyes financieras derivables, esta propiedad transforma las leyes favorables o desfavorables en leyes escindibles.

Palabras clave: Ley financiera, escindible, favorable, aditiva, subaditiva, derivabilidad.

ABSTRACT

The aim of this paper is the mathematical and financial analysis of several necessary conditions verified by the dynamic financial laws that are favourable, unfavourable or indifferent to the division of the temporary period.

Taking into account that the condition of continuity in the concept of financial law does not imply its derivability, these necessary conditions refer to a general approach of non derivability, so the convenience of splitting the time is related with the lateral derivatives (from the left and from the right) of the law. As consequence, it is shown that, in the particular case of derivability, the favourable or unfavourable financial laws are decomposable.

Key words: Financial law, decomposable, favourable, additive, subadditive, derivable.

Artículo recibido el 29 de noviembre de 1999. Aceptado el 28 de julio de 2000.

1. Introducción

El problema de la conveniencia en la escindibilidad ha sido tratado en la matemática financiera desde diferentes puntos de vista. En Fürst (Fürst: 1960, pp. 56-78) se estudian las consecuencias sobre la ley al fraccionar la cuantía invertida en una operación financiera, dándose por supuesto la no homogeneidad de la ley con respecto a las cuantías. Si intentamos extrapolar algunos de estos resultados a la escindibilidad del plazo temporal surgen caracterizaciones similares en el caso de leyes financieras estacionarias (Cruz y Valls: 1996 y 1997). Sin embargo, surge un problema adicional cuando pretendemos trabajar con leyes financieras dinámicas, puesto que el cálculo diferencial es ahora en derivadas parciales, demostrándose que los resultados obtenidos ahora generalizan los obtenidos anteriormente en el caso estacionario.

Para ello, este trabajo se estructura de la siguiente forma: en la Sección 2 se proponen las definiciones de leyes financieras favorables, desfavorables y escindibles, y de funciones aditivas, subaditivas y superaditivas, que suponen una herramienta intermedia para caracterizar las leyes financieras correspondientes. En la Sección 3 se establecen condiciones necesarias, valiéndonos de las derivadas laterales, acerca de la conveniencia de interrumpir el flujo; tratamos de ordenar en esta sección las diferentes situaciones en cuanto a la derivabilidad parcial, tanto para el caso dinámico como para el estacionario. Por último, en la Sección 4 aplicamos los resultados obtenidos anteriormente al caso derivable, demostrando cómo esta propiedad matemática "suaviza" la ventaja o desventaja producida por una ley favorable o desfavorable.

2. Preliminares

Definición 2.1. Una *ley financiera* es una función:

$$F: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R},$$

$$(c,t,a) \rightarrow F(c,t,a),$$

que cumple las siguientes *condiciones*:

(1) $F(c,t,a) = c \; F(1,t,a)$.

En lo que sigue, diremos que $F(1,t,a) = F(t,a)$ es la *ley financiera unitaria*:

$$F(c,t,a) = c \; F(t,a).$$

(2) Si $a < b$, $0 < F(t,a) \leq F(t,b)$.

Se dice que $F(t,a)$ es el resultado u output de aplicar sobre el capital financiero $(1,t)$ el plazo o input temporal a.

Analíticamente escribiremos:

$$\frac{\Delta F(t,a)}{\Delta a} \geq 0.$$

Si $F(t,a)$ fuese derivable respecto a a:

$$\frac{\partial F(t,a)}{\partial a} \geq 0.$$

(3) $F(t,0) = 1$.

(4) $F(t,a)$ es continua respecto a a.

Definición 2.2. Se llama *dominio D* de una ley financiera $F(c,t,a)$, al subconjunto de $\Re^3$ formado por las ternas (c,t,a) que verifican las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la definición de ley financiera.

Teniendo en cuenta la homogeneidad de grado *1* con respecto a *c* de la ley financiera, el dominio de cualquier ley tiene la forma:

$$D = \Re \times D_1 \times D_2, \text{ siendo } D_1, D_2 \subseteq \Re.$$

Restringiendo la definición anterior a la ley financiera unitaria, obtenemos la siguiente:

Definición 2.3. Se llama *dominio temporal* D_t de una ley financiera $F(c,t,a)$ al subconjunto de $\Re^2$ formado por los pares (t,a) que verifican las condiciones (2), (3) y (4) del concepto de ley financiera unitaria.

Evidentemente se verifica que:

$$D_t = D_1 \times D_2;\; D = \Re \times D_t.$$

Definición 2.4. Decimos que una función:

$$f: D \rightarrow \Re \;/\; (t,x) \rightarrow f(t,x)$$

es *subaditiva* cuando, para todo $(t,x_1) \in D$ y x_2 con $(t+x_1,x_2)$ y $(t,x_1+x_2) \in$ D, se verifica que:

$$f(t,x_1) + f(t+x_1,x_2) \leq f(t,x_1+x_2).$$

Análogamente, diremos que $f(t,x)$ es *superaditiva* si:

$$f(t,x_1) + f(t+x_1,x_2) \geq f(t,x_1+x_2).$$

Del mismo modo, la función *f(t,x)* será *aditiva*, cuando verifique que:

$$f(t,x_1) + f(t+x_1,x_2) = f(t,x_1+x_2).$$

Gráfico 1

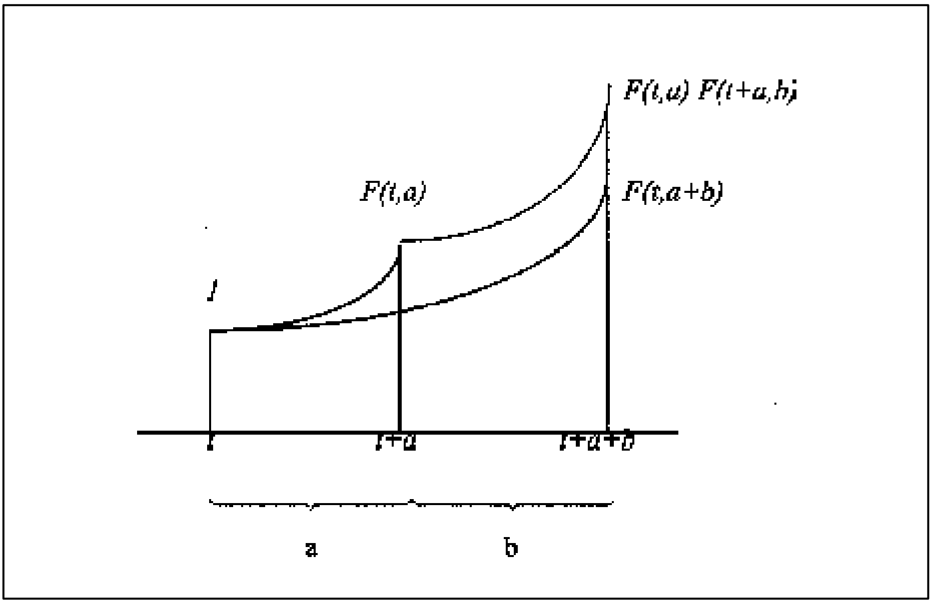
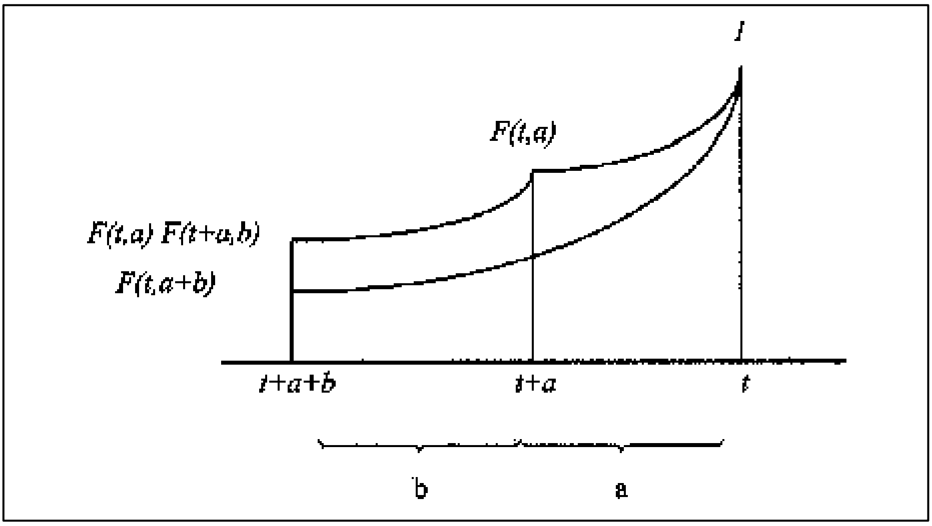


Gráfico 2



Definición 2.5. Decimos que la ley financiera:

$$F: D \rightarrow \Re \ / \ (t,a) \rightarrow F(t,a)$$

es *favorable a la escindibilidad*, o simplemente *favorable*, cuando para todo $(t,a) \in D_t$ y $b \in D_2$, con $(t+a,b), (t,a+b) \in D_t$, se verifica que:

$$F(t,a)\, F(t+a,b) \geq F(t,a+b),$$

es decir, el montante resultante de desplazar un capital un período a, interrumpir la operación y renovarla inmediatamente, desplazando a continuación el montante obtenido en $t+a$ durante un período b, es mayor o igual al montante que se obtendría si se desplazase el capital inicial durante el período $a+b$ de una sola vez sin interrupción.

En el gráfico nº 1 podemos ver esta situación cuando nos movemos hacia delante, es decir, si F es una ley financiera de capitalización. O bien, en el gráfico nº 2 cuando nos movemos hacia atrás, es decir, si F es de descuento.

Análogamente, diremos que $F(t,a)$ es *desfavorable a la escindibilidad*, o simplemente *desfavorable*, si:

$$F(t,a)\, F(t+a,b) \leq F(t,a+b).$$

Del mismo modo, $F(t,a)$ será *escindible* si:

$$F(t,a)\, F(t+a,b) = F(t,a+b).$$

Definición 2.6. Decimos que la ley financiera:

$$F: D \rightarrow \Re \ / \ (t,a) \rightarrow F(t,a)$$

es *parcialmente favorable* cuando para todo $(t,a) \in D_t$ y $b \in D_2$ tales que $a \cdot b > 0$ (a y b tienen el mismo signo), con $(t+a,b)$, $(t,a+b) \in D_t$:

$$F(t,a)\, F(t+a,b) \geq F(t,a+b).$$

Obsérvese que esta definición es equivalente a exigir que F sea favorable cuando se emplea sólo como ley de capitalización o sólo como ley de descuento.

Análogamente se define ley financiera *parcialmente desfavorable*.

3. Condiciones necesarias para la escindibilidad de leyes financieras

Teorema 3.1. Una ley financiera $F(t,a)$ es favorable (respectivamente desfavorable) si y solo si $f(t,a) = \ln F(t,a)$ es superaditiva (respectivamente subaditiva).
Demostración. Es evidente.

Teorema 3.2. Sea $F(t,a)$ una ley financiera:

i) Si $F(t,a)$ es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^+} \geq \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^+}.$$

ii) Si $F(t,a)$ es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^-} \leq \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^-}.$$

iii) Si $F(t,a)$ es derivable, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a}.$$

Demostración. i)

Si $F(t,a)$ es una ley financiera favorable, para todo (t,a), $(t+a,b)$ y $(t,a+b) \in D_t$, entonces:

$$F(t,a)F(t+a,b) \geq F(t,a+b).$$

Por ser ln una función estrictamente creciente:

$$f(t,a) + f(t+a,b) \geq f(t,a+b).$$

De donde, para todo $h > 0 \in D_2$:

$$f(t,a) + f(t+a,h) \geq f(t,a+h),$$

$$f(t+a,h) \quad f(t,a+h) - f(t,a),$$

si dividimos por h y hacemos el límite cuando h tiende a cero:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+a,h)}{h}\geq \lim_{h\to 0}\frac{f(t,a+h)-f(t,a)}{h},$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+a,0+h)-f(t+a,0)}{h}\geq \lim_{h\to 0}\frac{f(t,a+h)-f(t,a)}{h},$$

De donde:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^+}\geq \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^+}.$$

ii) Análoga a la anterior.
iii) Es evidente teniendo en cuenta i) y ii).

Teorema 3.3. Sea $F(t,a)$ una ley financiera

i) Si $F(t,a)$ es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^+}\leq \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^+}.$$

ii) Si $F(t,a)$ es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^-}\geq \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^-}.$$

iii) Si $F(t,a)$ es derivable, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0}= \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a}.$$

Demostración. Análoga a la anterior.

Teorema 3.4. Sea $F(t,a)$ una ley financiera

i) Si $F(t,a)$ es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^+}= \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^+}.$$

ii) Si *F(t,a)* es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0^-}=\left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a^-}.$$

iii) Si *F(t,a)* es derivable, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$\left.\frac{\partial f(t+a,x)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=a}.$$

Demostración. Es consecuencia de los teoremas 3.2 y 3.3.

Ejemplo 3.1. La ley financiera *F(t,a)* definida por:

$$f(t,a)=\begin{cases} h(t)\,a, \text{si } a\geq 0 \\ g(t)\,a, \text{si } a<0 \end{cases},$$

siendo *h(t)* cualquier función positiva y decreciente (con respecto de *t*) y *g(t)* cualquier función positiva y creciente tales que:

$$g(t)\geq h(t'), \text{ para cualesquiera } t \text{ y } t',$$

es desfavorable.

Demostración.

• Siendo a y b positivos:

$$f(t,a+b) = h(t)\,(a+b) = h(t)\,a + h(t)\,b \geq h(t)\,a + h(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

• Siendo a y b negativos:

$$f(t,a+b) = g(t)\,(a+b) = g(t)\,a + g(t)\,b \geq g(t)\,a + g(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

• Siendo a positivo, b negativo y $a+b$ positivo:

$$f(t,a+b) = h(t)\,(a+b) = h(t)\,a + h(t)\,b \geq h(t)\,a + g(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

• Siendo a positivo, b negativo y $a+b$ negativo:

$$f(t,a+b) = g(t)\,(a+b) = g(t)\,a + g(t)\,b \geq h(t)\,a + g(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

• Siendo a negativo, b positivo y $a+b$ positivo:

$$f(t,a+b) = h(t)\,(a+b) = h(t)\,a + h(t)\,b \geq g(t)\,a + h(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

• Siendo a negativo, b positivo y $a+b$ negativo:

$$f(t,a+b) = g(t)\,(a+b) = g(t)\,a + g(t)\,b \geq g(t)\,a + h(t+a)\,b = f(t,a) + f(t+a,b).$$

Ejemplo 3.2.

$$f(t,a) = \begin{cases} 2 - arc\,\mathrm{tg}\ t, & a \geq 0 \\ 4 + \mathrm{arc\,tg}\ t, & a < 0 \end{cases}, \quad t \in\,]-\infty, +\infty[\ .$$

Observamos cómo, efectivamente:

• $h(t) = 2 - arc\ tg\ t$ es positiva y decreciente,

• $g(t) = 4 + arc\ tg\ t$ es positiva y creciente,

• $g(t)$ es mayor que $h(t)$ para todo valor de t,

debido a que el recorrido de la función *arc tg t* es el intervalo [-1,1].

Corolario 3.1. Sea $F(a)$ una ley financiera estacionaria.

i) Si $F(a)$ es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$f_+'(0) \geq f_+'(a).$$

ii) Si $F(a)$ es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$f_-'(0) \leq f_-'(a).$$

iii) Si $F(a)$ es derivable, una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$f'(0) = f'(a).$$

Corolario 3.2. Sea *F(a)* una ley financiera estacionaria.

i) Si *F(a)* es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$f_+'(0) \leq f_+'(a).$$

ii) Si *F(a)* es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$f_-'(0) \geq f_-'(a).$$

iii) Si *F(a)* es derivable, una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$f'(0) = f'(a).$$

Corolario 3.3. Sea *F(a)* una ley financiera estacionaria.

i) Si *F(a)* es derivable por la derecha, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$f_+'(0) = f_+'(a).$$

ii) Si *F(a)* es derivable por la izquierda, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$f_-'(0) = f_-'(a).$$

iii) Si *F(a)* es derivable, una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$f'(0) = f'(a).$$

Teorema 3.5. Sea *F(a)* una ley financiera estacionaria derivable por la derecha y, además, derivable por la izquierda en *0*. Una condición necesaria para que sea favorable es que:

$$f_-'(0) \leq f_+'(a).$$

Demostración.

Si *F(a)* es una ley financiera estacionaria favorable, para todo $a, b \in D_2$, con $a+b \in D_2$, entonces $F(a)F(b) \geq F(a+b)$.

Evidentemente, por ser ln una función estrictamente creciente:

$$\ln F(a) + \ln F(b) \geq \ln F(a+b).$$

Llamando $f(a) = \ln F(a)$,

$$f(a) + f(b) \geq f(a+b).$$

De donde, para todo $h \in D_2$, $h < 0$, con $a + h \in D_2$:

$$f(a)+f(h) \geq f(a+h),$$

$$f(h) \geq f(a+h)-f(a)$$

Dividiendo por h y haciendo tender h a cero:

$$f_-'(0) \leq f_+'(a).$$

Teorema 3.6. Sea $F(a)$ una ley financiera estacionaria derivable por la derecha y, además, derivable por la izquierda en 0. Una condición necesaria para que sea desfavorable es que:

$$f_-'(0) \geq f_+'(a).$$

Demostración. Análoga a la anterior.

Teorema 3.7. Sea $F(a)$ una ley financiera estacionaria derivable por la derecha y, además, derivable por la izquierda en 0. Una condición necesaria para que sea escindible es que:

$$f_-'(0) = f_+'(a).$$

Demostración. Análoga a la anterior.

4. Caso particular: ley financiera derivable

Teorema 4.1. Una condición necesaria y suficiente para que una ley financiera dinámica $F(t,a)$ derivable sea favorable es que sea escindible.

Veamos, en primer lugar, que la condición es necesaria. Si *F(t,a)* es derivable y favorable, se verifica por el teorema 4 iii) que:

$$\left.\frac{\partial f(t+z,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=z} .$$

Integrando respecto de *z* entre *0* y *a*:

$$\int_0^a \left.\frac{\partial f(t+z,x)}{\partial x}\right|_{x=0} dz = \int_0^a \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=z} dz ,$$

quedaría:

$$H(t+z)\Big|_0^a = f(t,z)\Big|_0^a ,$$

que es igual a:

$$H(t+a) - H(t) = f(t,a) - f(t,0).$$

De donde:

$$F(t,a) = e^{H(t+a) - H(t)},$$

con lo que queda demostrado que *F(t,a)* es escindible (Gil Peláez: 1992, pp. 112-119 y Levi: 1974, pp. 70-77).

Es trivial que la condición es suficiente.

Teorema 4.2. Una ley financiera dinámica *F(t,a)* derivable es desfavorable, si y solo si *F(t,a)* es escindible.

Demostración. Análoga a la anterior.

Corolario 4.1. Una ley financiera estacionaria *F(a)* derivable es favorable, si y solo si *F(a)* es la capitalización compuesta.

Demostración. Es evidente teniendo en cuenta que la única ley financiera estacionaria escindible es la capitalización compuesta.

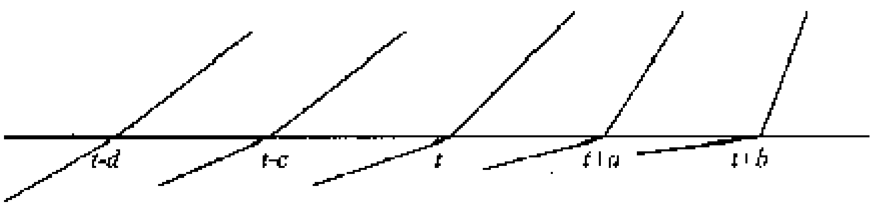
Corolario 4.2. Una ley financiera estacionaria *F(a)* derivable es desfavorable, si y solo si *F(a)* es la capitalización compuesta.

5. Justificación práctica y conclusiones

La realidad de los mercados financieros nos evidencia una situación actual cambiante de los tipos de interés. Esto provoca que los procesos financieros descriptivos de las leyes financieras sean continuos, pero no derivables, en un conjunto finito o infinito numerable de instantes.

Si la situación es de subida de intereses, la ley resultante es favorable (véase definición 2.5.), por lo que, teniendo en cuenta las ganancias adicionales que podría obtener el inversor al escindir el plazo temporal de la operación, conviene modelizar la expresión de la ley financiera en este caso.

Así, la interpretación geométrica del teorema 3.2. es la siguiente:



Si dibujamos todas las *f(t,a)* de una misma ley financiera, obtendremos una curva para cada instante *t*. Esta situación se da en la práctica cuando hay una evolución al alza de los tipos de interés. Por ejemplo, si el interés en *t* es de un *10%* y en *t+a* es de un *12%*, es lógico que sea conveniente (evidentemente, suponemos que se trata de una operación de inversión) escindir la operación en *t+a*, en lugar de continuar sin interrupción desde *t*, puesto que para el tiempo que resta desde el instante *t+a* hasta el final de la operación financiera el interés obtenido será superior en un 2%. En consecuencia, la ley será favorable a la escindibilidad.

La modelización se ha llevado a cabo en cuanto a las derivadas laterales porque, cuando la ley es derivable, se demuestra que es escindible (teoremas 4.1.).

Análogas consideraciones son establecidas cuando la situación es de bajada de los tipos de interés y la ley es desfavorable (teoremas 3.3. y 4.2.).

* Esta versión incluye todas las correscciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que quedamos muy agradecidos.

ÍNDICE

Bibliografía

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1996): "Leyes financieras escindibles para una operación y según una acción". *Cuadernos Aragoneses de Economía*, Vol. 6-2, pp. 441-453.

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1997a): "Une généralisation du concept de scindibilité dans les lois financières". *XI Congreso Nacional y VII Congreso Hispano-Francés de AEDEM*, Lleida, pp. 1135-1148.

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1997b): "Leyes financieras favorables a la escindibilidad del plazo temporal". *Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras,* Barcelona, pp. 33-54.

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1997c): "Función de escindibilidad de una ley financiera". *XI Reunión ASEPELT*, Bilbao, publicación en CD-ROM.

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1997d): "Una generalización del concepto de escindibilidad en las leyes financieras". *Estudios de Economía Aplicada* **8**, pp. 5-23.

CRUZ , S. y VALLS M. C. (1997e): "Leyes financieras escindibles para una operación y según una acción". *V Foro de Finanzas*, Málaga, pp. 479-499.

GIL PELÁEZ, L. (1992): *Matemática de las operaciones financieras*. Ed. AC, Madrid.

FÜRST, D. (1960): "Funzioni e leggi di capitalizzazione subadditive". *Giornale dell'Istituto italiano degli attuari*, año XXIII, pp. 56-78.

LEVI, E. (1974): *Curso de matemática financiera y actuarial. I*. Ed. Bosch, Barcelona.