

LA FUNCION DE UTILIDAD Y EL ANALISIS MEDIA-VARIANZA

José Miguel Casas Sánchez
Universidad de Alcalá de Henares

RESUMEN

En este trabajo partiendo de la axiomática de Von Neumann y Oscar Morgenstern estudiamos los fundamentos del análisis media-varianza, así como la consistencia de la ordenación de alternativas. Llegamos a ver en primer lugar que la función de utilidad media-varianza es cuadrática para la ordenación de preferencias, sin embargo cuando pretendemos obtener estrategias óptimas no es necesario que la función de utilidad sea cuadrática. Terminamos introduciendo los parámetros de localización y escala en la función de utilidad media-varianza.

Palabras clave: utilidad, análisis media-varianza, estrategias, alternativas, ordenación, carteras.

CLASIFICACION AMS: 62C05

1. INTRODUCCION

Empezamos admitiendo la axiomática de Von Neumann y Oscar Morgenstern, la cual nos garantiza la existencia de una función de utilidad, a partir de la cual definimos una función de utilidad media-varianza. En el apartado 3 planteamos un modelo decisivo sobre el conjunto de estrategias puras y mixtas, en donde la relación de preferencia establecida verifica la axiomática de Neumann Morgenstern y llegamos a conocer la forma de la función de utilidad media-varianza, que es una función cuadrática y verifica las condiciones del teorema de Von Neumann. En el siguiente apartado realizamos una extensión de lo anterior, para el caso en que al decisor ya no le interesa una ordenación consistente de preferencias sino que pretende seleccionar estrategias óptimas. Introducimos la dominancia de carteras y llegamos a demostrar que se puede utilizar el análisis media-varianza para las elecciones óptimas sin que la función de utilidad sea cuadrática.

Por último analizamos la función de utilidad media-varianza introduciendo una condición referente a los parámetros localización y escala, sin tener que aceptar la utilidad cuadrática.

2. TEORIA DE NEUMANN-MORGENSTERN Y EL ANALISIS MEDIA-VARIANZA

Entre todas las axiomáticas y teorías sobre utilidad desarrolladas, es sin

duda la de Von Neumann y Oscar Morgenstern la que sigue siendo casi generalmente aceptada en la actualidad. Como los propios autores indican la elección de una axiomática no es una tarea puramente objetiva, se debe dar alguna definición, así como algún teorema específico derivado los axiomas, los cuales no deberán ser demasiado numerosos y cada uno de ellos deberá tener un significado intuitivo inmediato por el cual sus propiedades fuesen deducidas directamente y aplicadas a la realidad de la teoría de la utilidad y de la toma de decisiones.

En este trabajo admitiremos la axiomática de Neumann Morgenstern, la cual nos permite, a través del teorema de Von Neumann, garantizar la existencia de una función de utilidad U definida sobre el conjunto de resultados o consecuencias Ω , que toma valores sobre la recta real R y tal que es fiel, es lineal, es única salvo transformaciones lineales positivas y queda perfectamente determinada fijando el valor de la función de utilidad para dos perspectivas o consecuencias.

Así pues, dadas dos alternativas a_1 y a_2 , cuyos correspondientes resultados o consecuencias aleatorias son X_1 y X_2 y sus respectivas funciones de distribución $F_1(x; \mu_1, \sigma_1^2)$ y $F_2(x; \mu_2, \sigma_2^2)$ entonces existe una medida o función de utilidad, definida sobre el conjunto de resultados, $U(x)$ tal que X_1 es preferida a X_2

$$X_1 \succ X_2 \Leftrightarrow E[U(X_1)] > E[U(X_2)] \quad (1)$$

y mediante el análisis media-varianza podemos expresar la esperanza matemática de la utilidad como una función $V(\mu_i, \sigma_i^2)$ de la media $\mu_i = E[X_i]$ y de la varianza $\sigma_i^2 = E[X_i - \mu_i]^2$ de los resultados o consecuencias X_i , de tal manera que:

$$V(\mu_i, \sigma_i^2) = E[U(X)] = \int U(x) dF_i(x)$$

y la expresión (1) se puede escribir como:

$$X_1 \succ X_2 \Leftrightarrow V(\mu_1, \sigma_1^2) > V(\mu_2, \sigma_2^2)$$

de tal manera que diremos que "el resultado o consecuencia X_1 es preferido al X_2 si y solamente las respectivas funciones media-varianza verifican que $V(\mu_1, \sigma_1^2) > V(\mu_2, \sigma_2^2)$."

3. LA FUNCION DE UTILIDAD EN LA ORDENACION DE ALTERNATIVAS

Consideramos un problema de decisión en donde representamos por Ω el conjunto de los posibles resultados o consecuencias de una inversión o cartera, que puede tomar valores sobre la recta real. Sea $E^* = \{e_i^*/i=1,2,...,n\}$ el conjunto finito de alternativas o **estrategias puras** (1) mutuamente excluyentes, una de las cuales puede elegir el decisor. Designaremos los resultados o consecuencias de cada estrategia para e_i^* , por la variable aleatoria X_i , $i=1,2,...,n$, que toma los valores dentro del conjunto Ω de resultados o consecuencias.

Notaremos por E el conjunto de **estrategias mixtas** (2), evidentemente $E^* \subset E$, el conjunto de estrategias puras está contenido en el conjunto de estrategias mixtas. Los resultados o consecuencias en las estrategias se pueden expresar como una combinación lineal o mixtura de los Resultados ($X_1, X_2, \dots, X_n$) de las estrategias puras, con probabilidades $p = (p_1, \dots, p_n)$, cuya correspondiente función de distribución puede expresarse como:

$$F_p(x) \equiv \sum_{i=1}^n p_i F_i(x)$$

Consecuentemente las preferencias del decisor se realizan sobre los elementos del conjunto E de estrategias mixtas o sobre el conjunto de mixturas probabilísticas de $(X_1, \dots, X_n)$ para e_p en el conjunto de estrategias mixtas E .

Para llegar a conocer la forma de la función de utilidad de Neumann-Morgenstern en el análisis media-varianza daremos el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Si el conjunto de resultados o consecuencias con la relación de preferencia establecida sobre sus distribuciones correspondientes a las diferentes alternativas o estrategias mixtas en A satisface la axiomática de Neumann-Morgenstern, entonces la función de utilidad media-varianza $V(\mu, \sigma^2)$ que verifica esa ordenación será una función de utilidad cuadrática que verifica las condiciones del teorema de Von Neumann.

Demostración

Consideremos dos alternativas o estrategias puras e_1^* y e_2^* tales que $e_1^* \sim e_2^*$, es decir que e_1^* es indiferente a e_2^* .

Entonces el decisor será indiferente entre las estrategias puras e_1^* , e_2^* y

la estrategia mixta

$$e_q = \begin{pmatrix} e_1^* & e_2^* \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

donde $q \in [0,1]$, y cuando:

$$q = 0 \Rightarrow e_q \equiv e_2^*$$

$$q = 1 \Rightarrow e_q \equiv e_1^*$$

Designando por μ_i y σ_i^2 la media y la varianza de las distribuciones correspondientes a las alternativas o estrategias puras, una curva de indiferencia sería el lugar geométrico de los pares (μ_q, σ_q^2) para $q \in [0,1]$.

La media μ_q , y la varianza σ_q^2 de la estrategia mixta e_q son:

$$\begin{aligned} \mu_q &= E[X] = \int x d(qF_1(x) + (1-q)F_2(x)) = \\ &= q \int x dF_1(x) + (1-q) \int x dF_2(x) = \\ &= q\mu_1 + (1-q)\mu_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= E[X - E[X]]^2 = \int (x - q\mu_1 - (1-q)\mu_2)^2 d(qF_1(x) + (1-q)F_2(x)) = \\ &= \int [q(x-\mu_1) + (1-q)(x-\mu_2)]^2 d[qF_1(x) + (1-q)F_2(x)] = \\ &= \int [q^2(x-\mu_1)^2 + 2q(1-q)(x-\mu_1)(x-\mu_2) + (1-q)^2(x-\mu_2)^2] d(qF_1(x) + (1-q)F_2(x)) = \\ &= q\sigma_1^2 + (1-q)\sigma_2^2 + q(1-q)(\mu_1 - \mu_2)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Despejando q de la expresión (2) se tiene:

$$q = \frac{\mu_q - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

sustituyendo en (3) y simplificando resulta:

$$\mu_q = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2} (\mu_q^2 + \sigma_q^2) = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + \mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

o bien en forma más abreviada tendremos que la curva de indiferencia es de

la forma:

$$\mu_q - h(\mu_q^2 + \sigma_q^2) = k \Rightarrow \sigma_q^2 = \frac{1}{b} (\mu_q - b\mu_q^2 - k) \quad (4)$$

en donde h y k son constantes

$$q \quad \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2} = h \quad y \quad \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 - \mu_2) + \mu_2 \sigma_1^2 - \mu_1 \sigma_2^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2} = k$$

lo cual nos lleva a que:

$$V(\mu_q, \sigma_q^2) = \mu_q - h(\mu_q^2 + \sigma_q^2) = \int (x - hx^2) dF_q(x)$$

y la función de utilidad de Neumann-Morgenstern que corresponde a $V(\mu_q, \sigma_q^2)$ es la función cuadrática (3)

$$U(x) = x - hx^2$$

Luego hemos llegado a que efectivamente la relación de preferencia establecida que satisface la axiomática de Neumann-Morgenstern y que puede ser representada por una función de utilidad ordinal $V(\mu_q, \sigma_q^2)$ que depende solamente de la media y de la varianza de la distribución puede únicamente ser representada por una función de utilidad cuadrática de Neumann-Morgenstern, que generará una ordenación de las alternativas o estrategias mixtas del conjunto A que será consistente con los axiomas de Neumann-Morgenstern.

No obstante esta función de utilidad cuadrática tiene algunas limitaciones que restringen su aplicabilidad. En primer lugar, como las preferencias verifican la propiedad de monotonicidad el campo de variación del conjunto de resultados o consecuencias se limita al intervalo $(-\infty, 1/2b)$, y en segundo lugar la función de utilidad cuadrática de Neumann-Mongerstern presenta un aumento absoluto de aversión al riesgo. También se podría indicar que la función de utilidad cuadrática no es acotada, y entonces la única función cuadrática que puede ser utilizada para ordenar todas las distribuciones es una función constante, no obstante en la práctica esta dificultad se puede evitar limitando el conjunto de funciones de distribución a aquellas para las cuales la utilidad esperada existe.

Otra consideración sería la indicada por BORCH (1989) para las preferencias que satisfacen los axiomas de Neumann-Morgenstern, pues indica la posible limitación de una función de utilidad cuadrática, ya que si las preferencias satisfacen la axiomática de Neumann-Morgenstern, entonces no se puede ser indiferente entre todas las distribuciones de probabilidad que tienen sus medias y varianzas sobre la misma curva de indiferencia, pero si la clase de distribuciones se restringe a aquellas que tienen resultados o consecuencias tales que la utilidad marginal es no negativa entonces existe la función de utilidad cuadrática de Neumann-Morgenstern para las correspondientes curvas de indiferencia sobre el dominio restringido.

Consecuentemente podemos decir que si un individuo tiene preferencias que satisfacen los axiomas de Neumann-Morgenstern y que se pueden representar por una función de utilidad media-varianza, el individuo no puede ser indiferente entre todas las distribuciones que tienen la misma media y varianza.

4. EXTENSION DEL ANALISIS MEDIA VARIANZA

En el apartado anterior se ha demostrado que las preferencias que pueden ser representadas únicamente en función de medias y varianzas son consistentes con los axiomas de Neumann-Morgenstern si y solamente si la correspondiente función de utilidad es cuadrática y la utilidad marginal es no negativa sobre el dominio de resultado o consecuencias. Sin embargo el objetivo del decisor puede no ser proporcionar una ordenación consistente de preferencias de las posibles alternativas o estrategias sino que puede ser seleccionar la estrategia óptima. Para la elección de la alternativa o estrategia óptima consideraremos el contexto de un problema de inversión o cartera de inversión en la cual las estrategias puras corresponden a la inversión de una cantidad en cada uno de los posibles proyectos o valores, pero esa cantidad no tiene que ser fija, es decir el decisor puede invertir la proporción p_i en valor i -ésimo, de tal manera que si designamos por X_i el resultado o conversión de la estrategia pura e^*_i , el beneficio o resultado de la cartera será:

$$X_q = \sum_{i=1}^n p_i X_i$$

Sea C^* el conjunto de todas las posibles carteras, en donde $e_p \in C^*$ indica una cartera correspondiente al vector de proporciones $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$

Notaremos por C el conjunto correspondiente a todas las estrategias mixtas, que en este caso estarían formadas por carteras del conjunto C^* . Evidentemente $e^* \in C^*$, y $C^* \subset C$.

El trabajo de TOBIN (1958) (4) puede ser utilizado para demostrar que las distribuciones de las carteras pueden ser ordenados en términos de medias y varianzas. Los axiomas de Neumann-Morgenstern están definidas sobre el conjunto C que contiene al conjunto C^* y todas las distribuciones que pueden ser generadas formando estrategias aleatorizadas entre las carteras en C^* . Así, por ejemplo, una mixtura de dos distribuciones normales es bimodal con función de densidad

$$f(x/\mu_q, \sigma_q^2) = q f_N(x/\mu_1, \sigma_1^2) + (1-q) f_N(x/\mu_2, \sigma_2^2)$$

donde μ_q y σ_q^2 vienen dados por las expresiones (2) y (3) y f_N indica la función de densidad normal.

Pero como siempre se pueden construir estrategias aleatorizadas, la hipótesis de normalidad no es suficiente para poder utilizar el análisis media-varianza para ordenar todas las alternativas de una manera consistente con la axiomática de Neumann-Morgenstern, salvo que la función de utilidad $U(X)$ sea cuadrática. Sin embargo si el objetivo es seleccionar la decisión óptima de los conjuntos C^* ó C , las mixturas de probabilidades generalmente pueden ser excluidas del análisis como posible candidato para ser óptimas, ya que cada estrategia mixta es dominada por alguna estrategia pura y/o por una cartera, pudiendo entonces ser utilizado el análisis media-varianza con una clase extendida de funciones de utilidad de Neumann-Morgenstern.

El primer caso en el cual las estrategias mixtas pueden ser eliminadas como posibles decisiones óptimas es cuando tanto las estrategias puras como las estrategias mixtas pueden ser seleccionadas en un problema de decisión, este sería el caso si las estrategias puras corresponden a alternativas mutuamente excluyentes.

Para demostrar que una estrategia mixta no será óptima, demostraremos el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Sean e_1^* y e_2^* dos estrategias puras pertenecientes al conjunto C^* , tales que e_1^* es preferido a e_2^* , $e_1^* \succ e_2^*$, y sea la estrategia mixta $e_q \in C$, entonces se verifica que e_1^* es preferido o domina a e_q , $e_1^* \succ e_q$, para $\forall q \in [0,1]$.

$$e_q = \begin{pmatrix} e_1^* & e_2^* \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Demostración

Es casi inmediata, basta obtener las esperanzas de las utilidades para ambas estrategias y tendríamos:

$$\begin{aligned} E[U(X_q)] &= \int U(x) d[qF_1(x) + (1-q)F_2(x)] = \\ &= q \int U(x) dF_1(x) + (1-q) \int U(x) dF_2(x) = \\ &= q E[U(X_1)] + (1-q) E[U(X_2)] < \\ &< E[U(X_1)] \Rightarrow e_1^* > e_q \end{aligned}$$

lo cual es evidente ya que $q \in [0,1]$.

Luego vemos que la estrategia pura óptima domina a las estrategias mixtas, y consecuentemente las estrategias mixtas pueden ser excluidas en la elección de la estrategia óptima (5).

Si en el problema de decisión no son posibles las estrategias puras, de manera que las estrategias mixtas no pueden ser excluidas utilizando el argumento anterior, entonces se puede demostrar que para toda función de utilidad $U(x)$ estrictamente cóncava una estrategia mixta e_q es dominada por la correspondiente cartera e_r cuando $q = r$ y para ello enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA 3.

Una cartera e_r domina (es dominada por) a la estrategia mixta e_q , $q = r$, para toda función de utilidad de Neumann-Morgenstern estrictamente cóncava (convexa), y e_r es indiferente a e_q cuando la función de utilidad es lineal.

Demostración

Teniendo en cuenta la desigualdad de Jensen para dos resultados o consecuencias x_1, x_2 , $x_1 \neq x_2$ tendremos:

$$U(q(x_1) + (1-q)x_2) > (<) qU(x_1) + (1-q)U(x_2); q \in [0,1]$$

para $U(x)$ estrictamente cóncava. Pero como x_1 y x_2 son valores particulares o realizaciones de X_1 y X_2 , podemos tomar esperanzas con respecto a la dis-

tribución conjunta de (X_1, X_2) :

$$\begin{aligned} E[U(qX_1 + (1-q)X_2)] &= \int U[qx_1 + (1-q)x_2]dF(x_1, x_2) = \\ &= E[U(X_r)]_{r=q} \geq (\leq) \int [qU(x_1) + (1-q)U(x_2)]dF(x_1, x_2) = \\ &= q \int U(x_1)dF_1(x_1) + (1-q) \int U(x_2)dF_2(x_2) = E[U(X_q)] \end{aligned}$$

De donde se deduce, que efectivamente si una cartera puede ser formada con la correspondiente estrategia mixta, entonces las estrategias mixtas pueden ser excluidas del conjunto de las posibles decisiones óptimas cuando el decisor tienen aversión al riesgo (6).

Vemos pues que se puede utilizar el análisis media-varianza para la elección de una alternativa óptima sin necesidad de imponer la restricción de que la función de utilidad se corresponda con una función de utilidad Neumann-Morgenstern cuadrática.

Si solamente tenemos estrategias puras y las estrategias mixtas que se pueden generar a partir de ellas, tenemos que realizar la elección óptima entre ellas, entonces alguna estrategia pura es al menos tan preferida como cada estrategia mixta, así pues

$$\max_e E[U(X)] = \max_{e^*} E[U(X)] \text{ para toda } U(x) \text{ creciente}$$

Si las carteras pueden ser formadas por estrategias puras, cualquier decisor con aversión al riesgo preferirá una cartera a la correspondiente estrategia mixta, pues

$$\max_e E[U(X)] = \max_{e^*} E[U(X)]$$

para toda función de utilidad $U(x)$ creciente y cóncava.

5. LA FUNCION DE UTILIDAD MEDIA-VARIANZA Y LA CONDICION LS

Sabemos que existen diferentes enfoques para representar las preferencias del decisor sobre las estrategias que dan lugar a resultados o consecuencias aleatorias. Así pues con el análisis media-varianza se pueden ordenar las alternativas de acuerdo al valor de una función definida sobre la media y la varianza, o desviación estándar, $V(\mu_i, \sigma_i)$, mientras que el criterio de la utilidad esperada utiliza el valor esperado de la función de utilidad definida sobre los resultados o consecuencias. El hecho de existir diferentes enfoques ha generado abundante literatura, así pues algunos autores analizan las ventajas y los inconvenientes de cada uno de los enfoques, mientras que otros estudian las condiciones bajo las cuales los diferentes enfoques

conducirían a los mismos resultados, o al menos aproximadamente.

Evidentemente algunas restricciones deben de ser realizadas sobre el decisor o sobre el conjunto de variables aleatorias que comprenden el conjunto elección si se quiere asegurar cierta consistencia entre la ordenación de las alternativas mediante el análisis media-varianza y mediante el criterio de la utilidad esperada. Así pues, en apartados anteriores decíamos que la función de utilidad tenía que ser cuadrática, o imponíamos alguna otra restricción.

Cuando se utiliza una hipótesis para garantizar que el análisis media-varianza y la utilidad esperada producen una ordenación consistente de las alternativas, entonces esa hipótesis puede también utilizarse para desarrollar relaciones en ambas aproximaciones. Así pues, veíamos que admitiendo una función de utilidad cuadrática en el análisis media-varianza teníamos una función del tipo:

$$V(\mu, \sigma) = \mu - h(\mu^2 + \sigma^2)$$

obteniendo como curvas de indiferencias semi-círculos concéntricos.

También se puede demostrar que si los resultados o consecuencias aleatorias se distribuyen normalmente, entonces la función de utilidad media-varianza $V(\mu, \sigma^2)$ satisface la ecuación diferencial:

$$2 \frac{\partial V}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}$$

o bien si la expresamos en función de la desviación estándar (7), sería:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}$$

Pero las dos condiciones que estábamos utilizando hasta ahora, la utilidad cuadrática y la normalidad, no siempre son aceptadas de forma general para obtener una ordenación consistente. Por ello introducimos la condición LS (parámetro localización y escala) y diremos siguiendo la definición dada por W. Feller que "dos funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$ difieren solamente en sus parámetros localización y escala α y β , si se verifica que

$$F_1(x) = F_2(\alpha + \beta x), \text{ con } \alpha \neq 0 \text{ y } \beta > 0$$

Con el fin de especificar más concretamente la condición LS y al mismo tiempo establecer las relaciones concernientes a las representaciones bajo las aproximaciones media-desviación estándar y utilidad esperada, supongamos la existencia de un conjunto elección en el cual todas las variables aleatorias Y_i , cuyas medias μ_i y varianzas σ_i^2 existen, difieren unas de otras solamente por los parámetros localización y escala, y sea X la variable obtenida a partir de Y_i utilizando la transformación:

$$X = \frac{Y_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

La utilidad esperada de Y_i , puede escribirse como:

$$E[U(Y_i)] = \int_a^b U(y_i) dF(x) = \int_a^b U(\mu_i + \sigma_i x) dF(x) = V(\mu_i, \sigma_i) \quad (5)$$

donde (a, b) es el intervalo de definición de X , que puede ser finito o infinito.

La expresión (5) define la función de preferencia media-desviación estándar asociada con cualquier función de utilidad $U(Y_i)$ en el modelo utilidad esperada, y se utiliza como punto de partida para el análisis de las propiedades relativas a $V(\mu, \sigma)$. No se impone ninguna restricción sobre la forma de la función de utilidad ni sobre $F(x)$.

Para analizar la función $V(\mu, \sigma)$, empezaremos por obtener sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = V_\sigma(\mu, \sigma) = \int_a^b U'(\mu + \sigma x) dF(x) = \int_a^b U''(\mu + \sigma x) \int_a^x x dF(x) dx$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = V_\mu(\mu, \sigma) = \int_a^b U'(\mu + \sigma x) dF(x)$$

Entre las propiedades de la función $V(\mu, \sigma)$ tenemos:

$$I. \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} \geq 0, \forall \mu, \sigma \geq 0 \Leftrightarrow U'(\mu + \sigma x) \geq 0, \forall \mu + \sigma x$$

$$II. \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} \leq 0, \forall \mu, \sigma \geq 0 \Leftrightarrow U''(\mu + \sigma x) \leq 0, \forall \mu + \sigma x$$

la demostración es bastante trivial, pues basta tener presente que $E[X] = 0$ y por tanto

$$\int_a^x x dF(x) \leq 0$$

Si designamos por $S(\mu, \sigma)$ la pendiente de una curva de indiferencia, tendremos:

$$S(\mu, \sigma) = \frac{\frac{\partial V}{\partial \sigma}}{\frac{\partial V}{\partial \mu}} = \frac{- \int_a^b U'(\mu + \sigma x) x dF(x)}{- \int_a^b U'(\mu + \sigma x) dF(x)} =$$

$$= \frac{\int_a^b (U''(\mu + \sigma x) \int_a^x x dF(x)) dx}{\int_a^b U'(\mu + \sigma x) dF(x)}$$

$$III. \quad S(\mu, \sigma) \geq 0, \forall \mu, \sigma \geq 0 \Leftrightarrow U'(\mu + \sigma x) \geq 0 \text{ y } U''(\mu + \sigma x) \leq 0, \forall \mu + \sigma x$$

$$IV. \quad V(\mu, \sigma) \text{ es una función cóncava para } \forall \mu \text{ y } \forall \sigma > 0 \Leftrightarrow U''(\mu + \sigma x) \leq 0 \text{ para } \forall \mu + \sigma x$$

Para demostrarla basta con analizar los signos de las derivadas segundas.

Esta propiedad es especialmente útil en modelos económicos en los cuales $V(\mu, \sigma)$ es maximizada sobre posibles conjuntos que son también convexos.

REFERENCIAS

BORCH, K. (1989). "A note on uncertainty and Indifference Curves". Review of Economic Studies. Volumen 56. Pág. 1-4.

CASAS-SANCHEZ, J. (1975). Algunas cuestiones sobre Teoría de la Utilidad. Aplicaciones a la Economía de Consumo. Universidad de Sevilla.

CHIPMAN, J.S. (1971). Non-Archimedean Behavior Under Risk: An Elementary Analysis. New York.

CHIPMAN, J.S. (1973). "The Ordering of Portfolios in Terms of Mean and Variance". Review of Economic Studies. Vol. 40. Pág. 167-190.

FISHBURN, P.C. (1974). "Convex Stochastic Dominance with Continuous Distribution Functions". Journal of Economic Theory. Vol. 7. Pág. 143-158.

FISHBURN, P.C. (1983). "Transitive Measurable Utility". Journal of Economic Theory. Vol. 31. Pág. 293-317.

LEVY and MARKOWITZ (1989). "Aproximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance". American Economic-Review. Vol. 69. Pág. 308-317.

TOBIN, J. (1958). "Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk". Review of Economic Studies. Vol. 25. Pág. 65-86.

VON NEUMAN and O. MORGENTERN (1947). "The Theory of Games and Economic Behavior". Princenton University Press.

NOTAS

(1) Una alternativa o estrategia pura es considerada como aquella que nos conduce con probabilidad unidad a un resultado o consecuencia.

(2) A partir del conjunto de estrategias puras el decisor puede extender este conjunto al conjunto de estrategias mixtas E , para ello basta con aleatorizar el conjunto de estrategias puras, es decir asignándole una probabilidad p_i a cada estrategia pura e_i , así pues una estrategia mixta vendrá caracterizada por un vector de probabilidad asociado $p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ de tal manera que le asigna probabilidad p_i a la estrategia pura e_i . Notaremos la estrategia mixta por e_p y la podemos expresar como:

$$e_p = \begin{pmatrix} e_1^* & e_2^* & \dots & e_n^* \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

de forma que se obtiene el resultado o consecuencia de la estrategia pura e_i con probabilidad p_i y así sucesivamente el resultado o consecuencia de la estrategia pura e_n con probabilidad p_n . Cuando el vector de probabilidad asociado sea el $p = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ entonces la estrategia mixta e_p coincide con la estrategia pura e_i .

(3) Las correspondientes curvas de indiferencia en el semi-plano (μ, σ^2) tiene como pendiente

$$\frac{d\sigma^2}{d\mu} = \frac{1 - 2b\mu}{b}$$

mientras que en el semi-plano (μ, σ) son semi-círculos concéntricos con centro en el punto $(1/2b, 0)$ y pendiente

$$\frac{d\sigma}{d\mu} = \frac{1 - 2b\mu}{2b\sigma}$$

(4) Algunos autores han empleado el análisis media-varianza para analizar decisiones óptimas sin especificar una función de utilidad cuadrática. Así pues, en el contexto de análisis de carteras si el resultado de cada acción o estrategia pura se distribuye normalmente, las distribuciones generadas por las posibles carteras formadas son normales.

(5) Este resultado se verifica para toda función de utilidad $U(x)$ de Neumann-Morgenstern creciente.

(6) Estos dos teoremas se verifican en general y no dependen de sí la función de utilidades esperada puede ser representada únicamente en términos de medias y varianzas.

(7) A partir de ahora nos vamos a referir a $V(\mu, \sigma)$ para simplificar los cálculos.