

CONSIDERACIONES SOBRE LA PROGRAMACION DINAMICA POR METAS

R. Caballero Fernández
A. González Pareja
Dpto. Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Málaga

En el proceso de modelización económica, son múltiples las circunstancias que nos conducen ante un problema con varios objetivos normalmente contrapuestos, y no siempre comparables e incluso en diversas ocasiones con distinta prioridad o rango.

Si los diversos objetivos se pueden ordenar por una importancia relativa la resolución del problema consistirá en determinar políticas que aseguran la consecución de las metas requeridas de una manera satisfactoria, dentro de los niveles de prioridad establecidos.

Sobre la base de estas consideraciones, nuestro interés se centra en llevar a cabo la formulación del problema matemático que se genera, así como el establecimiento de métodos que nos resuelven el problema planteado.

En primer lugar explicitamos varios posibles esquemas del planteamiento matemático de la optimización dinámica por metas, desde el punto de vista de los objetivos y los niveles de aspiración que deseamos conseguir, con el fin de dar una metodología general que pueda abarcar al mayor número de casos posibles. Posteriormente expondremos algunos de los métodos más eficaces para su resolución. Finalmente comentaremos las modificaciones a tener en cuenta en el caso de problemas en tiempo discreto o con un gran número de variables o restricciones.

Es conveniente puntualizar por último, que existen múltiples facetas de índole estadístico y econométrico que no abordamos, centrándonos en la formulación del problema determinista dinámico que pudiera servir de inicio para la consecución del más general y global.

1. EL MODELO DE LA OPTIMIZACION DINAMICA POR METAS

En nuestro problema dinámico existirán dos tipos de variables: las de estado o endógenas, que nos miden la evolución del sistema a lo largo del tiempo y denotamos $x(t)$, y las de control o exógenas instrumentales, que nos recogen las decisiones realizadas a lo largo del proceso, y que escribiremos $u(t)$, siendo t la variable tiempo que consideraremos de forma continua. En concreto, nuestro modelo vendrá expresado por el sistema diferencial:

$$x'(t) = h(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0,$$

donde consideramos que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y el período de planificación ven-

drá dado por $[t_0, T]$. Asimismo, podremos considerar que existen s restricciones sobre nuestras variables de estado y/o control:

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0.$$

Nuestros objetivos vendrán expresados mediante funcionales que nos recogen la evolución a lo largo del tiempo o en el instante final de ciertas medidas de las variables de estado y/o control, es decir, consideramos p objetivos:

$$J(x(t), u(t)) = (J_1(x(t), u(t)), J_2(x(t), u(t)), \dots, J_p(x(t), u(t)))$$

donde cada J_i toma la forma:

$$J_i(x(t), u(t)) = \int_{t_0}^T f_i(x(t), u(t), t) dt$$

Si estuviéramos abordando un problema de control óptimo multiobjetivo, éste vendría formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } J(x(t), u(t)) \\ &\text{s.a. } x'(t) = h(x(t), u(t), t) \\ &\quad x(t_0) = x_0 \\ &\quad g(x(t), u(t), t) \leq 0, \end{aligned}$$

donde, añadidas a las anteriores, pueden aparecer condiciones terminales sobre nuestras variables.

Sin embargo, el problema principal en cualquier planteamiento multiobjetivo se deriva de la dificultad para establecer una ordenación racional en el espacio $\mathbb{R}^p$. Si el objetivo es minimizar los funcionales J_i , es claro que una combinación es preferida a otra en la que todos aumentan de valor, pero ¿cuál elegir si unos aumentan y otros disminuyen? En la literatura existen diversos métodos para establecer ordenaciones, atendiendo a diversos criterios. Nosotros utilizaremos la técnica de programación por metas. En ella, el decisor, consciente de la imposibilidad en general de minimizar todos los J_i , establece unas prioridades entre los mismos así como unos niveles mínimos (o máximos) de aspiración para cada objetivo (metas), de forma que se considera satisfactoria toda combinación en la que cada objetivo se mantenga dentro de los límites fijados. En caso de no existir combinaciones admisibles

que verifiquen todas las metas, se considerará como "mejor" solución aquella que quede más cerca de la satisfacción de las mismas a los niveles más altos de prioridades, es decir, consideramos el orden inducido por la relación "**a** es preferido a **b** lexicográficamente" si y sólo si

$$a_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad \text{y} \quad a_r < b_r$$

En un planteamiento dinámico, la imposición de metas puede enfocarse de dos formas distintas: como una cota global sobre los valores finales de los funcionales, o bien como una cota dinámica sobre el valor acumulado de los mismos a lo largo del período. En el primer caso, el vector de metas es de la forma:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$$

y se puede imponer a cada funcional con desigualdad o igualdad:

$$J_1(x(t), u(t)) \leq \alpha_1,$$

$$\text{ó} \quad J_1(x(t), u(t)) \geq \alpha_1,$$

$$\text{ó} \quad J_1(x(t), u(t)) = \alpha_1.$$

En el segundo enfoque, el vector de metas es una función del tiempo:

$$\alpha: [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_p(t))$$

resultando en este caso relaciones de la forma:

$$\int_{t_0}^t f_1(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq \alpha_1(t),$$

$$\text{ó} \quad \int_{t_0}^t f_1(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \geq \alpha_1(t),$$

$$\text{ó} \quad \int_{t_0}^t f_1(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau = \alpha_1(t).$$

La filosofía de la programación por metas se basa en la introducción, por parte del decisor, de niveles de prioridad entre sus objetivos, de forma que

está dispuesto a renunciar a la obtención de mejores resultados en las metas de un nivel, una vez verificadas, en beneficio de la consecución de metas posteriores. Cada nivel de prioridades puede comprender uno o más objetivos, siempre que éstos sean comparables, pudiendo medir mediante ponderaciones la importancia relativa asignada a las metas que comparte un mismo nivel.

Así, si se introducen r niveles de prioridad, el problema se descompone en r subproblemas, tendentes a lograr en cada uno de las metas correspondientes, manteniendo las ya logradas en los anteriores.

En el caso en el que se introducen las metas como condiciones globales terminales, la idea consiste en minimizar en cada nivel la suma ponderada de los funcionales correspondientes (suponiendo, por comodidad en la notación, que todas las metas son de la forma menor o igual), imponiendo como restricción la satisfacción de los anteriores:

$$\text{NIVEL K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Mín } R_k(x, u) = \sum_{i \in N_k} \mu_i J_i(x(t), u(t)) \\ (P_k) \quad \text{s.a. } \begin{array}{l} x'(t) = h(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ g(x(t), u(t), t) \leq 0 \\ J_j(x(t), u(t)) \leq \alpha_j \quad j \in (N_1, \dots, N_{k-1}) \end{array} \end{array} \right.$$

donde denotamos $i \in N_k$ si el funcional J_i es uno de los objetivos del nivel k . El funcional R_k se puede considerar como una función de realización que incorpora las ponderaciones μ_i asignadas a los diferentes funcionales del nivel, y mide el grado de realización de las metas. Así, si $(u^*(t), x^*(t))$ soluciona el problema P_k y, para estas soluciones, se verifica que

$$J_i(x^*(t), u^*(t)) \leq \alpha_i, \quad \forall i \in N_k,$$

entonces se han conseguido las metas del nivel k , y se puede pasar al siguiente. En caso contrario, no se puede deducir que es imposible verificar las metas impuestas en el nivel k sin renunciar a las ya conseguidas en niveles anteriores, puesto que en la minimización de la función de realización puede ocurrir que o bien la ponderación o el propio objetivo tenga un mayor peso en la función con lo cual es posible que existan trayectorias que verifiquen todas las metas aunque no sea el mínimo de la función de realización.

Este hecho puede resolverse de dos formas, la primera consiste en mantener un único objetivo por prioridad, o bien realizar un análisis interactivo sobre las ponderaciones μ_i . En este caso, se pueden cambiar las ponderaciones y volver a iniciar el método.

Debemos hacer resaltar que el último bloque de restricciones en el problema P_k correspondientes a las prioridades anteriores, permiten una cierta flexibilidad en el nivel actual con respecto a los mismos pues algunos de los valores conseguidos por los objetivos pueden verse empeorados, siempre dentro de los niveles marcados por las metas, y con el fin de cumplir exigencias posteriores.

Para el segundo enfoque, es necesario introducir variables de desviación que midan, en cada instante cuán lejos se encuentra la solución actual de verificar las metas dadas. Así, se puede expresar para cada i :

$$\int_{t_0}^t f_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + n_i(t) - p_i(t) = \alpha_i(t),$$

donde $n_i(t) \geq 0$ recoge las desviaciones por defecto y $p_i(t) \geq 0$ por exceso con respecto a la meta $\alpha_i(t)$. Con esta notación, en un instante dado t^* , si $p_i(t^*) = 0$, entonces:

$$\int_{t_0}^{t^*} f_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq \alpha_i(t^*),$$

y si $n_i(t^*) = 0$,

$$\int_{t_0}^{t^*} f_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \geq \alpha_i(t^*).$$

Por lo tanto, según que las metas se hayan introducido de las formas menor o igual, mayor o igual, o igualdad, deberemos minimizar $p_i(t)$, $n_i(t)$, o $p_i(t) + n_i(t)$, respectivamente. Supongamos nuevamente que todas las metas son de menor o igual. En este caso, en el nivel k minimizamos una función de realización $R_k(n, p)$ tal que una vez obtenida la solución del problema, entonces si $R_k(n^*, p^*) = 0$, esto implica que, para todo $t \in [t_0, T]$ y para todo $i \in N_k$, es

$$p_i^*(t) = 0,$$

por lo que las correspondientes funciones $(u^*(t), x^*(t))$ verifican las metas del nivel.

$$\text{NIVEL K} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Mín } R_k(n, p) \\ \text{s.a. } \begin{array}{l} x'(t) = h(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ g(x(t), u(t), t) \leq 0 \\ \int_{t_0}^t f_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + n_i(t) - p_i(t) = \alpha_i(t) \quad (i \in N_k) \\ \int_{t_0}^t f_j(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \leq \alpha_j(t) \quad (j \in \{N_1, \dots, N_{k-1}\}) \\ n_i(t), p_i(t) \geq 0 \quad (i \in N_k), \end{array} \end{array} \right. \quad (P_k)$$

En la formulación se han incluido la condición de que se verifiquen las metas de los niveles anteriores, la relación entre las variables de desviación y los funcionales, y las condiciones de no negatividad de las mismas.

La función de realización R_k se puede definir de múltiples formas siempre verificando la condición anterior, y mostrando la distancia entre nuestro objetivo y nuestra meta. La extensión más inmediata del caso estático viene dada por

$$R_k(n, p) = \int_{t_0}^T \left(\sum_{i \in N_k} \mu_i \left(p_i(t) \right) \right) dt.$$

No obstante podrían definirse otras relaciones que penalizaran más los valores estrictamente positivos de las variables de desviación. Por ejemplo:

$$R_k(n,p) = \int_{t_0}^T \left[\sum_{i \in N_k} \mu_i \left(p_i(t) \right)^2 \right] dt.$$

En cualquier caso, un valor óptimo estrictamente positivo de R_k implicará la imposibilidad de verificar las metas.

En el caso de existir otras relaciones entre los objetivos y las metas, como pueden ser una relación entre los integrandos $f_i(x(t), u(t), t)$ y las metas $\alpha_i(t)$ a lo largo de todo el período de planificación o sólo en el instante final, es decir, entre $f_i(x(T), u(T), T)$ y $\alpha_i(T)$, pueden ser analizados como un caso particular de lo expuesto anteriormente.

2. RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS GENERADOS

Los distintos tipos de problemas en los que ha sido transformado nuestro modelo original corresponde con una sucesión de problemas de control óptimo recurrentes que pueden ser expresados de la forma:

$$\begin{aligned}
 \min J(x(t), u(t)) &= \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt \\
 \text{s.a. } x'(t) &= H(x(t), u(t), t) \\
 (1) \quad x(0) &= x_0 \\
 S_j(T, x(T), u(T)) &= 0, \quad j = 1, \dots, s \\
 G_j(x(t), u(t), t) &\leq 0 \quad j = 1, \dots, p \\
 u(t) &\in U
 \end{aligned}$$

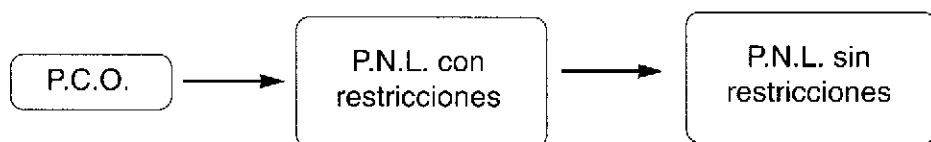
donde hemos supuesto que G_j pueden ser restricciones mixtas, de estado y control, o de estado únicamente. Las restricciones terminales YT , en este caso las hemos tomado:

$$YT = \{y \in \mathbb{R}^{n+m} / S_j(T, y) = 0, j = 1, \dots, s\}$$

Supondremos que la variable de estado es absolutamente continua y la de control, acotada y medible, estando incluidas en éstas las variables de desviación anteriormente utilizadas.

Dichos problemas pueden ser resueltos desde el punto de vista computacional por dos vías o direcciones, la primera mediante la discretización del problema original convirtiendo el mismo en un problema estático, Kraft (1985), Teo y Goh (1987), Teo y Jennings (1989), Teo y Wong (1992), el cual puede ser abordado mediante la utilización de funciones de penalización o de programación cuadrática secuencial. La segunda consiste en utilizar alguna de las dos técnicas anteriores en el espacio de funciones Smith (1984), Mayne y Polak (1987), Machielsen (1988), Smith y Mayne (1988).

En la primera de ellas, que es la que aquí presentamos, la idea que perseguimos consiste en partir de un problema de control óptimo y reducirlo a un problema no lineal, utilizando algún método de discretización. Después, resolveremos este problema no lineal con restricciones, mediante funciones de penalización, reduciéndolo a su vez a un problema no lineal sin restricciones, donde resolveremos mediante programación irrestricta, o bien el problema no lineal restringido puede ser resuelto mediante programación cuadrática secuencial. Por tanto, el esquema básico del algoritmo total para resolver un problema de control según alguna de las discretizaciones mencionadas, sería el siguiente:



En definitiva, tenemos dos partes claramente diferenciadas en el algoritmo. La primera estudia las posibles discretizaciones del problema dado y la segunda utiliza funciones de penalización para la resolución del problema no lineal. Para su implementación, se ha utilizado el lenguaje FORTRAN 77, sobre un equipo DIGITAL 8530, con las ayudas de las librerías NAG y IMSL, versiones 15 y 1.1, respectivamente.

La discretización, aspecto en el cual nos centraremos, puede ser llevada a cabo mediante dos métodos: disparo directo y colocación directa, los cuales hemos implementado para el problema (1). En ambos métodos parametrizamos las variables. En el primero, las variables de control, y en el segundo las de estado y control, es decir, escogido el número de subintervalos de la partición a considerar, que denotaremos por N , elegiremos los puntos en la misma

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

que nosotros hemos escogido igualmente espaciados, aunque es perfectamente posible hacerlo siguiendo algún criterio distinto, como las raíces de los polinomios de Chebyshev; o bien incluirlos como elementos a determinar dentro del método de acuerdo con algún criterio de optimalidad.

Una vez escogida la partición parametrizamos la variable según los valores de la misma, y en su caso de su derivada, en los puntos de la partición, y la aproximamos según funciones constantes a trozos o polinomios de tercer grado de Hermite o spline.

Resaltamos que el proceso de discretización de las variables, función objetivo, restricciones, etc., es casi análogo en los dos métodos, salvo en el tratamiento de las variables que se toman como principales y de la ecuación diferencial. Es por ello que el estudio de estos dos métodos lo vamos a exponer conjuntamente, comentando el fundamento teórico y viendo las particularidades especiales que surgen en cada uno.

Si denotamos por $v(t_i)$ $i = 0, 1, \dots, N$. Los valores correspondientes a la parametrización, es decir, $v(t_i) \in \mathbb{R}^m$ o $v(t_i) \in \mathbb{R}^{n+m}$, dependiendo del método de disparo directo o colocación, la función constante a trozos, continúa por la izquierda, que notamos "w", queda definida por:

$$w(t) = \begin{cases} v(t_j) & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}) \\ v(T) & \text{si } t = T \end{cases}$$

En las otras dos aproximaciones, la idea de partida sería la misma: construir un polinomio de tercer grado que aproxime la función dada; según las condiciones de derivabilidad exigidas, deduciremos el método de aproximación Hermite o spline. Sobre cada subintervalo, consideramos un polinomio de grado tres:

$$a_j(t) = b_j^0 + b_j^1(t - t_j) + b_j^2(t - t_j)^2 + b_j^3(t - t_j)^3$$

cuyos coeficientes serán determinados exigiendo condiciones de derivabilidad para la función w. La aproximación de v, w, la definimos como un polinomio de tercer grado en cada subintervalo y que toma los valores de v en los puntos de la partición, es decir:

$$w(t) = \begin{cases} a_j(t) & \text{si } t \in (t_j, t_{j+1}) \\ v(t_j) & \text{si } t = t_j \text{ para algún } j = 0, \dots, N \end{cases}$$

Ahora bien, exigimos que la aproximación construida, w , sea continua en el intervalo $[t_0, T]$, por lo que se debe cumplir:

$$a_j(t_j) = v(t_j)$$

$$a_j(t_{j+1}) = v(t_{j+1}) \quad j = 1, \dots, N$$

Así, w siempre será continua exigiendo las expresiones anteriores. Según que además, exijamos condiciones de derivabilidad de w , estaremos en un método u otro. Si pedimos que la primera derivada de w sea continua, el método se llama aproximación cúbica a trozos de Hermite y si exigimos que la segunda también lo sea, estamos en el método de aproximación cúbica spline.

El error que cometemos al considerar la variable discretizada por Hermite en lugar de la variable continua, depende del diámetro de la partición y de la derivada de orden cuatro de la función v . Concretamente, viene expresado por el siguiente teorema (Boor, 1978).

TEOREMA 1

Suponemos que v es una función de clase cuatro sobre un intervalo I . Sea w su aproximación cúbica de Hermite construida por el proceso anterior. Entonces, si denotamos por ℓ el diámetro de la partición:

$$\|w(t) - v(t)\| \leq \frac{1}{384} \max_{t \in I} |v^{(4)}(t)| \ell^4 \quad \square$$

Se puede observar que esta aproximación es local, en el sentido que el cálculo de los coeficientes sólo depende de los puntos t_j cercanos a él y no de todos los puntos de la partición dada. En el método de aproximación cúbica spline, exigimos que la segunda derivada de w también sea continua, teniéndose que cumplir, además, las siguientes condiciones:

$$a''_{j-1}(t_j) = a''_j(t_j) \quad j = 2, \dots, N$$

Observemos que este método no es local pues al hallar las soluciones del sistema, dependen de todos los valores t_j de la partición. La expresión del error viene dada por el teorema siguiente (Hall y Meyer, 1976).

TEOREMA 2

Sea v un función de clase cuatro sobre I y w su aproximación construida por el método cúbico spline. Entonces:

$$\|w(t) - v(t)\| \leq \frac{5}{384} \max_{\alpha \in I} |v^{(4)}(\alpha)| \ell^4 \quad \square$$

La expresión de Hermite posee la ventaja de tener una forma analítica de los coeficientes en función de los valores de la parametrización pudiéndose obtener la de su derivada.

Como último comentario, diremos que las discretizaciones de las variables estudiadas, como es lógico, no son únicas y se pueden intercambiar por otras. Así, en el caso que no tengamos o no deseemos información sobre las derivadas de las variables de control, podemos utilizar los polinomios de Bessel.

Una vez que hemos reducido las variables al espacio finito dimensional, pasamos a la construcción de un problema no lineal de la siguiente forma.

El funcional del problema inicial,

$$\int_0^T F(x(t), u(t), t) dt$$

para cada valor de la parametrización, se aproxima mediante una cuadratura, obteniendo su valor en el mismo, conociendo los puntos de la partición y las aproximaciones de $x(t)$ y de $u(t)$; así, obtenemos en general una función no lineal, dependiente de las variables consideradas, es decir, en disparo directo, $m_x(N+1)$ y en colocación directa $(m+n)x(N+1)$; en cualquier caso, notaremos a estas variables de forma general " $\hat{e}$ ", siendo de la dimensión correspondiente según el método.

Hemos utilizado subrutinas del librería NAG, considerando F como función de la variable " t ". La idea sería aproximarla mediante una función no lineal, F , de la forma:

$$J(\hat{e}) = \int_{t_0}^T \mathcal{H}(t) dt \cong \sum_{i=0}^N \gamma_i \mathcal{H}(t_i)$$

donde $\mathcal{H}(t_i) = F(x(t_i), u(t_i), t_i)$ y los puntos de la partición " t_i " están dados y γ_i son los pesos correspondientes, que pueden ser calculados, por ejemplo, por diferencias finitas. Para aplicar esta subrutina, necesitamos una partición con al menos cuatro puntos, utilizando en particular la cuadratura debida a Gill-Miller, que usa una fórmula de tercer orden en diferencias finitas. Con esto, obtendremos el valor de la función objetivo para unos valores iniciales de las variables, $J(\hat{e})$, no teniendo un conocimiento explícito de esta función. Por tanto, cada vez que necesitemos evaluar la integral tendremos que pasar por todo el proceso de aproximación de las variables de estado y control.

Veamos cómo hemos considerado las restricciones. En primer lugar, si aparecen restricciones finales:

$$S_j(T, x(T), u(T)) = 0 \quad j = 1, \dots, s$$

serán tratadas como restricciones de igualdad, dependientes de $\hat{e}$,

$$S_j(T, x(T), u(T)) = C_j(\hat{e}) = 0 \quad j = 1, \dots, s$$

Para las restricciones de desigualdad, hemos considerado varias formas de discretización. La primera, sería considerando las restricciones que aparezcan de estado, de control o mixtas, como condiciones finales, construyendo unas variables de estado auxiliares y_{n+j} , $j = 1, \dots, p$, cumpliendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} y'_{n+j} &= \max \{0, G_j(y(t), w(t), t)\} \\ y_{n+j}(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad j = 1, \dots, p$$

donde las variables $y_1, y_2, \dots, y_n$ son los valores de la variable de estado aproximadas del problema. Una vez obtenidas, las restricciones de desigualdad impuestas en el problema no lineal son:

$$y_{n+j}(T) = C_{s+j}(\hat{e}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Aquí podemos observar que seguimos la misma idea que en las funciones de penalización, es decir, si la restricción j -ésima se verifica para todo t :

$$G_j(w(t), y(t), t) \leq 0,$$

la correspondiente variable auxiliar resulta ser cero, con lo que se cumpliría la restricción. En caso contrario, con la ecuación diferencial y la restricción impuesta, obligamos a la verificación de éstas en el tiempo final; a igual que en la función objetivo, con este proceso obtenemos el valor de las restricciones en un punto $\hat{e}$, y no su expresión analítica.

Como estas variables son independientes de las variables de estado iniciales, la resolución del sistema la hemos realizado conjuntamente con el sistema de ecuaciones diferenciales inicial, no teniendo que "llamar" dos veces a la misma subrutina y obteniendo en un mismo bloque las variable de estado y las auxiliares.

Ahora bien, consideradas de esta forma, las restricciones de desigualdad impuestas pueden violarse, por errores de computación. Una posible alternativa sería considerarlas directamente en todos los puntos de la malla, de forma que por cada restricción:

$$G_i(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

introducimos $N + 1$ restricciones, una en cada punto, es decir para cada i :

$$G_i(x(t_j), u(t_j), t_j) \leq 0 \quad j = 0, \dots, N$$

Esta forma de considerar las restricciones tiene sus ventajas e inconvenientes. Es obvio que el número de restricciones aumenta con respecto al otro método de discretización, pasando a ser $(N + 1) \times p$, teniendo que trabajar con un multiplicador de Kuhn-Tucker para cada una de ellas; en cambio, con el anterior proceso teníamos que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, cuestión que aquí no es necesaria.

Otra forma estudiada ha sido tomar las restricciones de desigualdad y terminales conjuntamente, construyendo una única restricción, englobándolas a todas, de la forma:

$$G(\hat{e}) = \sum_{j=1}^s [C_j(x(T), u(T))]^2 + \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^p \max(0, G_i)^2 dt$$

y tendríamos que imponer una restricción de igualdad al problema:

$$G(\hat{e}) = 0$$

Esta manera de considerar las restricciones presenta la ventaja de que todas las restricciones se transforman en una única restricción, teniendo por tanto un problema no lineal con una restricción de igualdad. Ahora bien, como están consideradas en conjunto, puede que no se verifiquen exactamente como deseamos. Además, presenta el inconveniente que la restricción de estado terminal de igualdad que se obtiene no verifica la cualificación de restricciones usualmente exigida, no teniendo, por tanto, asegurada la convergencia y se puede producir alguna oscilación. Así, una posible alternativa sería tomarla:

$$G(\hat{e}) \leq \gamma$$

con γ un valor pequeño que fijamos de antemano, permitiendo una cierta holgura.

Con este proceso, el estudio del problema inicial queda reducido a la resolución de un problema no lineal, con restricciones de igualdad y desigualdad, que se puede resolver utilizando cualquier técnica propia para ellos y que nosotros particularmente, resolvemos mediante las funciones de penalización; en concreto, hemos utilizado una función lagrangiana aumentada, Fletcher (1975, 1987) y dos funciones exactas, dependientes de la variable inicial, como son la dada por Fletcher (1983, 1987) y por Di Pillo y Grippo (1989).

Una vez que hemos reducido el problema inicial a un problema no lineal de la forma:

$$\begin{array}{ll} \min & J(\hat{e}) \\ \text{s.a.} & C_j(\hat{e}) = 0 \quad j = 1, \dots, s \\ & C_j(\hat{e}) \leq 0 \quad j = s + 1, \dots, s + p \end{array}$$

y para resolverlo es importante resaltar que estas funciones que obtenemos en el problema no lineal van evaluadas en un cierto punto " $\hat{e}$ ", es decir, mediante este proceso, para cada valor de la parametrización, podemos obtener la función objetivo y las restricciones, pero no sus fórmulas explícitas; esto nos llevaría a no poder calcular tampoco directamente el gradiente de estas funciones. Estos gradientes son fundamentales para cualquier método de minimización que utilicemos sobre ellos, de forma que necesitamos estimarlos de alguna forma; en este sentido, hemos utilizado una aproximación, bien por diferencias finitas, o bien siguiendo la línea apuntada por Goh y Teo (1988) y Kraft, (1985), considerándolas en el espacio de funciones que exponemos a continuación. Dada la función con respecto a la cual queremos calcular el gradiente, que notamos en general, M (es decir, F ó C_j). Consideremos, por simplicidad, que la variable $\hat{e}$ en este caso son las variables de control, que notaremos $\hat{u}$:

$$\hat{u} = \{u_1(t_0), \dots, u_1(t_N), u_2(t_0), \dots, u_m(t_N)\}$$

Puntualicemos cómo se entiende la función M en cada caso. Podemos considerar una función general:

$$M(\hat{u}) = A(x(\hat{u})(s)) + \int_0^s m(x(\hat{u})(t), \hat{u}, t) dt$$

de forma que si tomamos:

- 1) $s = T$, $m = f$, $A = S$, $M(\hat{u})$ es la función objetivo
- 2) $s = T$, $m = 0$, $A = S$, $M(\hat{u})$ son las condiciones terminales
- 3) $s = T$, $m = \max(0, g)^2$, $A = 0$, $M(\hat{u})$ es la de desigualdad

Observamos que si en 3) consideramos $m = \max(0, g)$ obtendremos el gradiente de las restricciones de desigualdad, consideradas como condiciones terminales.

El gradiente de M se puede considerar en el espacio de funciones, $L_2[0, T]$ con el producto interior definido:

$$(v, w) = \int_0^T v(t)^t w(t) dt$$

Teniendo en cuenta las condiciones necesarias del principio del Máximo, debemos obligar, $H_u = 0$, donde $H = m + p^t h$ es la función hamiltoniana asociada, con m variando según la función que estemos considerando, y p será la variable de coestado que se obtiene mediante un sistema diferencial adjunto. Es obvio que debemos tomar:

$$\delta M = \int_0^T H_u^t \delta u \, dt$$

donde δu es la variación del control u , que, a su vez, lo podemos definir en función del parámetro $\hat{u}$. Si notamos P_3 a un polinomio de grado tres:

$$\delta u(t) = P_3(\hat{u} + \delta \hat{u}) - P_3(\hat{u})$$

Así, sustituyendo:

$$\delta M = \int_0^T H_u^t (P_3(\hat{u} + \delta \hat{u}) - P_3(\hat{u})) dt$$

Y si tomamos derivadas parciales, podemos concluir:

$$\frac{\delta M}{\delta \hat{u}} = \frac{1}{\Delta \hat{u}} \int_0^T H_u^t (P_3(\hat{u} + \Delta \hat{u}) - P_3(\hat{u})) dt$$

como expresión del gradiente. Para el cálculo de H_u necesitamos la variable de coestado, que vendrá dada mediante la resolución de una ecuación diferencial:

$$p'^t = - \frac{\partial m}{\partial x} - p^t \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$p^t(s) = \frac{\partial A(x(\hat{u})(s))}{\partial x(\hat{u})(s)}$$

que se resuelve hacia atrás, con s , A y m según la función que estemos considerando. El valor de $P_3(\hat{u} + \Delta \hat{u}) - P_3(\hat{u})$ dependerá del método considerado en la aproximación de la variable de control.

Con todo ello podemos presentar el algoritmo de discretización de nuestro problema de control óptimo.

Proceso de discretización mediante disparo directo

Primer paso: Damos una partición del intervalo y un valor inicial $\hat{u}$ de la variable de control en estos puntos.

Segundo paso: Por alguna de las aproximaciones dadas, calculamos w , aproximación de u . Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos " y ", aproximación de las variables de estado; si las restricciones son aproximadas como condiciones terminales, calculamos conjuntamente las variables de estado auxiliares y_{n+j} .

Tercer paso: Mediante una cuadratura, calculamos el valor de la función objetivo en este punto, $J(\hat{u})$.

Cuarto paso: Repetimos los tres pasos anteriores para todos los valores $\hat{u} \neq e_j$, $j=1, \dots, m \times (N+1)$, con lo que obtenemos $J(\hat{u} \neq e_j)$ y $C(\hat{u} \neq e_j)$, en el caso de estimación de gradientes por diferencias finitas. O bien implementamos las expresiones antes indicadas dentro del espacio de funciones.

Observemos que si las restricciones se consideran punto a punto o conjuntamente, no es necesario introducir su evaluación en el algoritmo, puesto que sería directa, sustituyendo en los puntos de la partición.

En el método de colocación directa seguimos la misma filosofía que en el método anterior pero se incorporan ciertas modificaciones para evitar la estimación de algunos gradientes. El principal cambio que consideramos es parametrizar tanto la variable de estado como la de control de manera conjunta, de forma que no consideramos en este momento la dependencia entre ellas; por tanto, parametrizamos todas las variables, según los mismos métodos, aunque el más razonable sería el de Hermite. Para dichas aproximaciones podemos utilizar el conocimiento de la derivada de la variable de estado

$$x'(t_j) = H(x(t_j), u(t_j), t_j) \quad j = 0, \dots, N.$$

es decir, la ecuación diferencial no se resuelve directamente, sino que más bien "se colocan" los valores de la derivada en los puntos de la partición. La aproximación de las restricciones se considera de igual forma pero se

introduce una nueva restricción de igualdad, considerando la ecuación diferencial, de forma que nos mida el error que cometemos al no tener en cuenta la dependencia citada.

$$C_j(x_j, u_j, x_{j+1}, u_{j+1}) = a'_j(\bar{t}_j) - H(\bar{x}_j, \bar{u}_j, \bar{t}_j) \quad j = 0, \dots, N-1$$

donde $\bar{t}_j$ es el punto medio del intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ y a_j es el polinomio de tercer grado construido para las variables de estado. De hecho, si utilizamos la aproximación cúbica Hermite, los valores de $\bar{x}_j$, $\bar{u}_j$, $a'_j(\bar{t}_j)$ se obtienen mediante las expresiones:

$$\bar{x}_j = \frac{1}{2} (x_j + x_{j+1}) + \frac{\ell}{8} (H(x_j, u_j, t_j) - H(x_{j+1}, u_{j+1}, t_{j+1}))$$

$$\bar{u}_j = \frac{1}{2} (u_j + u_{j+1}) + \frac{\ell}{8} (u'(t_j) - u'(t_{j+1}))$$

$$a'_j(\bar{t}_j) = \frac{3}{2\ell} (x_{j+1} - x_j) - \frac{1}{4} (H(x_j, u_j, t_j) + H(x_{j+1}, u_{j+1}, t_{j+1}))$$

La idea sería obligar que:

$$C_j(x_j, u_j, x_{j+1}, u_{j+1}) = 0, \quad j = 0, \dots, N-1$$

es decir, que el error cometido por evaluar directamente la ecuación diferencial, sea nulo. Con esto, este método siempre presenta restricciones de igualdad, independientemente de las propias restricciones del problema de control óptimo dado.

Teniendo en cuenta estas expresiones, se pueden deducir fácilmente las derivadas parciales de las restricciones C respecto de sus variables, resultando una matriz que posee elementos no nulos en los bloques de la diagonal y diagonal superior, siendo todos los demás cero. Su expresión viene dada por las siguientes fórmulas. Con respecto a las variables de estado x_j , x_{j+1} :

$$\frac{\partial C_j}{\partial x_j} = -\frac{3}{2\ell} I - \frac{1}{4} \frac{\partial h_j}{\partial x_j} - \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} I + \frac{1}{8} \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial x_{j+1}} = \frac{3}{2l_j} I - \frac{1}{4} \frac{\partial h_{j+1}}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} I - \frac{1}{8} \frac{\partial h_{j+1}}{\partial x_{j+1}} \right)$$

y con respecto a las variables de control u_j, u_{j+1} :

$$\frac{\partial C_j}{\partial u_j} = -\frac{1}{4} \frac{\partial h_j}{\partial u_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial u_j} - \frac{1}{8} \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x_j} \frac{\partial h_j}{\partial u_j}$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial u_{j+1}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial h_{j+1}}{\partial u_{j+1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial u_{j+1}} + \frac{1}{8} \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x_j} \frac{\partial h_{j+1}}{\partial u_{j+1}}$$

donde hemos notado $\bar{h}_j = H(\bar{x}_j, \bar{u}_j, \bar{t}_j)$.

Observamos que los gradientes de estas restricciones los obtenemos analíticamente, es decir, no necesitamos estimarlos. Sin embargo, introducimos unas restricciones de igualdad, que tendremos que tener en cuenta para la resolución del problema.

El algoritmo para la evaluación de las funciones del problema no lineal utilizando este método lo llamamos proceso de discretización mediante colocación directa y sería una posible alternativa al anterior, donde observamos que básicamente difieren en las variables que se consideran y en la nueva restricción de igualdad que imponemos en el segundo.

Proceso de discretización mediante colocación directa

Primer paso: Damos una partición del intervalo y un valor inicial de las parametrizaciones de estado y control, que notamos $\hat{e}$.

Segundo paso: Por un procedimiento de aproximación, calculamos "w", aproximación de u , e "y", aproximación de las variables de estado.

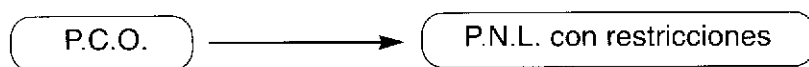
Tercer paso: Mediante una cuadratura, calculamos el valor de la función objetivo en este punto, $J(\hat{e})$ y obtenemos $C_j(\hat{e})$, $j=0, \dots, N-1$, así como las restricciones de desigualdad y terminales, por alguno de los métodos vistos.

Cuarto paso: Repetimos los tres pasos anteriores para todos los valores $\hat{e} \mp l e_j$, $j=1, \dots, (m+n) \times (N+1)$, obteniendo así los valores $J(\hat{e} \mp l e_j)$ y los de las restricciones de desigualdad en estos puntos, $C_j(\hat{e} \mp l e_j)$, si deseamos calcular $\nabla J(\hat{e})$ y $\nabla C_j(\hat{e})$, mediante diferencias finitas centradas. Para las

restricciones de igualdad, construimos la matriz del gradiente y evaluamos directamente.

En este método, por tanto, trabajamos con una mayor dimensión de variables, y con más restricciones que antes pero se incorpora una peculiaridad muy interesante desde el punto de vista computacional: el gradiente de estas nuevas restricciones se puede calcular explícitamente, evitando su estimación. Por este lado, por tanto, se produce un gran ahorro de tiempo de ejecución.

En definitiva, con todo el proceso de discretización hemos resuelto uno de los pasos del algoritmo, es decir:



El segundo bloque del algoritmo global consistirá en la resolución del problema no lineal restringido el cual hemos implementado mediante las funciones de penalización anteriormente comentadas (Calderón, 1993), estándose en la actualidad implementando un método de programación cuadrática secuencial.

Con respecto al primero de los esquemas, las funciones de penalización, y bajo las tres aproximaciones realizadas constantes a trozos, Hermite y Spline se ha probado el siguiente teorema (Calderón, 1993):

TEOREMA 3

Sea u^i la solución del problema discretizado con partición P^i . Supongamos que u^* es una solución del problema de control óptimo. Entonces:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} J(u^i) = J(u^*) \quad \square$$

TEOREMA 4

Sea u^i el control óptimo de los problemas discretizados con partición P^i . Si u^i converge a una cierta función u , en casi todo punto en $[t_0, T]$ cuando el diámetro de la partición tiende a cero, entonces, u es un control óptimo del problema inicial. $\square$

A partir del resultado anterior y debido a que las variables de estado deben verificar el sistema diferencial, podemos asegurar un resultado análogo para las mismas.

Aunque los métodos aquí presentados poseen buenos tiempos de convergencia, también es cierto que los mismos aumentan de forma muy significativa cuando el número de variables se incrementan. Habida cuenta que múltiples problemas económicos poseen un gran número de variables y restricciones, puede suceder que los tiempos no sean demasiado convenientes, por lo cual sería necesario la adaptación a técnicas que mejoren los mismos. Además de la depuración en la implementación de los métodos anteriores para el problema de programación por metas, existe la posibilidad de la descomposición, es decir el análisis del mismo para poder descomponerlo en subsistemas, que manteniendo las relaciones estructurales, nos generen interconexiones entre los mismos. Con todo ello, obtendremos una estructura a dos niveles donde en el nivel superior debe plantearse un esquema de coordinación con el fin de equilibrar las interconexiones, resultando para el nivel inferior una serie de problemas, igual en número al de subsistemas, similares a los anteriormente analizados, pero con menor número de variables que las del problema original.

Un último aspecto que queremos hacer resaltar, es el de los sistemas en tiempo discreto, por lo cual nuestros objetivos vendrán dados por

$$J_1(x(t), u(t)) = \sum_{j=0}^N f_1(x(t_j), u(t_j), t_j)$$

y el sistema vendrá regido por

$$\begin{aligned} x(t_{j+1}) &= h(x(t_j), u(t_j), t_j) & j &= 0, 1, \dots, N-1. \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

lo cual transforma la formulación realizada en el primer epígrafe de una manera natural y simplifica los desarrollos realizados en el segundo, manteniendo la filosofía del mismo pero la discretización del período de planificación estará fijada por los tiempos de evaluación y por tanto no será necesario realizar un refinamiento de la partición.

BIBLIOGRAFIA

BOOR, C.: (1978). *A practical guide to splines*. Springer, New York.

CALDERON, S.: (1993). *El problema de control óptimo y las funciones de*

penalización. *Análisis de sus relaciones y obtención de soluciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga.

DI PILLO, G. Y GRIPPO, L.: (1979) "*A new class of augmented lagrangians in Nonlinear Programming*". SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 17, n. 5, pp. 618-628.

DI PILLO, G. Y GRIPPO, L.: (1985) "*A continuously differentiable exact penalty function for nonlinear programming problems with inequality constraints*". SIAM Journal Control and Optimization, vol. 23, no. 1, pp. 72-84.

DI PILLO, G. Y GRIPPO, L.: (1989) "*Exact penalty functions in constrained optimization*". SIAM Journal Control and Optimization, vol. 2, no. 6, pp. 1333-1360.

FLETCHER, R.: (1975) "*An ideal penalty function for constrained optimization*". J. Inst. Maths Applies, vol. 15, pp. 319-342.

FLETCHER, R.: (1983) "*Penalty functions*". In: *Mathematical Programming*, eds., Bachem, A., Grottschel, M., Korte, B., Springer-Verlag, Berlín, pp. 87-114.

FLETCHER, R.: (1987). *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons. Essex.

GOH, C.J. Y TEO, K.L.: (1988) "*Control parametrization: A unified approach to optimal control problems with general constraints*". Automática, vol. 24, n. 1, pp. 3-18.

HALL, C.A. Y MEYER, W.W.: (1976) "*Optimal error bounds of cubic spline interpolation*". Journal Approximations Theory, vol. 16, pp. 105-122.

ITO, K. Y KUNISCH, K.: (1990) "*The augmented lagrangian method for equality and inequality constraints in Hilbert spaces*". Mathematical Programming, vol. 46, pp. 341-360.

KRAFT, D.: (1985) "*On converting optimal control problems into nonlinear programming problems*". Computational Mathematical Programming. NATO ASI Series, vol. F15, pp. 260-280.

KRAFT, D.: (1987) *"NONLINEAR SYSTEMS ANALYSIS BY DIRECT COLLOCATION"*. OPTIMAL CONTROL, PP. 224-236.

MACHIELSEN, K.C.P.: (1988). *Numerical solution of optimal control problems with state constraints by sequential quadratic programming in function space*. Centre for Mathematics and Computer Science. Amsterdam.

MAYNE, D.Q. Y POLAK, E.: (1987) *"An exact penalty function algorithm for control problems with state and control constraints"*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-32, n. 5, pp. 380-387.

SALUKVADZE, M.E. (1979). *Vector-valued optimization problems in control theory*. Academic Press. San Francisco.

SMITH, S.A: (1984). *Exact penalty function algorithms for constrained optimal control problems*. Ph. D. Thesis, University of London.

SMITH, S. Y MAYNE, D.Q.: (1988) *"Exact penalty algorithm for optimal control problems with control and terminal constraints"*. International Journal Control, vol. 48, no. 1, pp. 257-271.

TEO, K.L. Y GOH, C.J.: (1987) *"A simple computational procedure for optimization problems with functional inequality constraints"*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-32, no. 10, pp. 940-941.

TEO, K.L. Y JENNINGS, L.S.: (1989) *"Nonlinear optimal control problems with continuous state inequality constraints"*. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 63, no. 1, pp. 1-22.

TEO, K.L. Y WONG, K.H.: (1992) *"Nonlinearly y constrained optimal control problems"*. Journal Australian Mathematical Society Ser. B 33, pp. 507-530.