

LOS CONTRASTES DE RAIZ UNITARIA: UNA PANORAMICA

María del Mar Sánchez de la Vega
Arielle Beyaert

*Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia
Ronda de Levante, 10
30008 MURCIA*

RESUMEN

El objetivo de este artículo es presentar una panorámica de los contrastes de raíz unitaria propuestos en la literatura, que pretende servir de guía práctica para el investigador que necesite hacer uso de este tipo de técnicas. El estudio se ciñe a los contrastes aplicables a series no estacionales cuya media es homogénea en todo el recorrido muestral, en el sentido de que esa media toma el mismo valor constante, o sigue la misma función polinómica del tiempo a lo largo de toda la muestra. El análisis de los contrastes de raíz unitaria estacional, para series que presentan estacionalidad, y de los contrastes de raíz unitaria con cambio estructural, que conviene utilizar cuando la serie cambia de media, se realizará en un trabajo posterior.

Palabras clave: Tests, raíces unitarias, series integradas.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present a survey of the unit root tests appeared in the literature. It intends to serve as a guide for the research who needs to apply this type of techniques. It is centered on tests to be applied on non-seasonal series without structural change. The treatment of seasonal series and/or series series with a mean that changes at discrete points of time is left for another paper.

Keywords: Tests, Unit Roots, Integrated Series.

1. INTRODUCCION

En su influyente trabajo, Nelson y Plosser(1982) analizaron numerosas series económicas estadounidenses, poniendo de manifiesto que muchas de ellas presentaban una característica de no estacionariedad, procedente de la presencia de una raíz unitaria en el polinomio de retardos autorregresivos del proceso generador de las mismas. Este tipo de no estacionariedad tiene importantes consecuencias en la modelización empírica de los fenómenos económicos. Box y Jenkins(1976) ya habían insistido en la necesidad de identificar este tipo de comportamiento en la modelización univariante. El desarrollo posterior de la teoría de la cointegración, definida sobre variables con raíces unitarias, aumentó el interés de los investigadores hacia técnicas que les permitieran detectar la presencia de raíces de este tipo.

Este trabajo presenta una amplia panorámica de las técnicas de contraste existentes en la actualidad, para abordar este problema.

Para situar el tema, consideremos una serie temporal discreta que sigue un modelo de ecuación en diferencias estocástica de la forma:

$$(1.1.1) \quad (1 - \Psi_1 B - \dots - \Psi_{p+d} B^{p+d})(X_t - \mu_t) = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

o equivalentemente $\Psi(B)(X_t - \mu_t) = \theta(B)e_t \quad t=1,2,\dots$

donde B es el operador de retardos, $\mu_t = E(X_t)$, $\{e_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media cero y varianza σ^2 , $\Psi_1, \dots, \Psi_{p+d}$, $\theta_1, \dots, \theta_q$, σ^2 son parámetros, y donde se supone sin pérdida de generalidad que este proceso cumple las condiciones de invertibilidad. Algunas de las características más importantes de la serie están determinadas por las raíces del polinomio asociado a la parte autorregresiva:

$$\Psi(z) = 1 - \Psi_1 z - \dots - \Psi_{p+d} z^{p+d}$$

Así, si la ecuación $\Psi(z) = 0$ tiene raíces unitarias, la serie X_t será no estacionaria. Estas raíces pueden ser $+1$, -1 o $\exp(i\lambda)$ para algún λ en $[0, 2\pi)$. Este trabajo se centra exclusivamente en raíces unitarias con valor $+1$, por lo que, en lo sucesivo, nos referiremos a este valor al hablar de raíces unitarias.

Si existen d raíces unitarias en el polinomio $\Psi(z)$, donde $d \geq 0$, $\Psi(B)$ puede factorizarse como:

$$(1.1.2) \quad \Psi(B) = \phi(B) (1-B)^d$$

y escribimos (1.1.1) como:

$$(1.1.3) \quad \phi(B) \Delta^d (X_t - \mu_t) = \theta(B) e_t \quad t=1,2,3,\dots$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$. La expresión (1.1.3) representa X_t mediante un modelo ARIMA(p,d,q) o, equivalentemente, $\Delta^d X_t$ como un modelo ARMA(p,q). Nótese que esta expresión (1.1.3) revela que la existencia de d raíces unitarias equivale a la necesidad de diferenciar la serie d veces para alcanzar la estacionariedad, o lo que es lo mismo, para poder utilizar una representación ARMA invertible. Se dice en este caso que la serie X_t es "integrada de orden d ", y se denota por $X_t \sim I(d)$. Dentro del contexto económico, en la práctica suele encontrarse que $d=0, 1$, ó 2 .

Los tests recogidos en este trabajo están diseñados para contrastar la hipótesis de existencia de raíces unitarias en el polinomio autorregresivo, y determinar así el orden de integración de una serie.

Los contrastes están clasificados por orden creciente de complejidad del modelo que utilizan. Así, en la sección 2 se considera el modelo más sencillo, correspondiente a un autorregresivo de orden uno; los primeros contrastes, que recogemos en 2.1, están basados en el estimador de mínimos cuadrados, y se deben a los trabajos pioneros de Dickey y Fuller (1979, 1981). En 2.2 se expone otro grupo de contrastes, basados en el ratio de Von Neumann, debidos a Bhargava (1986).

La extensión a modelos más generales se lleva a cabo en la sección 3. Comienza, en 3.1, por trasladar los contrastes basados en los estimadores MCO a procesos autorregresivos de orden superior, según hacen Dickey y Fuller (1979, 1981). En 3.2 se incluye la posibilidad de contrastar en estos modelos la existencia de varias raíces unitarias, mediante tests de hipótesis conjuntas. Los contrastes propuestos para modelos ARMA o más generales, se exponen en 3.3, donde se recogen los contrastes de una única raíz, y de varias raíces unitarias; así mismo, se presentan en esta sección los escasos contrastes en los que el supuesto de raíz unitaria se trata como hipótesis alternativa, siendo la hipótesis nula la de estacionariedad.

El trabajo concluye con una representación esquemática de los estadísticos que se utilizan en cada contraste, los modelos para los que están diseñados, y las características de su distribución. Se pretende con ello proporcionar una información a la vez detallada y fácil de consultar acerca de los contrastes publicados hasta la fecha.

2. EL MODELO AUTORREGRESIVO DE PRIMER ORDEN

2.1. Tests de raíz unitaria basados en el estimador de mínimos cuadrados.

Consideremos en primer lugar el modelo más simple, correspondiente al proceso autorregresivo de primer orden siguiente:

$$(2.1.1) \quad X_t = \rho X_{t-1} + e_t \quad t=1,2,\dots$$

donde $X_0=0$ y $e_t \sim \text{Nid}(0, \sigma^2)$.

Para contrastar la hipótesis nula de que $\rho = 1$ en (2.1.1), esto es, que la serie X_t sigue un paseo aleatorio, Dickey (1976) y Dickey y Fuller (1979) proponen dos estadísticos. El primero es el llamado "estimador MCO normalizado", $T(\hat{\rho} - 1)$ donde $\hat{\rho}$ denota el estimador MCO de ρ en la regresión (2.1.1) y T es el tamaño muestral;

el segundo es el estadístico $\hat{t}$ cuya fórmula coincide con la del estadístico t^1 usual para contrastar la significatividad del coeficiente de X_{t-1} en la regresión:

$$\Delta X_t = X_{t-1} + e_t$$

conocida como "ecuación de Dickey-Fuller".

Las distribuciones en muestra finita de estos dos estadísticos no se conocen; pero Dickey (1976) y Dickey y Fuller (1979), basándose en representaciones mediante formas cuadráticas, obtuvieron sus distribuciones límite bajo la hipótesis nula. Bajo $\rho=1$ en (2.1.1), se tiene:

$$T(p-1) \xrightarrow{d} \frac{1}{2} (\Gamma^{-1} (\bar{T}^2 - 1)) \quad \text{y} \quad \hat{t} \xrightarrow{d} \frac{1}{2} (\Gamma^{-1/2} (\bar{T}^2 - 1))$$

donde

$$(2.1.2) \quad \Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 Z_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i 2^{1/2} Z_i, \quad \gamma_i = (-1)^{i+1} \sqrt{\gamma_i^2}$$

siendo $\gamma_i^2 = 4[(2i-1)\pi]^{-2}$ y $Z_i \sim N(0,1)$ para $i=1,2,\dots,\infty$

Teniendo en cuenta el trabajo de White (1958), se demuestra que estas distribuciones límite no dependen del valor inicial X_0 , y además se mantienen si simplemente e_t es iid(0, σ^2). Sin embargo, X_0 influye en la distribución en muestra pequeña.

El desconocimiento de las distribuciones en muestra finita y de distribuciones límite cuyos valores críticos se puedan obtener analíticamente, lleva a Dickey (1976) a construir, mediante simulación de Monte Carlo, una tabla de los percentiles de $T(\hat{\rho}-1)$ y $\hat{t}$, en muestra finita, y asintóticos haciendo uso de las representaciones anteriores. Estos valores son los que se usan para contrastar la hipótesis $H_0: \rho=1$, y están publicados en Fuller(1976), págs. 371 y 373.

Utilizando representaciones alternativas, Evans y Savin (1981a) calculan mediante integración numérica las distribuciones en muestra finita y asintóticas de $(T/\sqrt{2})(\hat{\rho}-1)$. En muestra finita, las distribuciones se calculan para varios tamaños muestrales y varios valores de X_0/σ . Para $X_0=0$, los resultados concuerdan con los tabulados por Dickey(1976) y Fuller(1976).

Consideramos ahora series temporales $\{X_t\}$ con media no nula. En primer lugar sea el caso en el que $E(X_t) = \mu$, siendo μ constante. Si X_t sigue un proceso AR(1), se puede escribir:

$$(2.1.3) \quad (X_t - \mu) = \rho(X_{t-1} - \mu) + e_t$$

o equivalentemente:

$$(2.1.4) \quad X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + e_t \text{ donde } \alpha \equiv \mu(1-\rho)$$

con $e_t \sim \text{Nid}(0, \sigma^2)$ y condición inicial fijada.

La hipótesis nula de que $\rho = 1$ en (2.1.3) corresponde a que la serie X_t sigue un paseo aleatorio sin deriva. Para contrastarla, Dickey-Fuller(1979) consideran el estimador MCO normalizado $T(\hat{\rho}_\mu - 1)$ de la variable X_{t-1} en la regresión (2.1.4), y el estadístico tipo t (denotado por $\hat{t}_\mu$), de la misma variable en la ecuación auxiliar (también conocida como "ecuación de Dickey-Fuller"):

$$\Delta X_t = \alpha + \delta X_{t-1} + e_t \quad t=1, 2, \dots, T$$

Obtienen la expresión de las distribuciones límite bajo la nula. Los valores críticos a utilizar en muestras finitas se encuentran en Fuller(1976) p.371 y 373. Es importante señalar que estos valores críticos son válidos para contrastar que la serie sigue un paseo aleatorio *simple*; en el caso en que este paseo aleatorio incluyera una deriva, se demuestra (West(1988)) que los estadísticos de Dickey-Fuller tienden asintóticamente hacia una distribución normal².

De manera análoga, para el caso en que $E(X_t) = \mu_t = a + bt$, si X_t sigue un proceso AR(1), se tiene:

$$(2.1.5) \quad X_t - a - bt = \rho [X_{t-1} - a - b(t-1)] + e_t$$

ó (2.1.6) $X_t = \alpha + \beta^t + \rho X_{t-1} + e_t$, con $\alpha \equiv a(1-\rho) + b\rho$ y $\beta \equiv b(1-\rho)$ y donde, igual que antes, $e_t \sim \text{Nid}(0, \sigma^2)$ y la condición inicial está fijada.

Bajo la hipótesis nula de raíz unitaria, (2.1.5) se transforma en un paseo aleatorio con deriva: $X_t = d + X_{t-1} + e_t$. Los estadísticos de contraste propuestos por Dickey(1976) y Dickey y Fuller (1979) son, asimismo, el estimador MCO normalizado $T(\hat{\rho})$ y el estadístico tipo t, denotado por $\hat{t}_\rho$, para el coeficiente de X_{t-1} en la regresión auxiliar siguiente:

$$\Delta X_t = \alpha + \beta \left(t - \frac{1}{2} T\right) + \delta X_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Los valores críticos a usar se encuentran en Fuller(1976), p.371 y 373. Aquí también conviene señalar que estos valores son válidos sólo si la serie sigue un paseo aleatorio *con deriva* bajo la hipótesis nula. Si el paseo aleatorio incluyera, además de la deriva, un componente tendencial, los estadísticos tenderían hacia una distribución normal³.

El uso de estos estadísticos de contraste está muy extendido en la práctica, en particular el estadístico tipo t , ya que resulta cómodo de utilizar e incluso su obtención es directa en muchos de los programas econométricos más utilizados. Además, como veremos posteriormente, se extienden de forma inmediata al caso de modelos autorregresivos de orden superior. El gran inconveniente que presentan es su baja potencia, sobre todo en alternativas estacionarias próximas a la nula, como se refleja por ejemplo, en Dickey y Fuller (1979) y Sánchez de la Vega (1993).

2 Por otra parte, en el modelo (2.1.4), obtenido a partir de (2.1.3), observamos que, al ser $\alpha = \mu(1-\rho)$, $\alpha=0$ si $\rho=1$. Asimismo, en (2.1.6) $\rho=1$ hace que $\beta=0$. Esto lleva a Dickey y Fuller (1981) a considerar las tres hipótesis nulas siguientes:

$$(1) \quad H_0: (\alpha, \rho) = (0, 1) \text{ en el modelo (2.1.4)}$$

$$(2) \quad H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1) \text{ para (2.1.6)}$$

$$(3) \quad H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1) \text{ en (2.1.6)}.$$

Los autores desarrollan el test de la razón de verosimilitud para estas hipótesis. Los estadísticos que obtienen, denotados por Φ_1 , Φ_2 y Φ_3 respectivamente, resultan ser funciones del estadístico tipo F que se suele utilizar en el modelo de regresión lineal para contrastar restricciones lineales sobre el vector de parámetros de la regresión. Determinan las distribuciones límite de estos estadísticos. Estas distribuciones límite son válidas para todo X_0 fijado y para el caso en que los errores $\{e_t\}$ sean simplemente iid. Los valores críticos están tabulados en Dickey-Fuller(1981)

2.2. Tests de raíz unitaria basados en el ratio de Von Neumann.

En otra línea, Sargan y Bhargava (1983) se basan en los trabajos de Durbin y Watson (1950, 1971) para contrastar la hipótesis nula de que los errores

correspondientes a un modelo de regresión clásico forman un paseo aleatorio. De forma algo más general, Bhargava (1986) propone procedimientos de contraste de la existencia de raíz unitaria en un proceso AR(1) con o sin deriva, contra alternativas estacionarias y no estacionarias.

Los estadísticos que propone, para contrastar la existencia de un paseo aleatorio simple, son ratios de tipo Von Neumann. Su expresión concreta varía según el supuesto que se hace sobre la condición inicial y/o la alternativa que se considere. Así, con la condición inicial $X_1 = \mu + [e_1/(1-\rho^2)^{1/2}]$, el estadístico que utiliza es:

$$R_1 = \sum_{t=2}^T (X_t - X_{t-1})^2 / \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2, \text{ donde } \bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

contra la alternativa de estacionariedad $(X_t - \mu) = \rho(X_{t-1} - \mu) + e_t$, $0 \leq \rho < 1$, $t=2, \dots, T$.

En cambio, si se trabaja con el supuesto de que $X_1 = \mu + e_1$, el estadístico es:

$$N_1 = \sum_{t=2}^T (X_t - X_{t-1})^2 / \sum_{t=2}^T (X_t - X_1)^2$$

tanto frente a alternativas de estacionariedad correspondientes a $0 \leq \rho < 1$ como frente a $\rho > 1$.

En cuanto al contraste de paseo aleatorio con deriva, propone:

$$R_2 = \frac{\sum_{t=2}^T (X_t - X_{t-1})^2 - \frac{1}{T-1} (X_T - X_1)^2}{\frac{1}{(T-1)^2} \sum_{t=1}^T [(T-1)X_t - (t-1)X_T - (T-t)X_1 - (T-1)(\bar{X} - \frac{1}{2}(X_1 + X_T))}]^2}$$

ó

$$N_2 = \frac{\sum_{t=2}^T (X_t - X_{t-1})^2 - \frac{1}{T-1} (X_T - X_1)^2}{\frac{1}{(T-1)^2} \sum_{t=1}^T [(T-1)X_t - (t-1)X_T - (T-t)X_1]^2}$$

que se usan de forma análoga al caso anterior.

Bhargava (1986), pág. 378, presenta una tabla de valores críticos para estos estadísticos, correspondientes a distintos tamaños muestrales.

Estos estadísticos presentan potencias ligeramente superiores, en general, que los de Dickey y Fuller, como se refleja por ejemplo en Sánchez de la Vega (1993). Sin embargo, la aplicabilidad de estos contrastes es muy limitada en la práctica ya que están diseñados exclusivamente para modelos AR(1).

3. EXTENSIONES.

3.1. El proceso autorregresivo de orden superior.

Los procedimientos de contraste de Dickey y Fuller (1979) para procesos autorregresivos de orden uno se trasladan con pequeñas variaciones a procesos autorregresivos de cualquier orden. Consideramos en primer lugar, un proceso AR(p) con media nula:

$$(3.1.1) \quad X_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j} = e_t$$

con $e_t \sim \text{Nid}(0, \sigma^2)$ y la condición inicial fijada.

Este modelo se reescribe en la forma:

$$(3.1.2) \quad X_t = \rho_1 X_{t-1} + \sum_{j=2}^p \rho_j (X_{t-j+1} - X_{t-j}) + e_t$$

donde $p \geq 2$, $\rho_1 = -\sum_{i=1}^p \alpha_i$, y $\rho_i = \sum_{j=i}^p \alpha_j$ y para $i=2, \dots, p$.

Es claro que el polinomio autorregresivo tiene una raíz igual a 1 si y sólo si $\rho_1=1$. Para contrastar esta hipótesis se podría hacer uso del estimador MCO normalizado de ρ_1 en la regresión (3.1.2); el problema que se presenta es que la distribución límite de este estadístico contiene una constante desconocida, por lo que no es aplicable. En la práctica se utiliza el estadístico tipo t asociado al coeficiente de X_{t-1} en la regresión:

$$\Delta X_t = (\rho_1 - 1)X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_{i+1} \Delta X_{t-i} + e_t$$

que se conoce como regresión de Dickey-Fuller aumentada de orden (p-1) y se suele hacer referencia al procedimiento con el nombre de "contraste ADF". La gran ventaja que tiene este estadístico t es que, bajo la hipótesis nula, tiene la misma

distribución asintótica que $\hat{\tau}$ definido en 2.1, como prueban Dickey (1976) y Fuller (1976). En lo sucesivo denotaremos también por $\hat{\tau}$ al estadístico t de $H_0: \rho_1=1$ en (3.1.2).

Un razonamiento análogo se puede aplicar a los casos de un modelo $AR(p)$ con media constante, o con tendencia lineal. Los estadísticos a utilizar son los estadísticos t de significatividad de X_{t-1} , que se obtendrán en una regresión ADF que incluye una constante en el primer caso, o una constante y la variable tiempo en el segundo; sus distribuciones límite son las mismas que las del modelo $AR(1)$ correspondiente, por lo que se utilizan las mismas tablas de valores críticos.

3.2. Tests de hipótesis conjuntas para varias raíces unitarias en Procesos Autorregresivos.

Hasta ahora, se ha considerado el caso en el que se contrasta la existencia de una única raíz unitaria en el polinomio autorregresivo. Sin embargo, no se puede excluir que, en la práctica, las series con las que tenemos que trabajar puedan contener más de una raíz de este tipo. Dickey y Pantula (1987) y Pantula (1989) han sugerido métodos secuenciales para contrastar un número arbitrario de raíces unitarias en procesos mixtos ARMA, que serán tratados en 3.3.6. Por otra parte, algunos trabajos, centrados en el modelo $AR(p)$, contrastan la existencia de raíces unitarias múltiples a través de hipótesis conjuntas. Los examinamos en esta sección.

Hasza y Fuller (1979) contrastan la hipótesis nula de dos raíces unitarias en un modelo $AR(p)$ (con media no nula y tendencia) mediante el estadístico tipo F de una hipótesis conjunta; establecen la distribución límite de este estadístico, y tabulan sus percentiles bajo la nula.

Para este mismo caso, y con la intención de mejorar los resultados anteriores, Sen y Dickey (1987) proponen un test conjunto para la existencia de dos raíces unitarias en un modelo $AR(p)$ con $p \leq 2$, frente a alternativas estacionarias. Estos consideran el modelo:

$$(3.2.1) \quad X_t - \mu = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \alpha_{p+2}(X_{t-p-2} - \mu) + e_t$$

con $e_t \sim Nid(0, \sigma^2)$, que reparametrizan en la forma:

$$(3.2.2) \quad \Delta^2(X_t - \mu) = \rho_1(X_{t-1} - \mu) + \rho_2\Delta(X_{t-1} - \mu) + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta^2(X_{t-j} - \mu) + e_t$$

Los parámetros que aparecen son:

$$\beta_k = \sum_{j=k+2}^{p+2} (j-k-1)\alpha_j \quad \text{para } k=1,2,\dots,p$$

$$\rho_1 = \sum_{j=1}^{p+2} \alpha_j - 1 \quad \text{y} \quad \rho_2 = -(1 + \sum_{j=2}^{p+2} (j-1)\alpha_j)$$

De esta forma, el modelo tiene dos raíces unitarias si y sólo si $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Sen y Dickey (1987) presentan una versión modificada del estadístico tipo F propuesto por Hasza y Fuller (1979), que da lugar a un contraste más potente frente a alternativas estacionarias. Construyen el que llaman estadístico simétrico $F_M(2)$ que es el estadístico F para $\rho_1 = \rho_2 = 0$ en la regresión (3.2.2) considerando la regresión “hacia delante” y “hacia atrás”. Concretamente, la regresión se lleva a cabo según los valores de las variables que aparecen en el cuadro 1. A partir de esta regresión, se construyen los estimadores MCO y los estadísticos t de ρ_1 y ρ_2 , denotados por $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$, τ_1 y τ_2 respectivamente. Las distribuciones límite de $T^2 \tilde{\rho}_1$, $T \tilde{\rho}_2$, τ_1 , τ_2 , así como la de $F_M(2)$, se encuentran en Sen y Dickey (1987). Esta última resulta ser la misma que la de $(\tau_1^2, \tau_2^2)/2$. Los autores presentan percentiles de las distribuciones de interés.

CUADRO 1:

Variable Dependiente	Variables Independientes
$\Delta^2 X_{p+3}$	$(X_{p+2}-\mu) \Delta X_{p+2} \Delta^2 X_{p+2} \dots \Delta^2 X_1$
$\Delta^2 X_{p+4}$	$(X_{p+3}-\mu) \Delta X_{p+3} \Delta^2 X_{p+3} \dots \Delta^2 X_1$
.	.
.	.
$\Delta^2 X_T$	$(X_{T-1}-\mu) \Delta X_{T-1} \Delta^2 X_{T-1} \dots \Delta^2 X_{T-p}$
$\Delta^2 X_{T-p}$	$(X_{T-p-1}-\mu) \Delta X_{T-p-1} \Delta^2 X_{T-p-1} \dots \Delta^2 X_1$
$\Delta^2 X_{T-p+1}$	$(X_{T-p-2}-\mu) \Delta X_{T-p-2} \Delta^2 X_{T-p-2} \dots \Delta^2 X_{T-1}$
.	.
.	.
.	.
$\Delta^2 X_1$	$(X_2-\mu) \Delta X_2 \Delta^2 X_2 \dots \Delta^2 X_{p+3}$

A partir de esta regresión, se construyen los estimadores MCO y los estadísticos t de ρ_1 y ρ_2 , denotados por $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$, τ_1 y τ_2 respectivamente. Las distribuciones límite de $T\tilde{\rho}_1$, $T\tilde{\rho}_2$, τ_1 , τ_2 , así como la de $F_M(2)$, se encuentran en Sen y Dickey (1987). Esta última resulta ser la misma que la de $(\tau_1^2 + \tau_2^2)/2$. Los autores presentan percentiles de las distribuciones de interés.

Mediante estudios de Monte Carlo, se pone de manifiesto que el estadístico simétrico $F_M(2)$ resulta más potente que el Hasza y Fuller (1979), en la región de estacionariedad, $(\rho_1 < 0, \rho_2 < 0)$, incluso en la frontera de esta región. En la región en que al menos algún $\rho_j > 0$, la potencia del F simétrico es aún más competitiva con el F de Hasza y Fuller. Ambos estadísticos presentan un ligero sesgo cuando ρ_1 es ligeramente mayor que 0 y ρ_2 está próximo a 0.

El que estos contrastes contemplen sólo la existencia de dos raíces unitarias podría, en principio, parecer una limitación; sin embargo, en la práctica, esto no supone un gran problema, ya que generalmente las series temporales que aparecen en economía tienen a lo sumo este número de raíces.

Los estadísticos que intervienen en estos contratos son cómodos de construir y de utilizar. Desde nuestro punto de vista, los principales inconvenientes que presentan son su aplicabilidad exclusiva a modelos autorregresivos puros, y su baja potencia en determinadas alternativas. Este último problema está presente en general en todos los contratos de raíz unitaria pero en este caso, al contrastar conjuntamente la existencia de dos raíces unitarias, el problema se agrava, pues el test puede en ocasiones concluir erróneamente que la serie contiene dos raíces unitarias en situaciones en que no contenga ninguna.

3.3. Representaciones generales: proceso ARMA y procesos con innovaciones débilmente dependientes.

Hemos visto que el contraste básico de Dickey y Fuller (1979) de una raíz unitaria en modelos $AR(1)$ se generaliza fácilmente al caso de modelos $AR(p)$; sin embargo, no se puede extender directamente a modelos $ARMA(p, q)$, ya que se basa en la condición de ruido blanco de las innovaciones.

Dicha restricción tiene bastante trascendencia a la hora de contrastar la existencia de raíz unitaria en series temporales económicas, sobre las que existen indicios considerables para pensar que contienen términos medias móviles (véase entre otros Schwert (1987)). A lo largo de este apartado expondremos los distintos contrastes que se han propuesto para estos casos más generales.

3.3.1. Aproximación mediante un proceso autorregresivo.

Said y Dickey (1984) intentan resolver el problema comentado anteriormente, probando que es posible aproximar un modelo ARIMA $(p, 1, q)$ por un autorregresivo cuyo orden es una función del número de observaciones, T . Su procedimiento de contraste es muy simple, y consiste en utilizar el estadístico t en una regresión ADF de orden k , escogiendo k de forma que $k=o(T^{1/3})$. Este estadístico tiene la misma distribución límite que la del correspondiente estadístico para modelos autorregresivos puros, y cuyos percentiles aparecen recogidos en las tablas de Fuller (1976), pág. 373. De esta forma, es posible contrastar la hipótesis nula de una raíz unitaria *sin conocer los órdenes p y q* .

Este procedimiento de contraste resulta muy aconsejable en la práctica ya que, aparte de no requerir el conocimiento de p y q , es muy fácil y cómodo llevarlo a cabo y además tiene mejores propiedades de potencia que otros contrastes de aplicación similar (ver Schwert (1989) y Pantula y Hall (1991)).

3.3.2. Modelos ARIMA $(p, 1, q)$ con p y q conocidos.

En el caso menos realista de modelos ARIMA $(p, 1, q)$ con p y q conocidos y media nula, Said y Dickey (1985) proponen un procedimiento de contraste basado en el estadístico tipo t similar al del contraste de Dickey-Fuller, pero obtenido a partir de una estimación no lineal, por el algoritmo de Gauss-Newton (detallado en Fuller (1976), del proceso ARMA que genera la serie. Demuestran que este estadístico tiende en distribución hacia la de Dickey-Fuller.

Obtienen un resultado similar en el caso de una variable con media μ distinta de 0, sin más que trabajar la variable en desviación de su media muestral.

La extensión de este procedimiento de contraste a modelos ARIMA que incluyen una tendencia lineal en el tiempo se aborda en un trabajo posterior por Said (1991), obteniendo también un estadístico tipo t cuya distribución límite coincide con la de Dickey y Fuller (1979).

Las pobres propiedades de estos contrastes (ver Said y Dickey (1985) y Said (1991)), junto con la necesidad de conocer los órdenes p y q del modelo ARIMA, desaconsejan su uso en la práctica.

3.3.3. Modelos más generales.

Phillips (1987) desarrolla contrastes de raíz unitaria a través del estimador de regresión MCO y del estadístico tipo t , para modelos generales que incluyen innovaciones distribuidas heterogéneamente y débilmente dependientes, basándose en resultados de la teoría central del límite funcional (ver Billingsley (1968)). Este procedimiento tiene la ventaja de que, a diferencia de las aproximaciones expuestas anteriormente (en 3.3.1. y 3.3.2.), no se requiere la estimación de parámetros desconocidos adicionales. Esto, junto al marco mas general de su aplicación, explica el mayor impacto que han tenido sus resultados en la práctica.

Se considera $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ un proceso estocástico, generado por:

$$3.3.2) \quad X_t = \rho X_{t-1} + u_t \quad t = 1, 2, \dots$$

donde u_t verifica:

$$a) \quad E(u_t) = 0 \quad \forall t$$

$$b) \quad \sup_t E |u_t^\beta| < \infty \text{ para algún } \beta > 2$$

$$c) \quad \text{Existe } \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} (T^{-1} S_T^2) \text{ y } \sigma^2 > 0, \text{ siendo } S_T = \sum_{j=1}^T u_j$$

d) $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$ es una mezcla fuerte con coeficientes de mixtura α_m que satisfacen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{1-2/\beta} < \infty.$$

Las suposiciones a), b), c y d) incluyen a la vez dependencia temporal y heterocedasticidad en el proceso $\{u_t\}_{t=1}^{\infty}$, englobando una amplia variedad de mecanismos generadores para la sucesión de innovaciones, incluyendo el caso de modelos ARMA de orden finito estacionarios bajo condiciones muy generales sobre los errores subyacentes.

Phillips (1987) considera el estimador MCO normalizado y el estadístico tipo t para la hipótesis nula ρ en la regresión (3.3.2). Sus distribuciones asintóticas bajo $\rho=1$, obtenidas por el autor, contienen los parámetros desconocidos

$$\sigma_0^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E(u_t^2) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1} S_T^2)$$

Pero el autor demuestra (basándose en los trabajos de White y Domowitz (1984) y Newey y West (1987) que el utilizar estimadores consistentes de estos parámetros para modificar los estadísticos iniciales, conduce a estadísticos corregidos cuya distribución límite coincide con la de Dickley-Fuller, y con los cuales se pueden utilizar una vez más las tablas de Fuller (1976). Estos estadísticos toman la forma:

$$Z(\hat{\rho}) = T(\hat{\rho} - 1) - (1/2)(s_{\pi}^2 - s_u^2) / (T^{-2} \sum_{i=1}^T X_{i-1}^2)$$

$$Z(\hat{\tau}) = (\sum_{i=1}^T X_{i-1}^2)^{1/2} (\hat{\rho} - 1) / s_{\pi} - (1/2)(s_{\pi}^2 - s_u^2) [s_{\pi} (T^{-2} \sum_{i=1}^T X_{i-1}^2)^{1/2}]^{-1}$$

siendo

$$s_u^2 = T^{-1} \sum_{i=1}^T u_i^2$$

y

$$s_{\pi}^2 = T^{-1} \sum_{i=1}^T u_i^2 + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^l \omega_{\tau} \sum_{i=\tau+1}^T u_i \cdot u_{i-\tau}$$

donde $\omega_{\tau} = 1 - \tau / (l + 1)$ con $l = o(T^{1/4})$, y donde u_i se obtiene o bien como residuo de la regresión (3.3.2), o bien como $(X_i - X_{i-1})$.

La obtención de estos estadísticos corregidos lleva consigo la elección del parámetro l , que se conoce como parámetro de truncamiento; ésta debe realizarse empíricamente, escogiendo por ejemplo como valor de l aquel a partir del cual las autocorrelaciones muestrales de u_i se hacen muy pequeñas, para alcanzar de esta manera un valor estabilizado para s_{π}^2 .

Estas ideas se extienden en Phillips y Perron (1988) y Perron (1988) a los casos en que se incluye o bien una constante, o bien una tendencia lineal en la especificación del modelo. En ambos casos, los estadísticos se obtienen aplicando el mismo razonamiento que en el caso anterior, llegando a las expresiones:

$$Z(\hat{\rho}_{\mu}) = T(\hat{\rho}_{\tau} - 1) - \lambda / m_{xx}$$

$$Z(\hat{\tau}_{\mu}) = (s_u / s_{\pi}) \hat{\tau}_{\mu} - \lambda' s_{\pi} / m_{xx}^{1/4}$$

$$\text{y } Z(\hat{\rho}_{\tau}) = T(\hat{\rho}_{\tau} - 1) - \lambda / M$$

$$Z(\hat{\tau}_{\tau}) = (s_u / s_{\pi}) \hat{\tau}_{\tau} - \lambda' s_{\pi} / M^{1/2}$$

donde $m_{xx} = T^{-2} \sum (X_t - \bar{X})^2$ $\bar{X} = T^{-1} \sum X_t$, $\lambda = (1/2)(s_{\pi}^2 - s_u^2)$ $\lambda' = \lambda/s_{\pi}^2$ y $M = 12 \det(X'X)T^{-1}$

utilizando para u_t el residuo de regresión del modelo especificado.

En Perron (1988) se indica que los estadísticos F para la hipótesis conjuntas introducidos por Dickey y Fuller (1981) y que han sido tratados en 2.1, también pueden ser corregidos para las innovaciones $\{u_t\}$ más generales, tienen las mismas distribuciones asintóticas que las presentadas en Dickey y Fuller (1981).

Señalaremos finalmente que Ouliaris, Park y Phillips (1989) extienden lo anterior a modelos que contienen una tendencia polinómica bajo la hipótesis alternativa.

En la actualidad se ha extendido considerablemente el uso de los estadísticos corregidos según Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988), en particular cuando la serie presenta síntomas de heteroscedasticidad. El valor que se escoge para el parámetro de truncamiento influye en gran medida en las propiedades del contraste, por lo que conviene hacer una elección adecuada del mismo. El problema de la baja potencia sigue estando presente en estos tests, y en ocasiones parece preferible usar el procedimiento de Said y Dickey (1984) (ver el pequeño estudio de simulación de Monte Carlo realizado por Phillips y Perron (1988)).

Por otro lado, si bien todos los estadísticos anteriores tienen la misma distribución asintótica bajo la hipótesis nula que la de los correspondientes estadísticos de Dickey-Fuller para modelos autorregresivos, es evidente que en muestra finita estos estadísticos no son equivalentes entre sí, ni equivalentes a los de Dickey-Fuller, con lo que hacer uso de los valores críticos de Dickey-Fuller daría lugar a distorsiones en el tamaño de los contrastes. Esta situación es evidenciada empíricamente por Schwert (1987), que calcula mediante simulación los valores críticos en muestra finita de los estadísticos t citados anteriormente, cuando los datos simulados siguen un proceso ARIMA (0,1,1). Estos valores resultan ser bastante sensibles al proceso que genera los datos (incluso para muestras grandes). Asimismo, Schwert (1989) revela aspectos importantes, que deben tenerse en cuenta cuando se aplican los contrastes para decidir la existencia de raíz unitaria. En este trabajo, el autor calcula el tamaño real de los contrastes para distintos procesos ARIMA (0,1,1), y lo compara con el tamaño nominal basado en la distribución de Dickey-Fuller. Su estudio refleja cómo todos los estadísticos son sensibles a la presencia de un componente MA en el proceso. En particular, los estadísticos de Phillips y Perron distan bastante de sus distribuciones asintóticas, incluso para tamaños muestrales tan grandes como $T=10.000$. De todo su estudio se desprende que el mejor test, en el sentido de que su tamaño está más próximo al nivel nominal, para todos los modelos ARIMA (0,1,1) analizados, es el test tipo t

de raíz unitaria para un modelo autorregresivo de orden superior sugerido por Said y Dickey (1984).

Siguiendo con la consideración de modelos generales, Kahn y Ogaki (1990) han desarrollado un nuevo contraste basado en la conocida distribución χ^2 .

Constrastan la hipótesis nula $H_0: \rho=1$ en un proceso generado según:

(3.3.3) $X_t = \rho X_{t-1} + u_t$ donde u_t verifica condiciones generales de interdependencia (especificadas en la suposición 1 de Kahn y Ogaki (1990), pág. 39). Para ello, proponen el estadístico:

$$J_T = 2 (s_u^2 / s_t^2) (\hat{\beta} - 0.5)$$

siendo $\hat{\beta}$ el estimador MCO de β en la regresión $X_t = \beta \Delta X_t + e_t$ y

$$s_u^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \hat{\rho} X_{t-1})^2$$

$$s_T^2 = T^{-1} \sum_{t=-h(T)}^{h(T)} [I(T) - \tau / I(T)] \sum_{i=1}^T [(X_t - \hat{\rho} X_{t-1})(X_{t-\tau} - \hat{\rho} X_{t-\tau-1})]$$

donde $\hat{\rho}$ es el estimador MCO de ρ en la ecuación (3.3.3) y $1(T)$ es el parámetro de truncamiento, que satisface $1(T) = O(T^{1/4})$.

El estadístico J_T converge en distribución a χ^2_1 cuando se verifica la hipótesis nula.

Este contraste es poco conocido y, acerca de su comportamiento se dispone únicamente del estudio que realizan en este mismo trabajo Kahn y Ogaki (1990), según el cual su procedimiento resulta ser en general más potente que los basados en los estadísticos $T(\hat{\rho}-1)$ y $\hat{\tau}$ de Dickey y Fuller (1979) cuando el valor ρ en (3.3.3) es menor que la unidad pero está próximo a ella, y el tamaño muestral es pequeño.

3.3.4. Tests basados en el multiplicador de Lagrange.

Solo (1984) desarrolla un contraste para la existencia de una raíz unitaria en un modelo ARMA (p,q) mediante el procedimiento del multiplicador de Lagrange (que denotaremos por ML). Considera un modelo de la forma:

$$(1+d(B))e_t(\theta) = X_t \rho X_{t-1} - a' Z_{t-1}$$

donde $Z_{t-1} = (Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p})'$, $Z_t = \Delta X_t$, $\theta = (\rho, a', d') = \rho, \theta_2$

$$d(B) = \sum_{i=1}^q d_i b^i \quad y \quad (a', d') = (a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_q)$$

en el que se supone que bajo la hipótesis nula $H_0: \rho=1$, existe un verdadero valor θ_0 , tal que $e_t(\theta_0) = e_t$ es una sucesión iid con media cero y varianza σ^2 ; a partir de él, construye el test del multiplicador de Lagrange para esta hipótesis nula, con la ventaja típica de este tipo de contraste que sólo se requiere estimación bajo la nula. El estadístico ML que utiliza se basa en las expresiones generales de éste presentadas por Breusch y Pagan (1980) y su obtención puede efectuarse de forma sencilla a través de una regresión auxiliar, de la manera siguiente:

1. Se ajusta un modelo ARMA (p,q) para Z.
2. Se calculan los residuos $\hat{e}_t$ de este ajuste; y se obtienen las derivadas $de/d\rho = -\hat{\xi}_{t-1}$ a partir de la expresión $\hat{\xi}_{t-1} = (1 + \hat{\alpha}(B))^{-1} X_{t-1}$, donde $\hat{\alpha}(B)$ es el valor estimado del polinomio medias móviles del proceso.
3. El estadístico ML viene dado por $T \cdot \hat{R}_1^2$, donde $\hat{R}_1^2$ es el coeficiente de determinación de la regresión de $\hat{e}_t$ sobre $\hat{\xi}_{t-1}$.

Solo (1984) obtiene la distribución límite de ML que coincide con la de $\hat{t}_2$, siendo $\hat{t}$ el estadístico t de Dickey y Fuller para el modelo AR, con lo que para el contraste asintótico se pueden utilizar de nuevo las tablas dadas por Fuller (1976).

El principio de ML también es utilizado por Schmidt y Lee (1991) y Schmidt y Phillips (1992) para contrastar la hipótesis de raíz unitaria en un modelo general, que incluye además una tendencia temporal. Los autores consideran un modelo parametrizado en la forma

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} Y_t &= a + bt + X_t \\ X_t &= \rho X_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

con $u_t \sim \text{Nid}(0, \sigma_u^2)$ y condición inicial fijada X_0 .

La hipótesis de raíz unitaria es $\rho = 1$, que se contrasta según el principio de ML. Se define:

$$a_x = a + X_0, \quad \hat{b} = \Delta Y = (Y_T - Y_1)/(T-1)$$

$$\hat{a}_x = Y_t \hat{b} \text{ y } \hat{S}_t = Y_t - \hat{a}_x - \hat{b}t$$

donde $\hat{a}_x$ y $\hat{b}$ son los estimadores MV, imponiendo $\rho = 1$, de los parámetros correspondientes, y $\hat{S}_t$ es el residuo de (3.3.4) resultante de emplear estos estimadores.

Los contrastes considerados por Schmidt y Lee (1991) están basados en la regresión

$$(3.3.5) \quad \Delta \hat{S}_t = \theta \hat{S}_{t-1} + \text{error}, t=2, \dots, T$$

Los estadísticos que se utilizan para el contraste de raíz unitaria son $T \bar{\theta}$ con $\bar{\theta}$ el estimador MCO de θ en (3.3.5), y $\bar{T}$ el estadístico t usual para contrastar la hipótesis $\theta=0$ en (3.3.5).

Dichos estadísticos, bajo la hipótesis nula de que $\rho=1$, no dependen de los parámetros a , b ó X_0^* (donde $X_0^* = X_0/\sigma_u$) y tampoco lo hacen sus distribuciones bajo la nula, que están influidas únicamente por el tamaño muestral, T . Los valores críticos de estos estadísticos, calculados mediante simulación, se recogen en la tabla 1 de Schmidt y Lee (1991), para distintos valores de T .

El procedimiento de contraste se puede aplicar también cuando u_t en (3.3.4) verifica las condiciones generales de Phillips (1987), detalladas en (3.3.2), corrigiendo los estadísticos según la propuesta por Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988).

El trabajo de Schmidt y Phillips (1992) analiza los estadísticos $\tilde{p}$ y $\tilde{\tau}$ que se obtienen de la misma forma que los de Schmidt y Lee (1991), con la única diferencia de que en la regresión (3.3.5) se añade una constante⁴. Estos estadísticos tienen las propiedades comentadas antes, y sus distribuciones límite se presentan en el trabajo citado.

Los estudios de potencia empírica reflejan que cualitativamente, el comportamiento de los estadísticos $\tilde{p}$ y $\tilde{\tau}$ y $\bar{p}$ y $\bar{\tau}$ respecto de los de Dickey y Fuller es similar, sin alcanzar ninguna mejoría sobre estos últimos (ver Schmidt y Lee (1991) y Schmidt y Phillips (1992)), y en ocasiones son bastante menos potentes (Sánchez de la Vega (1993)). No parecen, por lo tanto, muy aconsejables en la práctica.

Además, se extienden estos contrastes al caso en que la tendencia determinística en (3.3.4) no sea necesariamente lineal, sino en general un polinomio de grado p . Se dan las distribuciones asintóticas, y valores críticos en muestra finita para $p=2,3$ y 4.

3.3.5. Tests de raíz unitaria basados en estimadores por variables instrumentales.

Un método de estimación alternativo en el modelo lineal general cuando las variables explicativas están correladas con el término de error, es el método de las variables instrumentales, que representaremos por VI. En el se basa Hall (1989) para proponer contrastes de raíz unitaria en una serie temporal con innovaciones media móviles, mediante un estimador variable instrumental.

Considera una serie temporal $\{X_t\}$ generada por el proceso

$$(3.3.6) \quad X_t = \rho X_{t-1} + u_t \quad (t=1, \dots, T) \quad \rho=1$$

donde X_0 tiene una distribución fijada independiente de T , y

$$u_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q},$$

en el que se supone que $\{e_t\}$ satisface las condiciones siguientes:

$$(3.3.7) \quad 1.- e_t \sim \text{iid}(0, \omega^2) \quad \forall t.$$

$$2.- \sup_t E \left(|u_t|^{\beta+\varepsilon} \right) < \infty \text{ para algún } \beta > 2 \text{ y } \varepsilon > 0.$$

El autor plantea la estimación de los modelos siguientes:

$$(3.3.8) \quad X_t = \bar{\rho}_1 X_{t-1} + \bar{u}_t$$

$$(3.3.9) \quad X_t = \hat{\rho}_1 X_{t-1} + \hat{u}_t$$

$$(3.3.10) \quad X_t = \tilde{\mu} + \beta \left(t - \frac{1}{2}T\right) + \tilde{\rho}_1 X_{t-1} + \tilde{u}_t$$

y propone un estimador variable instrumental, que usa X_{t-k} para $k > q$ como el instrumento sobre X_{t-1} . De esta forma, se observa que el procedimiento no requiere conocer el valor de q , pero si una cota superior suya.

Una ventaja de estos estimadores es que las distribuciones límite, bajo las condiciones (3.3.7) de los estimadores $T(\bar{\rho}_1)$, $T(\hat{\rho}_1)$, y $T(\tilde{\rho}_1)$ para $\{X_t\}$ generada por (3.3.6) son las mismas que las de los correspondientes estadísticos MCO normalizados por Dickey y Fuller (1979).

Por otro lado, considerando ahora los estadísticos t correspondientes, se tiene

que sus distribuciones límite dependen de los parámetros desconocidos

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E[T^{-1}(\sum_{i=1}^T u_i)^2] \quad \text{y} \quad \sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{i=1}^T E u_i^2 ;$$

de forma similar a la idea de Phillips (1987), se aplica una corrección a dichos estadísticos, para conseguir estadísticos que tienen asintóticamente las mismas distribuciones de los estadísticos t , $\hat{\epsilon}$, $\hat{\epsilon}_\mu$ y $\hat{\epsilon}_\tau$ de Dickey y Fuller (1981). Estos estimadores presentan los mismos problemas que los de Phillips y Perron (1988) en relación a la mala aproximación de la distribución asintótica para muestra finita, lo que altera el tamaño de los contrastes (ver Hall (1989)), y su uso no supone ninguna ventaja respecto al tratamiento más extendido de Phillips-Perron.

Pantula y Hall (1991) aplican el mismo enfoque por variables instrumentales al caso de un modelo con $p > 1$ componentes autorregresivos.

Señalaremos que esta técnica no aporta ventajas de interés, ya que presenta los problemas de nivel y potencia ya comentados para otros contrastes diseñados para estos modelos; además, según el análisis de Pantula y Hall (1991), su aplicación correcta requiere que los órdenes p y q se especifiquen adecuadamente⁵. En la mayoría de los casos, resulta más aconsejable el estadístico t de Said y Dickey (1984), salvo cuando p y q son conocidos.

3.3.6. Existencias de varias raíces unitarias

Tanto los tests simples de una única raíz unitaria (Dickey y Fuller, 1979 y 1981), como los conjuntos para raíces unitarias múltiples (Hasza y Fuller (1979)) sufren un problema común que pusieron de manifiesto Dickey y Pantula (1987) (para procesos autorregresivos) mediante estudios de Monte Carlo: si el verdadero número de raíces unitarias presentes en el modelo es mayor que las que se contemplan en la hipótesis nula, el tamaño empírico del contraste es superior al nivel nominal. En el estudio de Monte Carlo que realizan para un proceso autorregresivo de orden 3, se observa que, tanto si el proceso tiene tres raíces unitarias, como si tiene dos, el test de Dickey y Fuller rechaza la hipótesis de raíz unitaria en favor de estacionalidad, un porcentaje de veces superior al nivel nominal, en contra de lo que cabría esperar intuitivamente.

Esto hace que la probabilidad de encontrar las raíces unitarias de un modelo se reduzca si se sigue el procedimiento de contrastar en primer lugar la hipótesis nula de una raíz unitaria simple para la serie en niveles, y a continuación contrastar (si la primera no ha sido rechazada) la presencia de una segunda raíz unitaria sobre la serie diferenciada, luego una tercera, y así sucesivamente.

Dickey y Pantulla (1987) prueban, para un proceso autorregresivo, que puede obtenerse un procedimiento secuencial, que conserva el tamaño nominal del contraste, simplemente invirtiendo el orden de contrastación descrito en el párrafo anterior. Para ello, proponen estadísticos del tipo t y tipo F .

Basándose en estas ideas, Pantulla (1989) contempla el campo más amplio de modelos ARIMA generales, y presenta métodos para contrastar la hipótesis de que un proceso de esta clase tiene un número especificado de raíces unitarias. Considera la serie temporal $\{X_t\}$ que satisface:

$$(3.3.11) \quad X_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + e_t \quad t=1,2,\dots$$

con $\{e_t\}$ una sucesión de variables aleatorias iid($0, \sigma^2$) que verifican $E[|e_t|^{4+\delta}] < M$ para algún $\delta > 0$ y $M > 0$, y con condiciones iniciales constantes conocidas $(X_{-p+1}, \dots, X_0)$. Supone además, que los polinomios AR y MA no tienen raíces comunes y que todas las raíces tienen valor absoluto menor o igual que la unidad.

El modelo se reparametriza en la forma:

$$(3.3.12) \quad (1-B)^p X_t = \sum_{i=1}^p \psi_i (1-B)^{i-1} X_{t-1} + u_t$$

donde $u_t = \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + e_t$ con lo que existen d raíces unitarias en el polinomio

autorregresivo si y solo si $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_d = 0$.

Suponiendo ahora que el número máximo de raíces unitarias presentes en los datos es $s(\leq p)$, Pantulla (1989) considera los modelos de regresión:

$$(3.3.13) \quad (1-B)^r X_t = \sum_{i=1}^r a_i (1-B)^{i-1} X_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-r} b_j (1-B)^j X_{t-j} + \text{error}$$

$r=0,1,\dots,s$

donde $k(\geq p)$ se elige dependiendo de T (el número de observaciones de la serie). (Para procesos autorregresivos puros, se podría tomar $k=p$ si p es conocido. Con $k=p$, se tiene que el modelo (3.3.13) es una reparametrización del modelo (3.3.11). De esta forma, la hipótesis H_r de que el proceso tiene exactamente r raíces unitarias equivale a que $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$.

Para contrastar dicha hipótesis, se considera en primer lugar el estadístico F usual para $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ en (3.3.13) denotado por $F_{r,T}(k)$.

Por otro lado, para contrastar la hipótesis H_r contra la alternativa H_{r-1} , se tiene en cuenta que en (3.3.13), se tiene $a_1=a_2=\dots=a_{r-1}=0$ tanto bajo la hipótesis nula H_r , como bajo la alternativa H_{r-1} , mientras que $a_r=0$ bajo H_r , y en cambio $a_r<0$ bajo H_{r-1} . Se propone el estadístico denotado por $t_{r,\tau}(k)$, que el estadístico tipo t para contrastar $a_r^*=0$ en la regresión:

$$(1-B)^r X_t = a_r^* (1-B)^{r-1} X_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-r} b_j^* (1-B)^r X_{t-j} + \text{error}$$

Bajo las suposiciones de (3.3.11), y tomando k como función del tamaño muestral T , de forma que k^{-1} y $T^{-1}k^3$ tiendan a cero cuando T tiende a infinito, se dan las distribuciones límite bajo H_d de $F_{r,\tau}(k)$ y $t_{r,\tau}(k)$; obteniéndose que para $r>d$, $F_{r,\tau}(k)$ diverge a infinito y $t_{r,\tau}(k)$ diverge a infinito negativo. Para $r=d$, su distribución límite del estadístico $t_{d,\tau}(k)$ es la del estadístico $\hat{\phi}$ de Dickey y Fuller. En lo que se refiere al estadístico $F_{r,\tau}(k)$ para $r \leq d$, Pantula (1985) obtuvo los percentiles empíricos de su distribución límite para $1 \leq r \leq 5$ y distintos valores de α , representado por $F_r(d, \alpha)$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, si se sabe que existen a los sumo $s \leq p$ raíces unitarias (si no es así se tomaría $s=p$), Pantula (1989) propone dos criterios secuenciales para contrastar la hipótesis H_d , siendo $d \leq s$:

a) Criterio basado en el estadístico F :

"Se rechaza la hipótesis H_d (en favor de H_{d+1}) si $F_{r,\tau}(k) > F_r(r, \alpha)$ para $r=d, d+1, \dots, s$ ".

b) Procedimiento basado en el estadístico t :

"Se rechaza H_d en favor de H_{d+1} si $t_{r,\tau}(k) < \hat{t}_\alpha$ para $r=d, d+1, \dots, s$; donde $\hat{t}_\alpha$ es el α -percentil inferior de la distribución asintótica de $\hat{\phi}$, dada en la tabla de Fuller (1976), pág. 373".

Este último procedimiento secuencial tiene la ventaja sobre el primero de que tan solo utiliza las tablas dadas por Fuller (1976). Además, estudios de simulación llevados a cabo por Dickey y Pantula (1987) (para modelos autorregresivos, concretamente AR(3)) conducen a la conclusión general de que el procedimiento t^* es más potente que el F en muchos casos; por tanto, se sugiere en la práctica el uso de t^* en lugar de F .

3.3.7. Tests de la hipótesis nula de estacionariedad frente a la alternativa de raíz unitaria.

Ya hemos comentado antes que el gran problema que presentan todos los tests que contrastan la existencia de raíz unitaria es su baja potencia en ciertas alternativas. Acerca de ello Kwiatkowski y otros (1992) apuntan que, en general, la propia forma de llevar a cabo los contrastes de hipótesis clásicos, asegura que la hipótesis nula se "acepta" salvo que exista una fuerte evidencia sobre lo contrario.

Esto lleva a los autores citados a proponer un contraste de la hipótesis nula de estacionariedad contra la alternativa de una raíz unitaria, que tiene la gran ventaja de que recoge la hipótesis de estacionariedad en el hecho de que un parámetro se anule.

Consideran una serie observada X_t , $t = 1, 2, \dots, T$, descompuesta en la forma:

$$(3.3.19) \quad X_t = b_t + Y_t + v_t$$

donde Y_t es un paseo aleatorio:

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t$$

con $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma_e^2)$ y donde se considera Y_0 como un valor inicial fijado. Además, v_t se considera que es un proceso estacionario que satisface las condiciones de regularidad de Phillips y Perron (1988), recogidas en 3.3.3.

De estas forma, la hipótesis de estacionariedad es simplemente $\sigma_e^2 = 0$, siendo X_t estacionario alrededor de una tendencia bajo esta hipótesis nula. Se considera también el caso en que $b=0$ en (3.3.19), en el cual, bajo la hipótesis nula, X_t es estacionario alrededor de un nivel (r_0).

para contrastar esta hipótesis, proponen el estadístico

$$\hat{\eta}_T = T^2 \sum_{t=1}^T S_t^2 / S_T^2$$

siendo $S_t = \sum_{i=1}^t u_i$ con u_t , $t=1, 2, \dots, T$ los residuos de la regresión de X sobre una constante y la variable tiempo para contrastar la estacionariedad alrededor de una tendencia; para la estacionariedad alrededor de un nivel la regresión se realiza sobre una constante únicamente, de manera que u_t equivale en este caso a la variable X_t en desviación de la media muestral, y el estadístico se denota entonces por η_μ ; S_{T-1}^2 tiene la expresión vista en 3.3.3.

Los autores obtienen las distribuciones asintóticas del estadístico y calculan los puntos de estas distribuciones mediante simulación; aparecen en la Tabla 1, pág.

166, de su trabajo.

También presentan los resultados de estudios de Monte Carlo sobre el tamaño y la potencia en muestra finita, de los test basados en $\hat{\eta}_\mu$ y $\hat{\eta}_\tau$. Se consideran en el estudio del tamaño, tanto errores iid como errores autocorrelados, AR(1), para distintos tamaños muestrales, y distintos valores para el parámetro de truncamiento 1. Se observa que, para errores iid, los tests tienen aproximadamente tamaño correcto excepto para muestras pequeñas y valores grandes de 1. De hecho, cuanto mayor es 1, mayor es el tamaño muestral que se requiere para que los resultados asintóticos sean relevantes.

El estudio de Sánchez de la Vega (1993) compara los resultados de este enfoque con los correspondientes a diversos tests de la hipótesis nula de raíz unitaria al aplicarlos a un mismo conjunto de series. Desafortunadamente no se observa que las conclusiones de este nuevo enfoque sean mucho más fiables que las de los tests tradicionales. En bastantes casos estos últimos se equivocan en menos ocasiones que los tests de Kwiatkowski y otros (1992); en otros, principalmente en muestra pequeña, es preferible utilizar este nuevo procedimiento. Señalaremos, no obstante, que en este estudio se consideran sólo dos valores posibles para el parámetro 1; dada la fuerte influencia del valor de 1 sobre los resultados del test, sería de gran interés ampliar el estudio a otros valores de este parámetro para ver si se confirman estos primeros resultados.

En cualquier caso, a la vista de estos resultados, puede resultar muy útil que el análisis de una serie a través de los tests tradicionales se complemente con el contraste de Kwiatkowski y otros (1992), con el fin de obtener conclusiones más fiables, en particular cuando la muestra disponible es corta.

Adoptando este enfoque de la hipótesis nula de estacionariedad, muy recientemente Bierens y Guo (1993) proponen un grupo de contrastes cuya distribución asintótica bajo la nula es una distribución Cauchy estándar. Los estadísticos en los que se basan tienen fórmulas; estos contrastes son relativamente complejas; por otra parte, los autores no realizan ningún estudio empírico sobre su comportamiento. Queda abierto, pues, el estudiar este comportamiento, y compararlo con el de los restantes procedimientos que se han propuesto.

4. PRESENTACION ESQUEMATICA DE LOS CONTRASTES DE RAIZ UNITARIA

En las páginas que siguen, ofrecemos cuadros resúmenes de los contrastes que hemos recogido en el presente trabajo, indicando en cada caso la expresión del estadístico, su distribución y las condiciones de su aplicación.

TABLA N° 1.- TEST DE RAIZ UNITARIA EN PROCESOS AR(1)

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
DICKEY-FULLER (1979) $Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t \quad (t=1,2,\dots,T) \quad (1)$ $H_0: \rho = 1$ ===== $Y_t - \mu = \rho(Y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t \quad (t=1,2,\dots,T)$ $H_0: \rho = 1$ ===== $[Y_t - a - bt] = \rho[Y_{t-1} - a - b(t-1)] + \epsilon_t$ $H_0: \rho = 1 \quad (t=1,2,\dots,T)$	Condición inicial fijada $Y_0 = 0$. $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ ===== Condición inicial fijada $Y_0 = 0$. $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ ===== Condición inicial fijada $Y_0 = 0$. $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$	$\hat{\rho}$: Estadístico MCO en la regresión (1) $\hat{\gamma}$: Estadístico t usual de significatividad del coeficiente de Y_{t-1} en una regresión de ΔY_t sobre Y_{t-1}. ===== $\hat{\rho}_\mu$: Estadístico MCO en una regresión de Y_t sobre una constante e Y_{t-1}. $\hat{\gamma}_\mu$: Estadístico t asociado. ===== $\hat{\rho}_b$: Estadístico MCO en una regresión de Y_t sobre una constante, $t - \frac{1}{2}T$ y Y_{t-1}. $\hat{\gamma}_b$: Estadístico t asociado.	Tabulada en Fuller (1976) bajo la hipótesis nula de un paseo aleatorio simple. ===== Tabulada en Fuller (1976) bajo la hipótesis nula de un paseo aleatorio simple. ===== Tabulada en Fuller (1976) bajo la hipótesis nula de un paseo aleatorio simple.

TABLA N° 2.- TESTS DE RAIZ UNITARIA EN PROCESOS AR(1)

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
DICKEY-FULLER (1981) $Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ $H_0: (\alpha, \rho) = (0, 1)$ =====	Y_1 fijada $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ =====	Φ_1 : Estadístico F usual de la hipótesis $H_0: (\alpha, \rho) = (0, 1)$. =====	Tabulada en Dickey-Fuller(1981). =====
$Y_t = \alpha + \beta(t-1-\frac{1}{2}T) + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ $H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$ $H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$	Y_1 fijada $\epsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$	Φ_2 : Estadístico F usual de la hipótesis $H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$. Φ_3 : Estadístico F usual de la hipótesis $H_0: (\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$.	Tabulada en Dickey-Fuller(1981). La distribución de Φ_3 no depende de α .

TABLA N° 3.- TEST DE RAIZ UNITARIA EN PROCESOS AR(1)

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
BHARGAVA (1986) $H_0: Y_t = \mu + e_t$ $\Delta Y_t = e_t \quad (t=2, \dots, T)$ $H_1: Y_t = \mu + [e_t / (1-\rho^2)^{1/2}]$ $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t$ $0 \leq \rho < 1$	$e_t \sim \text{Niid}(0, \sigma^2)$	$R_1 = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_t - Y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^2} \quad \text{donde} \quad \bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$ $N_1 = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_t - Y_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^T (Y_t - Y_1)}$ El test consistiría en: Para H_1 a) RH_0 para valores grandes de N_1 Para H_1 b) RH_0 para valores pequeños de N_1	En la tabla 1 de Bhargava (1986) se dan puntos porcentuales en muestra finita de los 4 estadísticos.
$H_1: Y_t = \mu + e_t$ $(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t$ $(t=2, \dots, T)$ H_1 a) $0 \leq \rho < 1$ H_1 b) $\rho > 1$		$R_2 = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_t - Y_{t-1})^2 - \frac{1}{T-1} (Y_T - Y_1)^2}{\frac{1}{(T-1)^2} \sum_{t=1}^T \left((T-1) Y_t - (t-1) Y_T - (T-t) Y_1 - (T-1) \left(\bar{Y} - \frac{1}{2} (Y_1 + Y_T) \right) \right)^2}$ $N_2 = \frac{\sum_{t=2}^T (Y_t - Y_{t-1})^2 - \frac{1}{T-1} (Y_T - Y_1)^2}{\frac{1}{(T-1)^2} \sum_{t=1}^T \left((T-1) Y_t - (t-1) Y_T - (T-t) Y_1 \right)^2}$ Para H_1 a) RH_0 para valores grandes de N_2 Para H_1 b) RH_0 para valores pequeños de N_2	
$H_0: Y_t = (\mu + b) + e_t$ $\Delta Y_t = b + e_t \quad (t=2, \dots, T)$ $H_1: Y_t = (\mu + b) + [e_t / (1-\rho^2)^{1/2}]$ $[Y_t - \mu - bt] = \rho[Y_{t-1} - \mu - b(t-1)] + e_t$ $0 \leq \rho < 1$			
$H_1: Y_t = (\mu + b) + e_t$ $[Y_t - \mu - bt] = \rho[Y_{t-1} - \mu - b(t-1)] + e_t$ $(t=2, \dots, T)$ H_1 a) $0 \leq \rho < 1$ H_1 b) $\rho > 1$			

TABLA N° 4.- TESTS DE RAZA UNITARIA EN MODELOS AUTORREGRESIVOS DE ORDEN SUPERIOR

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
DICKEY-FULLER (1981) $Y_t + \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t-j} = e_t$ Se reescribe como: $Y_t = \rho_1 Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \rho_j (Y_{t-j+1} - Y_{t-j}) + e_t \quad (1)$ $H_0: \rho_1 = 1$ ===== Media no nula: $(Y_t - \mu) + \sum_{j=1}^p \alpha_j (Y_{t-j} - \mu) = e_t$ $Y_t = k + \rho_1 Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \rho_j (Y_{t-j+1} - Y_{t-j}) + e_t$ $H_0: \rho_1 = 1$ ===== $(Y_t - a - bt) + \sum_{j=1}^p \alpha_j [Y_{t-j} - a - b(t-j)] = e_t$ $Y_t = k_1 + k_2 t + \rho_1 Y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \alpha_j (Y_{t-j+1} - Y_{t-j}) + e_t$ $H_0: \rho_1 = 1$	Condiciones iniciales constantes fijas. $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ===== Condiciones iniciales constantes fijas. $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ ===== Condiciones iniciales constantes fijas. $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$	$\hat{\rho}_1$: Estadístico MCO para ρ_1 en la regresión (1). $\hat{\tau}_p$: Estadístico t asociado. ===== Estadístico t usual del coeficiente de Y_{t-1} en una regresión de ΔY_t sobre una constante, Y_{t-1} y ΔY_{t-j} ($j=1, \dots, p-1$) ===== Estadístico t usual del coeficiente de Y_{t-1} en una regresión de ΔY_t sobre una constante, $t-(T/2)$, Y_{t-1} y ΔY_{t-j} ($j=1, 2, \dots, p-1$).	$\hat{\rho}_1$: $T(\hat{\rho}_1 - 1)$ tiene la misma distribución asintótica que $T(\hat{\rho} - 1)$. La distribución de $\hat{\tau}_p$ es la misma que la de $\hat{\tau}$. ===== Misma distribución límite que la de $\hat{\tau}_p$ (para AR(1)). ===== Misma distribución límite que la de $\hat{\tau}_p$ (para AR(1)).

TABLA N° 5.- TESTS DE HIPOTESIS CONJUNTA DE DOS RAICES UNITARIAS

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
HASZA Y FULLER (1979) $Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t-j} + e_t$ H_0: el polinomio autorregresivo contiene 2 raices unitarias. Reparametrización: $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 \Delta Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-2} \beta_j \Delta^2 Y_{t-j} + e_t \quad (1)$ $H_0 : \phi_1 = \phi_2 = 1$ ===== Extensiones análogas a modelos que incluyen una constante o una tendencia lineal.	$e_t \sim iid(0, \sigma^2)$ $Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_0$ constantes no conocidas.	Estadístico F de H_0 en la regresión (1)	Tabulada en Hasza y Fuller (1979).

TABLA N° 6.- TESTS DE HIPOTESIS CONJUNTA DE DOS RAICES UNITARIAS

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
SEN Y DICKEY (1987) $Y_t - \mu = \sum_{j=1}^{p+2} \alpha_j (Y_{t-j} - \mu) + e_t$ H_0: el polinomio autorregresivo contiene 2 raices unitarias. Reparametrización $\Delta^2 (Y_t - \mu) = \rho_1 (Y_{t-1} - \mu) + \rho_2 \Delta (Y_{t-1} - \mu) + \sum_{j=1}^p \beta_j \Delta^2 (Y_{t-j} - \mu) + e_t \quad (1)$ $H_0: \rho_1 = \rho_2 = 0$	$e_t \sim \text{Niid}(0, \sigma^2)$ $Y_0 = Y_1 = \dots = Y_{p+1} = \mu$	$F_{M(2)}$: Estadístico simétrico: estadístico F para H_0, en la regresión (1) considerada "hacia atrás" y "hacia adelante".	Tabulada en Sen-Dickey (1987).

TABLA N°7.- TESTS DE RAIZ UNITARIA EN PROCESOS ARMA

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
SAID-DICKEY (1984) $Y_t = \rho Y_{t-1} + Z_t \quad (t=1,2,\dots)$ con $Z_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Z_{t-i} - e_t + \sum_{j=1}^q \beta_j e_{t-j}$ $\Delta Y_t = (\rho-1) Y_{t-1} - d_1 Z_{t-1} - \dots - d_k Z_{t-k} + e_{tk} \quad (1)$ $K = O_p(T^{\frac{1}{2}})$ ===== Análogamente en modelos con media $\neq 0$, sustituyendo Y_t por $Y_t - \bar{Y}$	$Y_0 = 0$ $e_t \sim \text{Niid}(0, \sigma^2)$ Z_t estacionario e invertible	Estimador MCO: $\rho-1$, del coeficiente de Y_{t-1} en la regresión (1). τ: estadístico t asociado =====	Bajo la H_0 se da la distribución límite de $[1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p]^{-1} [1 + \beta_1 + \dots + \beta_q] T(\beta-1)$ y la de τ que coincide con la del estadístico t_τ de Dickey-Fuller (1979). ===== Análogo a lo anterior para $T(\beta-1)$ y t_μ de Dickey-Fuller.

TABLA N° 8.- TESTS DE RAIZ UNITARIA EN MODELOS ARMA

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
SAID Y DICKEY (1985) $Y_t - \rho Y_{t-1} = e_t + \beta e_{t-1} \quad (1)$ $H_0: \rho = 1$ $e_t(\rho, \beta, \delta) = Y_t - \sum_{j=0}^{t-2} (-\beta)^j (\rho + \beta) Y_{t-1-j} + (-\beta)^{t-2} \delta \quad (2)$ $e_0 = \delta$ $t \geq 1$ ===== De forma análoga se extiende a modelos ARIMA generales y al caso en que se incluye una media no nula. La extensión al caso con tendencia lineal se da en Said (1991).	$Y_0 = 0$ $ \beta < 1$ $e_t \sim \text{Niid}(0, \sigma^2)$	Estimador Gauss-Newton en una etapa para (2), que estimaría $\hat{\gamma}' = (\rho - \beta, \beta - \beta, \delta - \delta) \quad \text{siendo}$ $\hat{\theta}' = (\rho, \beta, \delta)$ estimación inicial de $\theta' = (\rho, \beta, \delta)$. Estimador mejorado: $\hat{\theta} + \hat{\gamma}$. Estadístico de contraste: estadístico t para $\rho = 1$ (tomando en su expresión el estimador σ^2 siguiente: $S_e^2 = T^{-1} \sum e_t^2 (\hat{\theta} + \hat{\gamma})$	La de τ de Dickey y Fuller, tabulada en Fuller (1976).

TABLA N°9.- TESTS DE RAIZ UNITARIA EN MODELOS GENERALES

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PHILLIPS (1987) $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t \quad (t=1,2,\dots)$ $H_0: \rho=1$	Y_0 tiene cierta distribución especificada. a) $E(u_t)=0 \quad \forall t$ b) $\sup E u_t ^\beta < \infty$ para algún $\beta > 2$. c) $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1} S_T^2)$ existe, siendo $\sigma^2 > 0$ $S_T = \sum_{j=1}^T u_j$ d) $\{u_t\}_t$ es una mezcla fuerte con coeficiente de mezcla α_m que satisfacen $\sum_1^{\infty} \alpha_m^{1-\frac{2}{\beta}} < \infty$	$Z(\hat{\rho}) = T(\hat{\rho}-1) - \frac{1}{2} \left[\frac{(S_{T1}^2 - S_u^2)}{(T^{-2} \sum_1^T Y_{t-1}^2)} \right]$ $S_{T1}^2 = T^{-1} \sum_1^T u_t^2 + 2T^{-1} \sum_{v=1}^T w_{t,v} \cdot \sum_{t=v+1}^T u_t u_{t-v}$ con $w_{t,v} = 1 - v/(t+1)$ $S_u^2 = T^{-1} \sum_1^T u_t^2$ $Z(\hat{\rho}) = \frac{[\sum_1^T Y_{t-1}^2]^{\frac{1}{2}} [\hat{\rho}-1]}{S_{T1}}$ $\frac{1}{2} [S_{T1}^2 - S_u^2] [S_{T1} (T^{-2} \sum_1^T Y_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$ ===== En la regresión (2): $z(\hat{\rho}_n) = T(\hat{\rho}_n - 1) - \lambda/m_{Y_Y}$ $z(\hat{\tau}_n) = (s_u/s_n) - \lambda' s_n/m_{Y_Y}$ En la regresión (3): $z(\hat{\rho}_n) = T(\hat{\rho}_n - 1) - \lambda/M \quad M=12 X'X T^6$ $z(\hat{\tau}_n) = (s/s_n)T - \lambda' s_n/M^6$ donde $m_{Y_Y} = T^{-2} \sum (Y_t - \bar{Y})^2$ $\lambda = \frac{1}{2}(s_n^2 - s^2) \quad \lambda' = \lambda/s_n^2$ tomando en su cálculo u como el residuo de la regresión correspondiente.	Distribución límite de $z\rho$ idéntica a la de $T(\hat{\rho}-1)$ para errores iid(0, σ^2). Esto mismo sucede con z y el estadístico $\hat{\tau}$ para u_t iid(0, σ^2).
===== PHILLIPS-PERRON (1988) $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t \quad (t=1,2,\dots) \quad (1)$ $\rho=1$ Consideramos las ecuaciones de regresión: $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + u_t \quad (2)$ $Y_t = \mu + \beta(t-1/2T) + \rho Y_{t-1} + u_t \quad (3)$	u_t satisface a), b), c) y d) anteriores. Y_0 v.a. (puede ser constante), cuya distribución está fijada y es independiente del tamaño muestral T .	===== Bajo la H_0: los datos están generados por (1); las distribuciones límite de $z(\hat{\rho}_n)$, $z(\hat{\tau}_n)$, $z(\hat{\rho}_n)$ y $z(\hat{\tau}_n)$ son idénticas a las correspondientes a $T(\hat{\rho}_n-1)$, $\hat{\tau}_n$, $T(\hat{\rho}_n-1)$ y $\hat{\tau}_n$ respectivamente, para $\sigma^2 = \sigma_u^2$. Además, los resultados para $z(\hat{\rho}_n)$ y $z(\hat{\tau}_n)$ permanecen válidos si el mecanismo generador de datos es: $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + u_t$ en lugar de (1).	

TABLA N° 11.- TESTS DE RAIZ UNITARIA BASADOS EN EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
SOLO (1984) $[1 + d(B)] \epsilon_t(\theta) = Y_t - \rho Y_{t-1} - a' Z_{t-1} \quad (1)$ con $Z_{t-1} = (Z_{t-1,1}, \dots, Z_{t-1,p})$ $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ $\theta = (\rho : a' : d')' = (\rho : \theta')'$ $d(B) = \sum_1^q d_i B^i$ $(a', d') = (a_1, \dots, a_p, d_1, \dots, d_q)$ ===== <u>Inclusión de una media</u> $[1 + d(B)] \epsilon_t(\theta) = Y_t - \rho Y_{t-1} - a' Z_{t-1} - \mu \quad (2)$	Bajo $H_0: \rho = 1$, y existe un verdadero valor de θ_0 , de forma que $\epsilon_t(\theta_0) = \epsilon_t$ es una sucesión iid con media cero y varianza σ^2 ===== Análogo a lo anterior	Estadístico ML vendría definido por $ML = TR_1^2$, siendo R_1^2 el coeficiente de determinación usual en la regresión de ϵ_t sobre $\xi_{t,1}$ y ϵ_t los residuos que resultan de ajustar el modelo (1) para: $\rho = 1$ $\xi_{t,1} = [1 + d(B)]^1 Y_{t-1}$ $[con \quad d(B) = \sum_1^q d_i B^i \quad el \text{ polinomio con los coeficientes estimados en la regresión anterior}]$ ===== Bajo $H_0: \rho = 1, \mu = 0$ $ML = TR_1^2$, siendo R_1^2 el coeficiente de determinación de la regresión de ϵ_t sobre $\xi_{t,1}$, m. Con ϵ_t : residuos de ajustar el modelo (2). $\xi_{t,1} = [1 + d(B)]^1 Y_{t-1}$ $m = -1/[1 + d(1)]$ donde d contiene los coeficientes del ajuste de z_t a un ARMA(p,q).	La distribución límite de ML coincide con la del estadístico $\hat{\tau}_\mu$ de Dickey-Fuller ===== $ML \Rightarrow \hat{\tau}_\mu^2 + w^2(1)$ con $w(1)$ un movimiento Browniano Si se considera que el modelo tiene media cero cuando $\rho = 1$, se tiene que: $ML \Rightarrow \hat{\tau}_\mu^2$ [Ahora se cambiaría μ por $\mu(1-\rho)$ y se trabajaría con $Y_t - Y$]

Hasza, D.P. y Fuller, W.A. (1979): "Estimation for Autoregressive Processes with Unit Roots". The Annals of Statistics, 5, págs. 1106-1120.

Kahn, J.A. y Ogaki, M. (1990): "A Chi-Square Test for a Unit Root". Economics Letters, 34, págs. 37-42.

Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., y Shin, Y. (1992): "Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root". Journal of Econometrics, 54, págs. 159-178.

Nelson, C.R. y Plosser, C.I. (1982): "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. Some Evidence and Implications". Journal of Monetary Economics, págs. 139-162.

Newey, W.K. y West, K.D. (1987): "A Simple, Positive Semi-Definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix". Econometrica, 55, págs. 703-708.

Ouliaris, S.; Park, J.Y. y Phillips, P.C.B. (1989): "Testing for a Unit Root in the Presence of a Maintained Trend". Artículo incluido en el libro *Advances in Econometrics and Modelling* editado por Raj, B.. Kluwer Academic Publishers.

Pantula, S.G. (1985): "Estimation for Autoregressive Processes with Several Unit Roots". Mimeo del Instituto de Estadística. Serie N° 1665. Universidad de Carolina del Norte. Raleigh.

Pantula, S.G. (1989): "Testing for Unit Roots in Time Series Data". Econometric Theory, 5, págs. 256-271.

Pantula, S.G. y Hall, A. (1991): "Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models". Journal of Econometrics, 48, págs. 325-353.

Perron, P. y Phillips, P.C.B. (1987): "Does GNP Have a Unit Root?". Economics Letters, 23, págs. 139-145.

Perron, P. (1988): "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. Further Evidence from a New Approach". Journal of Economic Dynamics and Control, 12, págs. 297-332.

Phillips, P.C.B. (1987): "Time Series Regression with a Unit Root". Econometrica, 55, págs. 277-301.

TABLA N° 12.- TESTS DE RAIZ UNITARIA BASADOS EN EL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
SCHMIDT Y LEE (1991) $Y_t = a + bt + x_t$ $x_t = \rho x_{t-1} + \epsilon_t$	ϵ_t verifica las condiciones de regularidad de Phillips y Perron (1988, pág. 336).	a) $T\Phi$, siendo Φ el estimador MCO de θ en la regresión: $(1) \Delta \tilde{S}_t = \Phi S_{t-1} + \text{error} \quad (t=2, \dots, T)$ donde: $\tilde{S}_t = Y_t - \hat{a}_t - \tilde{b}t$ $\tilde{b} = (Y_T - Y_1)/(T-1)$ $\hat{a}_t = Y_1 - \tilde{b}$ b) τ: es el estadístico t usual de la hipótesis $\Phi=0$ en (1).	Para ϵ_t Niid, se dan valores críticos en muestra finita obtenidos por simulación. Las distribuciones asintóticas para ϵ_t bajo las condiciones generales de Phillips y Perron (1988) se obtienen y dependen de σ_e/σ_ϵ, por lo que una forma de obviar esto es corregir los estadísticos en la forma Phillips-Perron.

TABLA N° 13.- TESTS DE RAIZ UNITARIA BASADOS EN ESTIMADORES VARIABLES INSTRUMENTALES

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PANTULA Y HALL (1991) $Y_t = \rho Y_{t-1} + Z_t$ $Z_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i Z_{t-i} + U_t$ $U_t = \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + e_t$ $H_0: \rho = 1$ Se reexpresa como: $Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i Z_{t-i} + U_t \quad (1)$ $\rho = 1$ ===== De forma análoga se pueden considerar modelos que incluyen una media no nula o una tendencia lineal bajo la alternativa.	i) El vector inicial $(Y_0 \dots Y_{p-1})'$ tiene una distribución fijada independiente de $\{e_t\}$. ii) Z_t estacionario e invertible y los polinomios AR y MA no tienen raíces comunes. iii) $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$; $E(e_t^{2+\epsilon}) < M$ para algún $\epsilon > 0$.	Estimador VI de los parámetros en la regresión (1) tomando como instrumentos Y_{1k} y $L_{1k} = (Z_{1k} \dots Z_{1k,p+1})'$ para Y_{1k} y $X_{1k} = (Z_{1k,1} \dots Z_{1k,p})'$ con $k > q$, respectivamente. Se denotan por ρ_k y α_{1k}, respectivamente. $\alpha_{1k} = (\alpha_{1k,1}, \dots, \alpha_{1k,p})$ t_k: estadístico t asociado a ρ_k.	$\left(1 - \sum_{j=1}^p \alpha_{j,k}\right)^{-1} T(\rho_k - 1)$ tiene la distribución límite de $T(\hat{\rho} - 1)$ tabulada en Fuller (1976). $S_n S^{-1} t_k$ misma distribución límite de τ tabulada en Fuller (1976). S_n y S son factores de corrección relacionados con el estimador de la varianza y cuyas expresiones se dan en Pantula y Hall (1991).

TABLA N° 14.- CONTRASTE DE LA EXISTENCIA DE VARIAS RAICES UNITARIAS MEDIANTE PROCEDIMIENTOS SECUENCIALES

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PANTULA (1989) $Y_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j Y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + e_t \quad (1)$ Regresiones: $\Delta^s Y_t = \sum_{i=1}^s a_i \Delta^{i-1} Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-s} b_j \Delta^s Y_{t-j} + e_t \quad (2)$ ($s=0, 1, \dots, p$) siendo s: número máximo de raíces unitarias presentes en el modelo (1). k($\geq p$) elegido en función de T. H_0: El modelo (1) presenta exactamente r raíces unitarias, sii $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ $\Delta^s Y_t = a_r^* \Delta^{s-1} Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k-s} b_j^* \Delta^s Y_{t-j} + e_t \quad (3)$ ===== El procedimiento se puede extender de forma similar a modelos ARIMA que incluyen una constante o una tendencia temporal.	$\{e_t\}_{t=1}^T \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$ $E(e_t ^{4+\delta}) < M$ para algún $\delta > 0$ y $M > 0$ $\langle Y_{p+1}, \dots, Y_T \rangle$ constantes conocidas Las ecuaciones características AR y MA no tienen raíces comunes.	$F_{r,T}(k)$: Estadístico F usual para contrastar $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ en (2). $t_{r,T}^*(k)$: Estadístico t de regresión usual para contrastar que $a_r^* = 0$ en la regresión (3).	Bajo H_0: $F_{r,T}(k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} F_r(d)$ una cierta distribución para $r \leq d$. Tabulada para $1 \leq r \leq d \leq 5$. $F_{r,T}(k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$ para $r > d$ $t_{r,T}^*(k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \tau$ $t_{r,T}^*(k) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} -\infty$ para $r > d$ ===== <u>Procedimientos secuenciales de contraste:</u> Estadístico F: "RH₀ (en favor de H₀) si $F_{r,T}(k) > F_r(r, \alpha)$ para $r=d, d+1, \dots, s$" Estadístico t: "RH₀ (en favor de H₀) si $t_{r,T}^*(k) < \tau_\alpha$ para $r=d, d+1, \dots, s$"

TABLA N°15 .- TEST DE LA HIPOTESIS NULA DE ESTACIONARIEDAD FRENTE A LA ALTERNATIVA DE RAIZ UNITARIA

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
KWIATKOWSKI Y OTROS (1992) A) $X_t = bt + Y_t + v_t$ donde $\Delta Y_t = e_t$ B) $X_t = Y_t + v_t$ con $\Delta Y_t = e_t$ <u>Hipótesis nula</u>: la serie X_t es estacionaria, en tendencia, para el modelo A); y alrededor de un nivel (r_0), en el modelo B): $H_0 : \sigma_e^2 = 0$	$e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$ v_t es un proceso estacionario	$\eta = T^{-2} \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{S_1^2}$ con $S_t = \sum_{i=1}^t u_i$ siendo u_t, $t=1, 2, \dots, T$ los residuos de la regresión de X sobre una constante y la variable tiempo en el caso A), y sobre una constante únicamente en el caso B). S_1^2 : estimador consistente de $\sigma^2 (= \lim T^{-1} E(S_T^2))$ dado en Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988)	Distribuciones asintóticas bajo la nula tabuladas en Kwiatkowski y otros (1992), pág. 166.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Banerjee, A., Dolado, J.J., Galbraith, J.W., y Hendry, D.A. (1993): *Cointegration, Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*. Ed. Oxford University Press. New York.

Bhargava, A. (1986): "On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series". Review of Economic Studies, 53, págs. 369-384.

Bierens, H.J. y Guo, S. (1993): "Testing Stationary and Trend Stationarity against the Unit Root Hypothesis". Econometrics Reviews, 12, págs. 1-32.

Billingsley, P. (1968): *Convergence of Probability Measures*. Ed. Wiley, New York.

Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 2.^a Edición. Ed. Holden-Day. San Francisco.

Breusch, T.S. y Pagan, A.P. (1980): "The Lagrange Multiplier Test and its Applications to Model Specification in Econometrics". Review of Economics Studies, 47, págs. 239-253.

Dickey, D.A. (1976): "Estimation and Hypothesis Testing in Nonstationary Time Series". Tesis Doctoral. Departamento de Estadística. Universidad de Iowa. Ames.

Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1979): "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root". Journal of the American Statistical Association, 74, págs. 427-431.

Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1981): "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root". Econometrica 49, págs. 1057-1072.

Dickey, D.A. (1984): "Powers of Unit Roots Tests". Proceedings of the American Statistical Association Business and Economics Section, (1984), págs. 489-493.

Dickey, D.A., Bell, W.R. y Miller, R.B. (1986): "Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications". The American Statistician, 40, págs. 12-26.

Dickey, D.A. y Pantula, S.G. (1987): "Determining the Order of Differencing in Autoregressive Process". Journal of Business and Economic Statistics, 5, págs. 455-461.

Diebold, F.X. y Nerlove, M. (1990): "Unit Roots in Economic Time Series: A Selective Survey". Artículo en *Advances in Econometrics*, Volumen 8, págs. 3-69, editado por Fomby, T.B. y Rhodes, G.F. (jr).

Dolado, J.J., Jenkinson, T. y Sosvilla-Rivero, S. (1990): "Cointegration and Unit Roots". *Journal of Economic Surveys*, 4, págs. 249-273.

Durbin, J. y Watson, G.S. (1950): "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. I". *Biometrika*, 37, págs. 409-428.

Durbin, J. y Watson, G.S. (1971): "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression III". *Biometrika*, 58, págs. 1-19.

Evans, G.B.A. y Savin, N.E. (1981a): "Testing for Unit Roots: 1". *Econometrica*, 49, págs. 653-779.

Evans, G.B.A. y Savin, N.E. (1981b): "The Calculation of the Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of the Parameter in a Random Walk Model". *The Annals of Statistics*, 9, págs. 1114-1118.

Evans, G.B.A. y Savin, N.E. (1984): "Testing for Unit Roots: 2". *Econometrica*, 52, págs. 1241-1269.

Fuller, W.A. (1976): *Introduction to Statistical Time Series*. Ed. John Wiley & Sons, New York.

Fuller, W.A. (1985): "Nonstationary Autoregressive Time Series". Artículo incluido en el libro *Handbook of Statistics*, Vol. 5, editado por Hannan, E.J.; Krishnaiah, P.R. y Rao, M.M., Ed. North-Holland. New York.

Hall, A. (1989): "Testing for a Unit Root in the Presence of Moving Average Errors". *Biometrika*, 76, págs. 49-56.

Hall, A. y Hasset, K. (1991): "Instrument Choice and Tests for a Unit Root". *Economics Letters*, 35, págs. 161-165.

Hall, A. (1992): "Testing for a Unit Root in Time Series Using Instrumental Variable Estimators with Pretest Data Based Model Selection". *Journal of Econometrics*, 54, págs. 223-250.

Hannan, E.J.; Krishnaiah, P.R. y Rao, M.M. (1985): *Handbook of Statistics*. Vol 5. Time Series in the Time Domain. Ed. North-Holland. Amsterdam.

TABLA N° 10.- TESTS DE RAIZ UNITARIA EN MODELOS GENERALES

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
KAHN Y OGAKI (1990) $X_t = \rho X_{t-1} + u_t \quad (1)$ $(t=1,2,\dots)$ $H_0: \rho = 1$	$\{u_t\}$ sucesión de variables aleatorias con media cero que satisface el supuesto 1 de Kahn y Ogaki (1990). Pág. 39.	$J_T = 2(S_{uT}^2/S_T^2)b_T - 0,5$ siendo b_T el estimador MCO de la regresión de X_t sobre ΔX_t . $S_{uT}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \beta X_{t-1})^2$ $S_T^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \left[1 - \frac{1}{T} \right] \sum_{\tau=1}^T \left[1 - \frac{ \tau }{T} \right] (X_t - \beta X_{t-1}) (X_{t-\tau} - \beta X_{t-1-\tau})$ con ρ el estimador MCO de ρ en la ecuación (1) y $l(T)$ es el retardo de truncamiento que satisface: $l(T) = O(T^*)$	$J_T \xrightarrow{d} \chi_1^2$

Phillips, P.C.B. y Perron, P. (1988): "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". Biometrika, 75, págs. 335-346.

Raj, B. (1989): *Advances in Econometrics and Modelling*. Ed. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Said, E.S. y Dickey, D.A. (1984): "Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order". Biometrika, 71, págs. 599-607.

Said, E.S. y Dickey, D.A. (1985): "Hypothesis Testing in ARIMA (p, 1, q) Models". Journal of the American Statistical Association, 80, págs. 369-374.

Said, E.S. (1991): "Unit-Roots Test for Time-Series Data with a Linear Time Trend". Journal of Econometrics, 47, págs. 285-303.

Sargan, J.D. y Bhargava, A. (1983): "Testing Residuals from Least Squares Regression for Being Generated by the Gaussian Random Walk". Econometrica, 51, págs. 153-174.

Sánchez de la Vega, M.M. (1993): "Raíces Unitarias y Cambio Estructural en Series Temporales: un Estudio de Monte Carlo". Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.

Schmidt, P. y Phillips, P.C.B. (1990): "Testing for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends". Michigan State University, East Lansing, MI. Documento de Trabajo 8904.

Schmidt, P. y Lee, J. (1991): "A Modification of the Schmidt-Phillips Unit Root Test". Economics Letters, 36, págs. 285-289.

Schmidt, P. y Phillips, P.C.B. (1992): "LM Test for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54, págs. 257-287.

Schwert, G.W. (1987): "Effects of Model Specification on Tests for Unit Roots in Macroeconomic Data". Journal of Monetary Economics, 20, págs. 73-103.

Schwert, G.W. (1989): "Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation". Journal of Business and Economic Statistics, 7, págs. 147-159.

Sen, D.L. y Dickey, D.A. (1987): "Symmetric Test for Second Differencing in Univariate Time Series". Journal of Business and Economic Statistics, 5, págs. 463-473.

Solo, V. (1984): "The Order of Differencing in ARIMA Models". Journal of the American Statistical Association, 79, págs. 916-921.

West, K.D. (1988): "Asymptotic Normality when Regressors have a Unit Root". Econometrica, 56, págs. 1397-1417.

White, J.S. (1958): "The Limiting Distribution of the Serial Correlation Coefficient in the Explosive Case". Annals of Mathematical Statistics, 29, págs. 1188-1197.

White, H. y Domowitz, I. (1984): "Nonlinear Regression with Dependent Observations". Econometrica, 52, págs. 143-161.

NOTAS

(1) En lo sucesivo hablaremos con frecuencia del estadístico t . Es importante señalar aquí que este término se usa exclusivamente para hacer referencia a la fórmula de su cálculo, y en ningún caso a su distribución.

(2) El estadístico tipo t tiende hacia una distribución $N(0,1)$, mientras que el estimador MCO normalizado tiende hacia una distribución normal no estándar. Sin embargo, conviene señalar que, en muestras finitas, las distribuciones exactas se aproximan a veces mejor por las distribuciones de Dickey-Fuller que por su distribución normal asintótica. Para más detalles, el lector interesado puede consultar, por ejemplo, Sánchez de la Vega (1993), capítulo 2, Banerjee et al. (1993), capítulos 4 y 6, ó Dolado et al. (1990).

(3) Véase nota 2.

(4) Este trabajo de Schmidt y Phillips (1992) recupera la idea original de este tipo de contraste, desarrollada en un documento de trabajo de estos autores de 1990, y que sirvió, en realidad, de punto de partida a Schmidt y Lee (1991).

(5) Para un análisis en profundidad de la influencia de los parámetros p y q apuntamos las referencias de Hall y Hasset (1991) y Hall (1992); este último presenta un procedimiento de estimación de p y q que parece dar lugar a que los estimadores por VI tengan buenas propiedades.