

UN MODELO DE REEMPLAZAMIENTO PARA UN SISTEMA SUJETO A SHOCKS POISSONIANOS.

Alfredo García Güemes

*Departamento de Economía Aplicada
Escuela Universitaria de Estudios Empresariales (Burgos)
Universidad de Valladolid*

RESUMEN.

En este artículo se considera un sistema con n componentes sujetos a shocks que se presentan de acuerdo con n procesos de Poisson homogéneos. Estos componentes, deben de ser reemplazados al producirse un determinado número de shocks. Se obtiene la esperanza del coste por unidad de tiempo, y unas condiciones suficientes para la existencia y para la no existencia de una política óptima de reemplazamiento preventivo.

Palabras clave: Fiabilidad, Reemplazamiento, Modelo de Shock.

ABSTRACT.

In this paper we are going to consider a system with n components subject to shocks that arrive according to n homogeneous Poisson process. These components have to be replaced when a fixed number of shocks are made. It is obtained the expected cost per unit of time, and sufficient conditions for the existence and for the non existence of a optimal policy of preventive replacement.

Key words: Reliability, Replacement, Shock Model.

1. INTRODUCCION.

El concepto de shock, para un componente o un sistema, debe de ser entendido en un sentido amplio. El shock puede deberse a sobreesfuerzos, errores en el manejo del sistema, elementos que fallan dentro de un sistema complejo, ejecución de determinados trabajos, etc.

El primero en introducir, el concepto de shock, dentro de la teoría de la renovación de sistemas, fue Epstein, B. (1958), quién presentó un modelo, donde el componente estaba expuesto a shocks producidos según un proceso de Poisson.

Harry, J. y Proschan, F. (1980), consideran el caso en que los shocks están gobernados por un proceso de Poisson generalizado, esto es que se pueda producir más de un shock simultáneamente.

Boland, P.J. y Proschan, F. (1983), presentan un modelo en que los shocks se presentan según un proceso de Poisson no homogéneo. Estudian el caso concreto en que el sistema debe de ser reemplazado al producirse el segundo shock. El estudio de este caso particular lo realizan para un proceso de Poisson homogéneo.

En este artículo, se generalizará este último modelo, en una doble vertiente. Por una parte, se considerará que el sistema tiene n componentes ($j=1,2,\dots,n$) y por otra, que estos últimos deben de ser reemplazados al producirse el k^j -ésimo shock.

2. CARACTERISTICAS GENERALES DEL MODELO.

Consideremos un sistema con n componentes que está sujeto a shocks, que se presentan de acuerdo a n procesos de Poisson homogéneos, con intensidad:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$$

Se supondrá, que cuando se produce un shock, el coste operativo aumenta y que al producirse el k^j -ésimo shock en el componente j , este ha de ser reemplazado.

Una imagen física del modelo que se va a presentar, podría ser la de un gran sistema, compuesto por n subsistemas en serie, cada uno de ellos con k^j componentes en paralelo.

La política que se va a considerar es:

- Efectuar reemplazamientos preventivos, en los momentos kT . ($k=1,2,\dots$).

El criterio de valoración será:

- La esperanza del coste medio a largo plazo.

Sean:

c_j , el aumento de coste operativo, debido a cada shock de tipo j .

t_h^j , momento en que se produce el shock h -ésimo de tipo j .

r_j , coste de reemplazamiento del componente j -ésimo.

Consideremos los aumentos de los costes operativos y los costes de reemplazamiento derivados de los shocks que se producen en el componente j -ésimo, en el intervalo $(0, T)$.

i) Supongamos, que se han producido $k_j < k^j$ shocks en dicho intervalo. Si es así, no se ha efectuado ningún reemplazamiento y el aumento de los costes operativos, será:

$$c_j \sum_{h=2}^{k_j+1} (t_h^j - t_{h-1}^j) (h-1)$$

donde:

$$t_{k_j+1}^j = T$$

ii) Sea ahora $k_j = sk^j$ ($s=1,2,\dots$); los costes imputables a estos shocks y que por comodidad llamaremos B, serán:

$$B = sr_j + c_j \sum_{g=0}^{s-1} \sum_{h=2}^{k^j} (t_{gk^j+h}^j - t_{gk^j+h-1}^j) (h-1)$$

iii) Sea ahora $sk^j < k_j < (s+1)k^j$.

Para los distintos valores de k_j se tiene:

$$\begin{aligned} B + c_j (T - t_{sk^j+1}^j) & \quad \text{si } k_j = sk^j + 1 \\ B + c_j (t_{sk^j+2}^j - t_{sk^j+1}^j) + 2c_j (T - t_{sk^j+2}^j) & \quad \text{si } k_j = sk^j + 2 \end{aligned}$$

En general:

$$B + c_j \sum_{h=1}^{m+1} (t_{sk^j+h}^j - t_{sk^j+h-1}^j) (h-1)$$

donde:

$$t_{k^j s+m+1}^j = T$$

Los shocks, como ya se dijo, se presentan según un proceso de Poisson homogéneo; por tanto, si se producen k_j shocks en el intervalo $(0,T)$, la esperanza del tiempo transcurrido entre dos shocks cualesquiera es igual a:

$$E[(t_p - t_{p-1}) / k_j] = \frac{T}{k_j + 1}$$

La esperanza matemática del aumento del coste imputable a los $k_j = sk^j$ shocks ocurridos en el componente j -ésimo es:

$$E(B) = sI_j + \frac{c_j sT}{sk^{j+1}} \sum_{h=1}^{k^j-1} h$$

En general, para $k_j = sk^j + m$, $m = 0, 1, \dots, k^j - 1$, se tiene, que la esperanza del aumento del coste condicionado a k_j shocks es:

$$\begin{aligned} & sI_j + \frac{c_j sT}{sk^{j+m+1}} \sum_{h=1}^{k^j-1} h + \frac{c_j T}{sk^{j+m+1}} \sum_{h=1}^m h = \\ & = sI_j + \frac{c_j T}{2(sk^{j+m+1})} [sk^j(k^j-1) + m(m+1)] \end{aligned}$$

Considerando ahora, todos los posibles valores de k_j , se obtiene la esperanza del coste imputable a los shocks que se producen en el componente j -ésimo, en el intervalo $(0, T)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{k^j-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j T)^{sk^j+m}}{(sk^j+m)!} e^{-\lambda_j T} \left\{ sI_j + \frac{c_j T}{2(sk^{j+m+1})} [sk^j(k^j-1) + m(m+1)] \right\} = \\ & = c_j T \sum_{m=0}^{k^j-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j T)^{sk^j+m}}{(sk^j+m)!} e^{-\lambda_j T} \frac{sk^j(k^j-1) + m(m+1)}{2(sk^{j+m+1})} + M_j(T) I_j = \\ & = c_j T \Psi + M_j(T) I_j \quad (1) \end{aligned}$$

donde $M_j(T)$ es la función de renovación, es decir, la esperanza del número de renovaciones del componente j -ésimo en $(0, T)$, y es igual a:

$$M_j(T) = \frac{\lambda_j T}{k^j} + \frac{1}{k^j} \sum_{h=1}^{k^j-1} \frac{\theta_j^h}{1-\theta_j^h} \{1 - e^{-\lambda_j T(1-\theta_j^h)}\}$$

siendo:

$$\theta_j = e^{\frac{2\pi i}{k^j}}$$

donde i es la unidad imaginaria. (Barlow y Proschan 1965, pg 57).

También se ha hecho por comodidad:

$$\Psi = \sum_{m=0}^{k^j-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j T)^{sk^j+m}}{(sk^j+m)!} e^{-\lambda_j T} \frac{sk^j(k^j-1) + m(m+1)}{2(sk^{j+m+1})} \quad (2)$$

ψ es el número medio de averías con las que funciona el componente j , cuando los reemplazamientos preventivos para el sistema, se efectúan en los momentos kT .

Siendo c_0 , el coste operativo del sistema cuando opera en perfectas condiciones, y r el coste de reemplazamiento, la esperanza del coste medio a largo plazo, se obtiene sencillamente, extendiendo el resultado (1), a todos los componentes:

$$\bar{C}(T) = \frac{1}{T} \left[c_0 T + r + \sum_{j=1}^n M_j(T) r_j + \sum_{j=1}^n c_j T \psi \right] \quad (3)$$

De modo inmediato, se comprueba que:

- a) $\lim_{T \rightarrow 0} \bar{C}(T) = \infty$
- b) $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{C}(T)$ es finito.

Por tanto esta función tendrá al menos un mínimo, que pudiera encontrarse incluso para $T = \infty$.

Como era de esperar, si se considera un solo componente ($j=1$) y reemplazamiento del mismo al segundo shock, ($k=2$), la esperanza del coste medio a largo plazo, coincide con la obtenida por Boland P.J. y Proschan, F. (1983).

3. CONDICIONES SUFICIENTES DE EXISTENCIA Y NO EXISTENCIA DE UNA POLITICA OPTIMA DE REEMPLAZAMIENTO PREVENTIVO.

Veamos unas cotas superior e inferior para ψ .

Teorema 1.-

$$\frac{k^j - 1}{2} \geq \psi \geq \frac{k^j - 1}{2} \frac{M_j(T) - 1}{M_j(T)}$$

Demostración.-

Haciendo $m = k^j - 1$ en el tercer factor de (2):

$$\Psi \leq \sum_{m=0}^{k^j-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j T)^{sk^j+m}}{(sk^j+m)!} e^{-\lambda_j T} \frac{sk^j(k^j-1) + k^j(k^j+1)}{2(sk^j+k^j+1)} = \quad (4)$$

$$\frac{(k^j-1)}{2} \sum_{m=0}^{k^j-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j T)^{sk^j+m}}{(sk^j+m)!} e^{-\lambda_j T} = \frac{k^j-1}{2}$$

Este resultado por tanto se obtiene cuando se considera que el reemplazamiento programado, se efectúa un instante antes de producirse la k^j avería. Esto es el caso más desfavorable en cuanto al coste operativo.

La cota inferior, se ha hallado sencillamente, considerando que entre último reemplazamiento del componente j y el reemplazamiento programado en T , no se produce ninguna avería.

Haciendo uso del teorema 1, se pueden establecer una cota superior y una cota inferior para la esperanza del coste medio a largo plazo. La cota superior es:

$$S\bar{C}(T) = \frac{1}{T} \left[c_0 T + r + \sum_{j=1}^n M_j(T) r_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} c_j T (k^j - 1) \right] \quad (5)$$

y la cota inferior:

$$I\bar{C}(T) = \frac{1}{T} \left[c_0 T + r + \sum_{j=1}^n M_j(T) r_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} c_j T (k^j - 1) \frac{M_j(T) - 1}{M_j(T)} \right] \quad (6)$$

Teniendo presente que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_j(T) - 1}{M_j(T)} = 1; \quad \forall j$$

se comprueba de forma inmediata que:

- $\lim_{T \rightarrow 0} S\bar{C}(T) = \lim_{T \rightarrow 0} I\bar{C}(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \bar{C}(T) = \infty.$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} S\bar{C}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} I\bar{C}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{C}(T) \text{ es finito}$

Como las funciones (3), (5) y (6) son continuas, se tiene que si para un valor finito de T , la función (5) tiene mínimo, también lo tendrá la (3). Del mismo modo, si la función (6), carece de mínimo para T finito, lo mismo ocurrirá para la función (3).

Lema 1.- Siendo:

$$\theta = e^{\frac{2\pi i}{k}} \quad (i \text{ unidad imaginaria})$$

se cumple que:

$$\frac{1}{k} \sum_{h=1}^{k-1} \frac{\theta^h}{1-\theta^h} = \frac{1-k}{2k}$$

Demostración.-

$$\theta^h = \cos \frac{2\pi h}{k} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi h}{k}$$

por tanto $\theta^k = 1$.

θ^h y θ^{k-h} , son conjugados y también lo serán $(\theta^h - 1)$ y $(\theta^{k-h} - 1)$, cumpliéndose:

$$(\theta^h - 1) + (\theta^{k-h} - 1) = 2\Re(\theta^h - 1) = 2\left(\cos \frac{2\pi h}{k} - 1\right)$$

$$(\theta^h - 1)(\theta^{k-h} - 1) = |1 - \theta^h|^2 = 2\left(1 - \cos \frac{2\pi h}{k}\right)$$

($\Re$ indica parte real y $| \cdot |$ módulo.)

se tiene que:

$$\frac{\theta^h}{1-\theta^h} + \frac{\theta^{k-h}}{1-\theta^{k-h}} = \frac{2\left(\cos \frac{2\pi h}{k} - 1\right)}{2\left(1 - \cos \frac{2\pi h}{k}\right)} = -1$$

Sea:

$$S_k = \sum_{h=1}^{k-1} \frac{\theta^h}{1-\theta^h}$$

Se pueden dar los siguientes casos:

- a) Si k es par, en S_k se tienen por una parte, $k/2 - 1$ parejas de números conjugados, siendo el valor de cada pareja igual a -1 . Por otra parte, se tiene un término central, con $j=k/2$, cuyo valor es $-1/2$, por tanto: $S_k = (1-k)/2$.
- b) Si k es impar, en S_k hay $(k-1)/2$ parejas de números conjugados y por tanto: $S_k = (1-k)/2$.

Multiplicando S_k , por $1/k$, se tiene la tesis del lema. ■

Teorema 2.- Una condición suficiente, para la existencia de un mínimo para T finito, de la esperanza matemática del coste medio a largo plazo es:

$$\sum_{j=1}^n \frac{k^{j-1}}{2k^j} r_j > r$$

Demostración.-

La derivada de (5) es:

$$\frac{d \bar{SC}(T)}{dT} = -\frac{r}{T^2} - \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^n r_j [M_j(T) - Tm_j(t)] \quad (7)$$

donde:

$$m_j(T) = \frac{\lambda_j}{k^j} + \frac{\lambda_j}{k^j} \sum_{h=1}^{k^{j-1}} \theta_j^h e^{-\lambda_j T(1-\theta_j^h)}$$

Si la expresión (7), es positiva, indica que $\bar{SC}(T)$, se acerca a $\bar{C}(\infty)$ por abajo, lo que asegura la existencia de al menos un mínimo para $\bar{SC}(T)$ y por lo tanto para $C(T)$. (T finito).

Se tiene, utilizando el lema 1, que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [Tm_j(T) - M_j(T)] = -\frac{1}{k^j} \sum_{h=1}^{k^{j-1}} \frac{\theta_j^h}{1-\theta_j^h} = \frac{k^{j-1}}{2k^j}$$

por tanto la expresión (7) tiende a 0^+ si se cumple la tesis del teorema. ■

Teorema 3.- Una condición suficiente para la no existencia de mínimo finito para la esperanza matemática del coste medio a largo plazo, es:

$$\sum_{j=1}^n \frac{k^{j-1}}{2k^j} r_j + \sum_{j=1}^n \frac{c_j \lambda_j k^j (k^j - 1)}{2} < r$$

Demostración.-

Derivando (6), se obtiene:

$$-\frac{r}{T^2} + \sum_{j=1}^n r_j \frac{T m_j(T) - M_j(T)}{T^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} c_j (k^j - 1) \frac{m_j(T)}{M_j^2(T)}$$

Y esta expresión tendrá que ser menor que cero para valores suficientemente grandes de T .

Haciendo uso del teorema elemental de renovación:

$$\frac{M_j(T)}{T} \rightarrow \frac{1}{\lambda_j k^j} \quad \text{cuando} \quad T \rightarrow \infty$$

(Ross, S.M. 1970, pg. 40)

y del teorema de densidad de renovación:

$$m_j(T) \rightarrow \frac{1}{\lambda_j k^j} \quad \text{cuando} \quad T \rightarrow \infty$$

(Barlow, R.E. y Proschan, F. 1965, pg. 60)

se obtiene la tesis del teorema. ■

4. APLICACIONES.

Ejemplo 1.- Consideremos un sistema con cuatro componentes sujetos a shocks, según procesos homogéneos de Poisson cuyas intensidades, aumento de costes

operativos, costes de reemplazamiento de los componentes, shocks que soportan y coste de reemplazamiento del sistema son respectivamente los siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0,8; \lambda_2 = 1,2; \lambda_3 = 1,5; \lambda_4 = 1; \\ k^1 &= 4; k^2 = 6; k^3 = 5; k^4 = 5; \\ c_1 &= 0,1; c_2 = 0,05; c_3 = 0,1; c_4 = 0,05; \\ r_1 &= 5; r_2 = 8; r_3 = 7; r_4 = 7; \\ r &= 10\end{aligned}$$

Como quiera que:

$$\sum_{j=1}^4 r_j \frac{k^{j-1}}{2k^j} = 10,808 > 10 = r$$

se puede afirmar que procede efectuar reemplazamientos preventivos del sistema en los momentos kT^* ($k=1,2,\dots$).

Ejemplo 2.- Sea el mismo sistema que el presentado en el Ejemplo 1, excepto en lo referente a los costes de reemplazamiento de los componentes. En este caso dichos costes son:

$$r_1 = 2,5; r_2 = 2,5; r_3 = 3,5; r_4 = 3,5;$$

Entonces se tiene:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{k^{j-1}}{2k^j} r_j + \sum_{j=1}^4 \frac{c_j \lambda_j k^j (k^j - 1)}{2} = 8,159 < 10 = r$$

lo cual asegura que la mejor política de reemplazamiento en este caso, es no efectuar jamás reemplazamientos preventivos.

Ejemplo 3.- Sea el mismo sistema, excepto en los siguientes costes:

$$r_1 = 4,5; r_2 = 7; r_3 = 6; r_4 = 6;$$

Con estos valores no se cumple ninguno de los dos teoremas, por lo que en principio nada se puede afirmar acerca de la existencia o no de una política óptima de reemplazamiento preventivo.

5.CONSIDERACIONES FINALES.

La dificultad que supone trabajar con funciones de renovación, exige encontrar caminos que nos ahorren trabajo en aquellos casos en que no es posible encontrar una política óptima de reemplazamiento preventivo.

Sería de desear que los márgenes existentes entre los teoremas 2 y 3, fueran más pequeños, con el fin de disminuir el número de casos dudosos, como el presentado en el ejemplo 3.

Sistemas como el tratado en este trabajo, pueden ser estudiados también desde una política de reemplazamiento en bloque, si bien la literatura existente, cuando hace este tratamiento, no considera existencia de shocks. Ver por ejemplo Shey-Huei Sheu (1991).

Para concluir, indicar que la generalización lógica de este modelo, parece ser su desarrollo utilizando funciones MNBU (Multivariate new better than used), ya utilizadas pero sin desarrollar el modelo por El-Newehi y otros (1983).

REFERENCIAS.

- Barlow, R.E. y Proschan, F. (1965). *Mathematical theory of reliability*. John Wiley & Sons, Inc. N.Y.
- Boland, P.J. y Proschan, F. (1983). *Optimum replacement of a system subject to shocks*. Oper. Res. Vol 31 nº 4. pp 697-704.
- El-Newehi, Proschan, F. y Sethuraman, J. (1983). *A multivariate new better than used class derived from a shock model*. Oper. Res. Vol. 31, nº 1, pp 177-183.
- Epstein, B. (1958). *The exponential distribution and its role in life-testing*. Industrial Quality Control 15, pp 4-9.
- Harry, J. y Proschan, F. (1980). *Shock models arising from processes with*

stationary, independent, non-negative, increments. The Florida State University. Statistics Report M576.

ROSS, S.M. (1970). *Applied probability models with optimization applications.* Holden-Day, Inc. San Francisco.

Shey-Huei Sheu. (1991). *A generalized block replacement policy with minimal repair and general random repair costs for a multi-unit system.*

J. Opl. Res. Soc. Vol 42, nº 4, pp 331-341.