

EL CRITERIO DE DISCRIMINACIÓN EN LA SELECCIÓN DE INDICADORES DE BIENESTAR. ANÁLISIS DEL COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN DE IVANOVIC

Pilar Zarzosa Espina

Universidad de Valladolid

RESUMEN

Este trabajo analiza el "Coeficiente de Discriminación de Ivanovic", relacionándolo con otras medidas estadísticas de uso habitual.

El coeficiente de discriminación es una medida del poder discriminante de una variable. Y puede ser útil, junto a otras medidas, para seleccionar indicadores de bienestar o de desarrollo, dado que un buen indicador de desarrollo debe ser discriminante en el conjunto de situaciones (países, etc.) observadas.

Relacionamos CD con medidas estadísticas de dispersión y de concentración conocidas. Y realizamos una aplicación al caso español.

Palabras Clave: bienestar, desarrollo, indicador, discriminación.

SUMMARY

This paper analyses the "Discrimination Coefficient" (CD), defined by Ivanovic, and establishes relations with other usual statistical measures.

The Discrimination Coefficient is a measure of variable's discrimination power. It is very useful, together with other measures, for the selection of welfare's or development's indicators, so that a good development's indicator must discriminate into the set of observed countries.

We relate CD with usual statistical measures of dispersion and concentration. And we do an application to the spanish case.

Key words: welfare, development, indicator, discrimination.

1.- PLANTEAMIENTO.

En un interesante trabajo, B. Ivanovic (1974) propuso una serie de criterios de selección de indicadores de desarrollo socio-económicos. No es nuestro objetivo, en este momento, presentar un resumen de esa aportación, que nos parece de extraordinario valor.

Para centrar el objetivo de este artículo, diremos que uno de los criterios propuestos por el mencionado autor queda recogido en la siguiente conclusión:

Un buen indicador de desarrollo debe ser discriminante en el conjunto de países observados.

La justificación de tal criterio es bastante clara:

Si el objetivo planteado es comparar el nivel de desarrollo, (o de bienestar, u otro concepto afín) de distintos países (regiones, provincias, etc.), resulta irrelevante o inútil una variable cuyo valor es constante en el conjunto de países considerados, ya que a la hora de medir las distancias entre los países, es indiferente utilizarla o no. Y ello independientemente de lo representativa que dicha variable sea del nivel de desarrollo.

Pensemos, por ejemplo, en la variable "tasa de escolarización de la población de 6 a 14 años (expresada en porcentaje)". Se trata de una variable que contiene importante información sobre el grado de desarrollo de una colectividad. Sin embargo, es irrelevante cuando el objetivo buscado es comparar el nivel de desarrollo de las provincias españolas, porque, actualmente, la totalidad de la población de la referida edad está escolarizada en nuestro país, de forma que, para todas las provincias, el valor de la variable es cien. En otras palabras, la variable no debería ser seleccionada, debido a que su poder de discriminación es nulo.

Obviamente, una misma variable puede ser discriminante en un conjunto determinado de países y no serlo aplicado a otro conjunto. Igualmente, para los mismos países, una variable muy discriminante en un período puede no discriminar nada en otro período. La variable "tasa de escolarización de la población de 6 a 14 años", que ahora no tiene ningún poder de discriminación, en el pasado sí lo tuvo y, por tanto, podría ser una variable seleccionada para comparar el grado de desarrollo de las provincias españolas, en un momento de tiempo pasado.

No parece necesario insistir mucho en la filosofía de este criterio. Dicha filosofía subyace en numerosos trabajos de selección de indicadores, por ejemplo en Pena Traperó (1977 pp. 146 y ss.), donde se dice explícitamente: "El criterio de selección dentro de cada dominio o área de preocupación ha sido el elegir de entre el grupo de indicadores estrechamente relacionados únicamente aquél que, a nuestro juicio, el más significativo como condicionante o resultante del desarrollo y al mismo tiempo **es más discriminante**".

Por supuesto, el alto poder de discriminación de una variable no es una condición suficiente para que dicha variable resulte seleccionada en la lista definitiva. Pero ya hemos adelantado que no queremos entrar aquí en el resto de los criterios propuestos.

Pues bien, en relación con el criterio anteriormente justificado, Ivanovic definió el "coeficiente de discriminación", como medida, como el propio nombre indica, del poder discriminante de una variable.

Pensamos que el coeficiente de discriminación de Ivanovic es una medida estadística de gran interés cuando se desea abordar el tema de la selección de variables de bienestar y demás conceptos afines. De ahí que nos hayamos propuesto analizarlo, estudiando su relación con otras medidas estadísticas de uso habitual.

2.- DEFINICIÓN.

Sea m el número de países en el conjunto P , x_{ji} el valor de la variable X_i en el país j , m_{ji} el número de países donde el valor de X_i es x_{ji} , $\bar{X}_i$ la media de X_i , y k_i el número de diferentes valores que X_i toma en el conjunto P .

Como medida del poder discriminante del componente i -ésimo en el conjunto de países P , Ivanovic (1974 p. 46) define el "Coeficiente de Discriminación" de la forma siguiente:

$$CD_i(P) = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j,l>j}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right|$$

El autor recalca que este coeficiente no tiene el mismo significado que el coeficiente de variación, pues mientras que éste mide la dispersión relativa en torno a la media de X_i , el de discriminación toma en consideración todas las distancias, también relativas, entre cada dos valores distintos de X_i . Por lo tanto, CD es más sensible para medir el objetivo que persigue, valorar el efecto discriminante de una variable en un conjunto de países determinado, que el coeficiente de variación, que desde luego, no tiene el mismo objetivo.

Obviamente, el mínimo valor de CD_i es cero, que corresponde al caso en que todos los valores de X_i son iguales y, por tanto, el poder discriminante de la variable es nulo.

En orden a encontrar una acotación superior para CD_i , y a comprender mejor su significado, obtendremos, en los siguientes apartados, su relación con medidas estadísticas de dispersión y de concentración por todos conocidas.

3.- RELACIÓN CON EL RECORRIDO RELATIVO.

Consideremos la siguiente relación:

$$|x_{ji} - x_{li}| \leq Re \quad \forall j, l$$

donde Re es el recorrido de la variable X_i , es decir, $Re = x_{+i} - x_{-i}$, siendo x_{+i} y x_{-i} los valores máximo y mínimo respectivamente.

Luego:

$$\begin{aligned} CD_i &\leq \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j,l>j}^{k_i} m_{ji} m_{li} \frac{Re}{|\bar{X}_i|} = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \frac{Re}{|\bar{X}_i|} \sum_{j,l>j}^{k_i} m_{ji} m_{li} = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \frac{Re}{|\bar{X}_i|} \frac{1}{2} \sum_{j \neq l}^{k_i} m_{ji} m_{li} = \\ &= \frac{Re}{m(m-1) |\bar{X}_i|} \left(\sum_{j,l}^{k_i} m_{ji} m_{li} - \sum_{j=l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \right) = \\ &= \frac{m^2 - \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}^2}{m(m-1)} \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| \quad [18] \end{aligned}$$

Únicamente a efectos de interpretar la expresión anterior, hagamos el siguiente planteamiento: "Definamos" la variable número de veces que se repite el valor x_{ji} de la variable X_i . Es decir, consideremos una variable cuyos valores son $m_{ji}, j=1, \dots, k_i$.

Si la representamos por M_i , tenemos:

$$\bar{M}_i = \frac{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}}{k_i} = \frac{m}{k_i}$$

$$\text{Var}(M_i) = \frac{\sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}^2}{k_i} - \left(\frac{m}{k_i}\right)^2$$

de donde la expresión [18], queda:

$$\frac{m(m - \bar{M}_i) - k_i \text{Var}(M_i)}{m(m-1)} \frac{Re}{|\bar{X}_i|} \quad [19]$$

Hasta aquí hemos obtenido:

$$0 \leq CD_i \leq [19]$$

Observemos que [19] es una medida que toma en consideración no sólo la dispersión de X_i sino también la variabilidad de sus correspondientes frecuencias absolutas.

En el caso particular en que todas las frecuencias fuesen iguales ($\text{Var}(M_i)=0$), la acotación sería:

$$0 \leq CD_i \leq \frac{m - \bar{M}_i}{m-1} \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right|$$

y si además las frecuencias fuesen iguales a la unidad

$$(\bar{M}_i = m_{ji} = 1, \forall j)$$

$$0 \leq CD_i \leq \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right|$$

La cota superior anterior, que es el "Recorrido Relativo de la Distribución", corresponde al valor de CD_i cuando sólo existen dos países y dos valores distintos de X_i . En este caso:

$$CD_i(P) = \frac{2}{2(2-1)} \frac{|x_{+i} - x_{-i}|}{|\bar{X}_i|} = \frac{Re}{|\bar{X}_i|}$$

4.- RELACIÓN CON LA DESVIACIÓN ABSOLUTA MEDIA RELATIVA.

En este apartado, intentaremos relacionar el coeficiente de Discriminación de Ivanovic con una medida de dispersión con respecto a la media:

$$\begin{aligned} CD_i &= \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j,l>j}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \frac{1}{2} \sum_{j \neq l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| = \\ &= \frac{1}{m(m-1)} \left[\sum_{j,l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| - \sum_{j=l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| \right] = \\ &= \frac{1}{m(m-1)} \sum_{j,l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m(m-1)} \sum_{j,l}^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{(x_{ji} - \bar{X}_i) - (x_{li} - \bar{X}_i)}{\bar{X}_i} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{m(m-1)} \left[\sum_j \sum_l m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| + \sum_j \sum_l m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{li} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| \right] = \\
&= \frac{1}{m(m-1)} \left\{ \sum_j \left[m_{ji} \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| \sum_l m_{li} \right] + \sum_l \left[m_{li} \left| \frac{x_{li} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| \sum_j m_{ji} \right] \right\} \quad [18]
\end{aligned}$$

Dado que

$$\sum_l m_{li} = \sum_j m_{ji} = m, \text{ y que } \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji} \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| = \sum_{l=1}^{k_i} m_{li} \left| \frac{x_{li} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right|,$$

la expresión encerrada entre llaves es:

$$2m \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji} \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right|$$

que también la podemos expresar como:

$$2m \sum_{j=1}^m \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right|$$

Luego [20] es:

$$\frac{1}{m(m-1)} 2m \sum_{j=1}^m \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right| = \frac{2m}{m-1} DAMR$$

donde DAMR es la Desviación Absoluta Media Relativa:

$$DAMR = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{x_{ji} - \bar{X}_i}{\bar{X}_i} \right|$$

En definitiva, la relación obtenida es:

$$0 \leq CD_i \leq \frac{2m}{m-1} DAMR \quad [21]$$

y si sólo hay dos países y dos valores distintos de X_i :

$$0 \leq CD_i = \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| = DAMR$$

5.- RELACIÓN CON LA DIFERENCIA MEDIA RELATIVA Y CON EL ÍNDICE DE GINI.

Por último, vamos a intentar relacionar la medida CD con las medidas de concentración:

$$\begin{aligned} CD_i &= \frac{2}{m(m-1)} \frac{1}{2} \sum_j^{k_i} \sum_l^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| = \\ &= \frac{2}{m(m-1)} \frac{1}{2} m^2 \frac{\sum_j^{k_i} \sum_l^{k_i} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right|}{m^2} = \\ &= \frac{m}{m-1} M = \frac{2m}{m-1} G \end{aligned}$$

$$\text{Donde } M = \frac{1}{m^2} \left[\sum_j^{k_j} \sum_l^{k_l} m_{ji} m_{li} \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right| \right] = \frac{1}{m^2} \sum_j^m \sum_l^m \left| \frac{x_{ji} - x_{li}}{\bar{X}_i} \right|$$

$$\text{y } G = \frac{1}{2} M$$

son respectivamente la "Diferencia Media Relativa" y el "Índice de Gini", Sen (1979, p. 46), ambas conocidas medidas de comparación de elementos de dos series. Las dos, especialmente el índice de Gini -la medida de concentración, por excelencia-, son muy utilizadas como indicadores de desigualdad (de la renta, los salarios, etc.), además de en otras aplicaciones.

Las relaciones que hemos obtenido:

$$CD = \frac{m}{m-1} M = \frac{2m}{m-1} G$$

nos permiten acotar el valor del coeficiente de discriminación exclusivamente en función de m . Dado que $0 \leq M \leq 2$, o que $0 \leq G \leq 1$, se tiene:

$$0 \leq CD_i \leq \frac{2m}{m-1} \quad [22]$$

Pero realmente M y G nunca llegan a tomar los valores 2 y 1 respectivamente, puesto que estos valores se alcanzan en el límite, cuando m tiende a infinito. En el caso teórico de máxima desigualdad o concentración ($m-1$ países con un valor nulo de la variable y un país con el único valor distinto de cero), los valores de la

Diferencia Media Relativa y del Índice de Gini son: $M = 2 \frac{m-1}{m}$ y $G = \frac{m-1}{m}$ (cuyos correspondientes límites, cuando $m \rightarrow \infty$, son 2 y 1 respectivamente). Luego realmente:

$$0 \leq M \leq \frac{2(m-1)}{m} \text{ y } 0 \leq G \leq \frac{m-1}{m}$$

de donde los límites de acotación para CD quedan perfectamente establecidos:

$$0 \leq CD \leq 2$$

6.- CONCLUSIONES.

Como resumen del análisis que hemos realizado del Coeficiente de Discriminación de Ivanovic, podemos extraer las siguientes conclusiones:

1*) Teniendo en cuenta que el Recorrido Relativo de la Distribución, la Diferencia Media Relativa y el Coeficiente de Discriminación se relacionan de la forma:

$$m^2 M \geq \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| \quad \text{y} \quad M = \frac{m-1}{m} CD$$

y utilizando la acotación superior [18] para CD, podemos acotar CD en función de la medida de dispersión Recorrido Relativo:

$$\frac{1}{m(m-1)} \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| \leq CD \leq \frac{m^2 - \sum_{j=1}^{k_i} m_{ji}^2}{m(m-1)} \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| \quad [23]$$

o expresando la cota superior en función de otra medida de dispersión, la Desviación Absoluta Media Relativa, cuyo valor es mayor o igual que el del Recorrido Relativo:

$$0 \leq \frac{1}{m(m-1)} \left| \frac{Re}{\bar{X}_i} \right| \leq CD \leq 2 \frac{m}{m-1} DAMR \quad [24]$$

2*) El Coeficiente de Discriminación está directamente relacionado con dos medidas de concentración: la Diferencia Media Relativa y el Índice de Gini:

$$CD = \frac{m}{m-1} M = 2 \frac{m}{m-1} G \quad [25]$$

3ª) La conclusión anterior permite acotar CD perfectamente:

$$0 \leq CD \leq 2 \quad [26]$$

correspondiendo los límites del intervalo de acotación a los dos casos teóricos extremos: Cuando la variable X_i toma el mismo valor en todos los países, el Coeficiente de Discriminación es cero, o lo que es lo mismo, X_i tiene poder discriminante nulo. Por el contrario, si X_i sólo presenta un valor distinto de cero en un país y en los $m-1$ restantes vale cero, su Coeficiente de Discriminación es igual a 2 y el poder discriminante de la variable es total.

4ª) Consideramos que el estudio anterior ha probado que el Coeficiente de Discriminación de Ivanovic no es una típica medida de dispersión sino que, dentro de las medidas de "desigualdad", está más relacionado con las que comparan elementos de dos series, concretamente con las de "concentración", cuyo objetivo es hacer una valoración del grado de reparto de la variable entre los elementos de la población. También hemos probado que CD no es meramente una medida de concentración, pues [25] muestra que incorpora información sobre el poder discriminante de la variable, teniendo en cuenta el número de países. Es decir, una variable, con un índice de concentración dado, es más o menos discriminante en el conjunto de m países en función del valor m : A medida que m aumenta, el poder discriminante de la variable disminuye. Supongamos una variable con un índice de Gini elevado. Puesto que el grado de concentración de la variable entre los países es alto, dicha variable tiene fuerte poder de discriminación, pero más aún si el número de países es pequeño.

5ª) En definitiva, el Coeficiente de Discriminación de Ivanovic, CD, es una medida muy interesante y apropiada para valorar lo informativo o no que es un indicador, sobre el objetivo a medir, en el conjunto de países observados.

7. APLICACIÓN DEL COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN

Una aplicación de la medida analizada se encuentra en Zarzosa Espina (1992). El trabajo se realizó sobre 40 variables representativas del nivel de bienestar

en las provincias españolas, con datos referidos a 1981, tomados de INE (1986) y de INE (1991). Aquí sólo recogeremos y comentaremos, a modo de ejemplo ilustrativo, los resultados del coeficiente de discriminación para las cuarenta variables.

La tabla 1 muestra los valores obtenidos y el gráfico 1 la correspondiente representación gráfica.

A efectos de interpretar los valores de CD, recordemos que ha sido demostrado que el intervalo de acotación de este coeficiente es $[0,2]$, representando el valor inferior el caso de nulo poder discriminante y el valor superior el caso teórico de máximo poder discriminante (variable que presenta el valor cero en todos los países menos en uno).

Destaca el poder discriminante de la variable 35 (Porcentaje de hogares con calefacción central), seguido de las variables 31 (% de hogares con agua fría y caliente central), 30 (% de hogares sin agua corriente) y 32 (% de hogares sin servicios de higiene), lo que nos lleva a la conclusión de que el componente vivienda es el más discriminante.

Un grado de discriminación relativamente alto poseen las variables 8 (Tasa de paro de población a partir de 55 años) y 23 (población a partir de 16 años analfabeta).

TABLA 1:

Coeficiente de Discriminación de Ivanovic

Variables	CD
1 Tasa de ocupación	0.188621
2 Tasa de paro ambos sexos	0.471683
3 Tasa de paro varones	0.499793
4 Tasa de paro mujeres	0.480867
5 Tasa de paro 16-19 años	0.407471
6 Tasa de paro 20-24 años	0.344269
7 Tasa de paro 25-54 años	0.518619

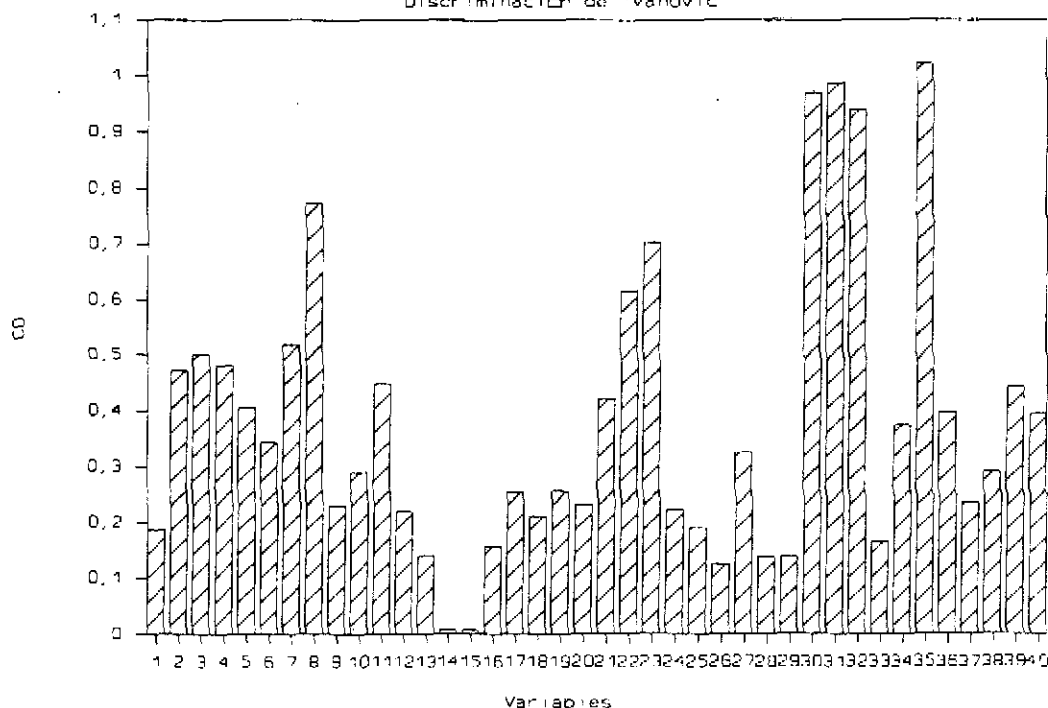
8	Tasa de paro de 55 y más años	0.774372
9	Mortalidad infantil	0.229576
10	Enfermedades infecciosas	0.289878
11	Accidentes de trabajo	0.448097
12	Escolaridad 16-35 años	0.219498
13	Escolaridad 4-5 años	0.140187
14	Escolaridad 6-9 años	0.007586
15	Escolaridad 10-13 años	0.006669
16	Escolaridad 14-17 años	0.156717
17	Escolaridad 18-24 años	0.253892
18	Población con estudios primarios	0.210837
19	Población con estudios medios	0.256587
20	Pobl. estud. n. anterior al superior	0.232622
21	Población con estudios superiores	0.421702
22	Población sin estudios	0.613538
23	Población analfabeta	0.702064
24	Ingreso hogares	0.221857
25	Consumo privado	0.189417
26	Gastos en alimentación	0.124695
27	Consumo domestico de electricidad	0.325307
28	Superf. útil por miembro del hogar	0.138095
29	Miembros del hogar por habitación	0.137124
30	Hogares sin agua corriente	0.969498
31	Hogares con agua caliente central	0.986596
32	Hogares sin servicios de higiene	0.938397
33	Hogares con cuarto de baño	0.165018
34	Hogares sin calefacción	0.374134
35	Hogares con calefacción central	1.019986
36	Hogares con teléfono	0.397220
37	Hogares con automóvil	0.235569
38	Hogares con lavadora	0.289602
39	Hogares con cámara fotográfica	0.441800
40	Hogares con magnetófono...	0.393710

Existen dos variables del componente educativo cuyo poder discriminante es prácticamente nulo, la 14 y la 15: Tasa de escolaridad por 100 habitantes de 6 a 9 años y de 10 a 13 años respectivamente. Es lógico que CD valga prácticamente cero para cada una de estas variables pues, en todas las provincias, prácticamente la población de estas edades está totalmente escolarizada, por lo que las variables

son casi degeneradas con un valor en torno a 100. Entonces, los indicadores parciales correspondientes no van a aportar prácticamente nada al indicador sintético de distancia (la distancia entre dos situaciones cualesquiera, en cuanto a cada una de las variables, es aproximadamente cero).

GRAFICO 6.11: Coeficiente de

Discriminación de Jvanovic



El componente económico (24-27) destaca por su bajo poder discriminante, en conjunto.

Si analizamos la discriminación dentro de cada componente, las características más significativas son: En el componente empleo, la variable tasa de paro a partir de 55 años es la que más discrimina, y la que menos el % de

ocupados sobre la población activa. En el componente salud, la variable más discriminante es la tasa de accidentes de trabajo. En educación, hay variables cuyo poder discriminante es prácticamente nulo, como ya se ha comentado y otras con gran poder discriminante, entre las que destaca la población analfabeta. En el componente económico, que se caracteriza por ser el menos discriminante de todos, la variable que se destaca un poco de las otras del grupo es el consumo de electricidad por habitante. Y por último, el componente de equipamiento y condiciones de las viviendas familiares, que es el más discriminante de todos, recoge variables tales como hogares sin agua corriente (30); con agua fría y caliente central (31); sin servicios (32); y con calefacción central (35); cuyo grado de discriminación es el más alto; y otras con bajo poder discriminante como superficie útil por miembro del hogar (28) y número de miembros por habitación (29).

En la referida tesis doctoral, se propone y aplica un criterio estadístico de selección de variables para medir el bienestar. Dicho criterio, al que se ha dado el nombre de "Cantidad de información global de Ivanovic-Pena", combina, en una misma medida, el coeficiente de discriminación, de Ivanovic (1974) y el factor corrector, de Pena Trapero (1977), que evita la duplicidad de información. El contenido de tal propuesta sobrepasa el objetivo de este trabajo, que creemos haber cumplido.

BIBLIOGRAFÍA:

- INE (1986): *Disparidades económico-sociales de las provincias españolas. Ensayo de Análisis de Componentes*. Madrid.
- INE (1991): *Indicadores sociales*. N° 0. Madrid.
- Ivanovic, B. (1974): *Comment établir une liste des indicateurs de developpement*. Revue de Statistique Appliquée. Vol. XXII, n° 2, París.
- Pena Trapero, J. B. (1977): *Problemas de la medición del bienestar y conceptos afines. (Una aplicación al caso español)*. Madrid, Instituto Nacional de Estadística.
- Sen, A. K. (1979): *Sobre la desigualdad económica*. Ed. Crítica. Barcelona.
- Zarzosa Espina, P. (1992): *Aproximación a la medición del bienestar social: Estudio de la idoneidad del indicador sintético "Distancia- P_2 "*. Universidad de Valladolid.