

LOS CONTRASTES DE RAÍZ UNITARIA CON CAMBIO ESTRUCTURAL: UNA PANORÁMICA.

M^a. del Mar Sánchez de la Vega
Arielle Beyaert

*Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía
Universidad de Murcia*

Estudios de Economía Aplicada I.S.S.N.: 1133-3197
Nº. 2 de 1994 p.p. 107-143

RESUMEN

El presente artículo ofrece una panorámica de los contrastes específicos de raíz unitaria en presencia de cambio estructural propuestos en la literatura, que pretende servir de guía práctica para el investigador que necesite hacer uso de este tipo de técnicas. Estos contrastes contribuyen a paliar el problema de baja potencia que presentan los tests tradicionales de raíz unitaria cuando la serie cambia de media, y por tanto son los que conviene utilizar en estas situaciones.

Palabras Clave: Tests, raíces unitarias, variables integradas, cambio estructural.

ABSTRACT

The aim of this paper is to offer a survey of the tests specifically designed to contrast the existence of a unit root in series affected by structural change in their first moment. It intends to serve as a guide for the applied researcher who needs to determine the order of integration of a series. These tests contribute to solve the problem of low power of the traditional unit root tests in situations where the mean of the series changes at discrete points of time; for this reason, they are appropriate in these cases.

Keywords: Tests, unit roots, integrated variables, structural change.

1.- INTRODUCCIÓN.

Las investigaciones llevadas a cabo recientemente consideran que muchas series pueden ser representadas, no tanto por procesos $I(1)$ de tendencia estocástica, como por procesos estacionarios alrededor de una tendencia lineal determinística que presenta un cambio estructural, consistente en un cambio en la ordenada en el origen y/o en la pendiente en algún momento del tiempo. Diversos estudios empíricos recientes sobre series macroeconómicas obtienen resultados que van en esta dirección. Citemos, entre otros, a Rappoport y Reichlin (1989), Perron (1989,1990), y Serletis (1992). Las características de estacionariedad alrededor de una tendencia que cambia en algún momento, pueden imitar las de una serie con raíz unitaria; de hecho, los tests de raíz unitaria pueden no rechazar erróneamente la hipótesis nula en estas condiciones (Perron(1989,1990), Balke y Fombi (1991), Hendry y Neale

(1991)). Esto mismo sucede en series estacionarias alrededor de un nivel que cambia en un momento del tiempo.

Motivados por lo anterior, varios autores han sugerido recientemente un buen número de procedimientos para contrastar la existencia de una raíz unitaria en presencia de cambio estructural. El presente trabajo, que es la continuación de Sánchez de la Vega- Beyaert(1994) sobre contrastes de raíz unitaria en ausencia de cambio, ofrece una panorámica de estos nuevos contrastes.

En la sección 2 se recogen los contrastes de raíz unitaria en presencia de cambio estructural. Estos se clasifican en dos grandes grupos : los que consideran conocido el punto de cambio, que se exponen en 2.1 y aquellos que lo toman como desconocido y lo estiman a partir de los datos, presentados en 2.2.

En la sección 3, se ofrece una presentación esquemática de los estadísticos que se utilizan en cada contraste, los modelos para los que están diseñados y las características de su distribución. Se pretende con ello proporcionar una información a la vez detallada y fácil de consultar acerca de los principales contrastes de raíz unitaria bajo cambio estructural publicados hasta la fecha.

2.- CONTRASTES ESPECÍFICOS DE RAÍZ UNITARIA EN PRESENCIA DE CAMBIO ESTRUCTURAL.

Cuando se contempla la posibilidad de cambio estructural, existen diversos aspectos importantes a tener en cuenta. Una distinción de considerable interés en estas situaciones radica en el tratamiento del momento (o momentos) del tiempo en que se produce un cambio, pudiendo considerarse que es conocido o, por el contrario, que no se conoce, por lo que debe ser estimado a partir de los datos. Basándonos en este criterio, según la consideración del momento del cambio como conocido o no, distinguiremos dos grupos de tests de raíz unitaria en series temporales con cambio estructural.

2.1. Tests que consideran conocido el momento del cambio.

A.-Cambio en la pendiente de la tendencia

Rappoport y Reichlin(1989) consideran el caso de un modelo con tendencia segmentada, caracterizada por cambiar de pendiente en algunos

momentos del tiempo, y sin saltos en los momentos de ruptura. Es decir, que la tendencia está compuesta de segmentos distintos, unidos en los puntos de cambio. Los autores proponen utilizar el estadístico t habitual en una regresión del tipo de Dickey y Fuller (1979), incluyendo una tendencia segmentada. Calculan los valores críticos adecuados en este caso.

Explicitan el siguiente modelo para el caso de una serie con una tendencia lineal que cambia en un solo punto de la muestra:

$$(2.1.1) \quad \Phi(B)(1-\rho B)(X_t - a - b_1 t - (b_2 - b_1)(t - T_B)D_{1t}) = \Theta(B)e_t$$

donde $\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ son polinomios con todas las raíces fuera del círculo unidad, T_B es el momento en que se supone que se produce el cambio estructural, y D_{1t} toma el valor 0 para $t < T_B$ y es igual a 1 para $t \geq T_B$. La hipótesis de raíz unitaria, es decir, de que las desviaciones de la serie $\{X_t\}$ de una tendencia segmentada necesitan ser diferenciadas para alcanzar la estacionariedad, corresponde a que $\rho = 1$ en (2.1.1); en cambio, si $|\rho| < 1$, la serie es estacionaria alrededor de dicha tendencia.

Andrés et al. (1990) describen el procedimiento que hay que seguir para contrastar $\rho = 1$ tanto en este modelo, como en el caso más general en el que la tendencia presente más de dos segmentos¹. Para tres segmentos, la ecuación (2.1.1) se transformaría en:

$$(2.1.2) \quad \Phi(B)(1-\rho B)(X_t - a - b_1 t - \sum_{i=2}^3 (b_i - b_{i-1})D_{i-1,t}(t - T_{i-1})) = \Theta(B)e_t$$

donde $D_{i,t} = 0$ si $t < T_i$, y 1 si $t \geq T_i$, siendo T_i el momento en el que se produce el cambio i -ésimo. Definiendo $\alpha(B) = \Theta(B)^{-1}\Phi(B)(1-\rho B)$, esta ecuación se puede reescribir como:

$$(2.1.3) \quad \alpha(B)(X_t - a - b_1 t - \sum_{i=2}^3 (b_i - b_{i-1})D_{i-1,t}(t - T_{i-1})) = e_t$$

Utilizando el hecho de que

$$(2.1.4) \quad \alpha(B) = \alpha(1) + \alpha'(B)(1-B)$$

¹ Conviene puntualizar que Rappoport y Reichlin (1989) sólo desarrollan explícitamente el caso del modelo con dos segmentos. Sin embargo, su desarrollo presenta un error en el paso de la ecuación [3] a la [4], de tal suerte que de una ecuación a otra se retrasa un período el momento en el que se supone que se produce el cambio.

y reagrupando adecuadamente los términos, se llega a²:

(2.1.5)

$$\begin{aligned}(1-B)X_t = & -\alpha(1)X_{t-1} + \alpha(1)(a-b_1) + \alpha(1)b_1t + \alpha(1)\sum_{i=2}^{\infty}(b_i-b_{i-1})D_{i-1,t-1}t + \\ & + \alpha(1)\sum_{i=2}^3(b_i-b_{i-1})D_{i-1,t-1}(1+T_{i-1}) + \alpha^*(B)[b_1 + \sum_{i=2}^3(b_i-b_{i-1})D_{i-1,t-1}] + \\ & + \alpha^{**}(B)(1-B)X_{t-1} + e_t\end{aligned}$$

donde $\alpha^{**}(B)$ está definido por la relación $\alpha^*(B) = 1 + \alpha^{**}(B)B$. Nótese que, por (2.1.4), la hipótesis nula $\rho = 1$ en (2.1.1) equivale a $\alpha(1) = 1$ en (2.1.5). Esta ecuación (2.1.5) constituye la generalización al caso que nos ocupa de la ecuación de Dickey-Fuller. Si la particularizamos, por ejemplo, al caso simple de una serie AR(1) con dos segmentos en la tendencia, obtenemos:

(2.1.6)

$$\begin{aligned}(1-B)X_t = & -\alpha(1)X_{t-1} + \alpha(1)(a_1-b_1) + \alpha(1)b_1t + \alpha(1)(b_2-b_1)D_{1,t-1}t + \\ & + \alpha(1)(b_2-b_1)D_{1,t-1}(1+T_1) + e_t\end{aligned}$$

A la vista de esta expresión, resulta fácil comprobar que el contraste sugerido por Rappoport y Reichlin equivale a regresar las diferencias primeras de la variable X sobre:

- el nivel de la variable retardado un período
- un término constante
- un término en t
- un término en t multiplicado por la variable ficticia retardada un período
- la variable ficticia retardada un período multiplicada por $(1+T_1)$

² Para el detalle de los pasos de (2.1.3) a (2.1.5), el lector interesado puede consultar Andrés et al.(1990), cap. 2, § 2.2.2.

Los dos últimos regresores se encargan de modelizar el cambio estructural que caracteriza a la serie en T_1 . Si ésta presentara un cambio en un segundo punto de la muestra (en T_2), se añadirían dos regresores específicos para modelizar el cambio en este momento.

Si la serie sigue un proceso ARMA más complejo, habría que añadir a la lista anterior los regresores que corresponden a los dos últimos términos de la expresión (2.1.5), y que se encargan de blanquear el ruido. Estos regresores consisten en retardos tanto de las diferencias primeras de X como de las variables ficticias retardadas un período.

Para el contraste se utiliza el estadístico tipo t asociado a la estimación del coeficiente $-\alpha(1)$ de la variable X_{t-1} en (2.1.5) o (2.1.6). Rappoport y Reichlin(1989) proporcionan, por simulación de Monte Carlo, un valor crítico para una muestra de 100 datos y un número reducido de posiciones posibles para los puntos de cambio (dos o tres, según el número de segmentos que componen la tendencia)³. Estos valores han sido utilizados ampliamente en el marco del modelo MOISEES (Molinas et al.(1990)) de la economía española, en el que muchas series aparecen como $I(2)$ cuando no se permite cambio estructural en su tendencia, e $I(1)$ cuando se les aplica un contraste del tipo que acabamos de examinar.

Perron(1989) examina también el modelo de tendencia segmentada (con dos segmentos), aunque en el marco de un modelo que cumple condiciones más generales, y le da un tratamiento mas riguroso; además, considera otras posibilidades de cambio, que afectan a la ordenada y/o a la pendiente de la tendencia. Su aportación se expone a continuación.

B.- Cambio en la ordenada en el origen y/o en la pendiente

Perron (1989) considera la hipótesis nula de que la serie que se analiza contiene una raíz unitaria posiblemente con deriva distinta de cero, y con un cambio en la estructura de la trayectoria de la serie en un momento del tiempo conocido, T_B ($1 < T_B < T$). Las tres posibilidades que incluye bajo la hipótesis nula son: la de un cambio exógeno en el nivel de la serie, un cambio exógeno en la tasa de crecimiento (cambio en la pendiente de la tendencia), o bien ambas modificaciones simultáneamente. Los modelos a través de los que se

³ En el artículo, no se especifica el modelo con el cual se han calculado estos valores críticos por lo que es difícil valorar hasta qué punto se pueden utilizar en cualquier situación práctica.

parametrizan estas hipótesis son los siguientes (en los que d_{1t} representa una variable ficticia que toma el valor 0 hasta $t=T_B$ y 1 para $t>T_B$).

Modelo (A): Cambio en el nivel

$$H_0: \Delta X_t = \mu + d\Delta d_{1t} + u_t$$

$$H_1: X_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + u_t$$

Modelo (B): Cambio en la pendiente de la tendencia

$$H_0: \Delta X_t = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + u_t$$

$$H_1: X_t = \mu + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{1t} + u_t$$

Modelo (C): Cambio tanto en nivel como en pendiente

$$H_0: \Delta X_t = \mu_1 + d\Delta d_{1t} + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + u_t$$

$$H_1: X_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + (\beta_2 - \beta_1)td_{1t} + u_t$$

En estos modelos, u_t verifica las condiciones generales de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988), que imponen:

$$(2.1.7) \quad a) E(u_t) = 0 \quad \forall t$$

$$b) \sup_t E |u_t|^\beta < \infty \quad \text{para algún } \beta > 2$$

$$c) \text{Existe } \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} (T^{-1} S_T^2) \text{ y } \sigma^2 > 0, \text{ siendo } S_T = \sum_{j=1}^T u_j$$

$$d) \{u_t\}_{t=1}^\infty \text{ es una mezcla fuerte con coeficientes de mixtura}$$

$$\alpha_m \text{ que satisfacen } \sum_{m=1}^\infty \alpha_m^{1/2\beta} < \infty.$$

Estas condiciones incluyen el caso de que la serie $\{u_t\}$ siga un proceso ARMA(p,q) con órdenes posiblemente desconocidos, de la forma:

$$\Phi(B) u_t = \Theta(B) e_t$$

donde $e_t \sim iid(0, \sigma^2)$ y $\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ son polinomios en el operador de retardos, de órdenes p y q respectivamente.

Claramente, el parámetro T_B es el punto del tiempo en que se produce el cambio en la función tendencia. Observamos que los tres modelos recogen bajo la hipótesis nula la necesidad de diferenciar las desviaciones de la serie respecto de una tendencia con cambio estructural, para alcanzar estacionariedad; mientras que la hipótesis alternativa es que la serie es estacionaria alrededor de dicha tendencia. La diferencia entre los tres modelos radica únicamente en el tipo de cambio que se produce en la estructura de la tendencia. Perron (1989) se refiere al primer modelo de cambio repentino en el nivel como "modelo crash", dando como ilustración del mismo la serie de salarios nominales de la economía americana (en logaritmos) entre 1900 y 1970, que bajó drásticamente de nivel entre 1929 y 1930 como consecuencia de la "gran crisis", pero que, por lo demás, no presentó variaciones en su pendiente. Al modelo (B) lo califica de modelo "changing growth", que asocia a la serie del PIB real de Estados Unidos, que sufre un cambio de pendiente en el primer trimestre de 1973, como consecuencia de la crisis del petróleo. Finalmente, como ilustración del modelo (C), ofrece la serie de los precios de las acciones (1871-1970), caracterizada por un cambio repentino en el nivel de la serie en 1929, seguido de un aumento en la tasa de crecimiento que se mantiene estable a partir de ese momento.

Conviene notar y es fácil comprobar que el modelo (B), con perturbaciones ARMA(p, q), coincide con el que plantean Rappoport y Reichlin (1989)⁴. Ambos modelos difieren exclusivamente en la manera de parametrizar la situación que se da bajo la nula y la alternativa.

Los procedimientos de contraste que sugiere Perron son extensiones del tratamiento habitual de Dickey-Fuller para el caso de una tendencia sin cambio. La idea es muy simple: en una primera etapa, se trata de extraer la tendencia de la serie; así, en el modelo (A) se regresa X sobre una constante, la variable t , y la ficticia d_{1t} ; en el modelo (B), esta ficticia se sustituye por $(t - T_B)d_{1t}$, mientras que en el modelo (C), la regresión incluye las mismas variables

⁴ Esta coincidencia se limita a la formulación que Rappoport y Reichlin (1989) especifican en la ecuación (3) de su artículo. Las ecuaciones (4) y (5), derivadas de (3) con errores, no presentan esta coincidencia.

que en el modelo (A) a las que hay que añadir td_{1t} . En la segunda etapa, se trata de utilizar los residuos de las regresiones anteriores, denotados por $\tilde{X}_t^i$ para $i=A,B,C$, para construir la ecuación habitual de Dickey-Fuller. De esta forma los estadísticos a considerar son el estimador MCO y estadístico t usual para ρ asociados a la regresión:

$$(2.1.8) \quad \tilde{X}_t^i = \tilde{\rho}^i \tilde{X}_{t-1}^i + \tilde{u}_t^i \quad (i=A,B,C; t=1,2,\dots,T)$$

Como es lógico pensar, estos estadísticos, que denotaremos $\tilde{\rho}^i$ y $t_{\tilde{\rho}^i}$, no tienen las mismas distribuciones que sus análogos de Dickey-Fuller, $\hat{\rho}_\tau$ y τ_τ , contruidos en ausencia de cambio en la tendencia. Su distribución asintótica bajo la hipótesis nula del modelo i ($i=A,B,C$), es obtenida por Perron (1989) en su Teorema 2; en su derivación, se necesita solamente que la sucesión de innovaciones $\{u_t\}$ verifique las condiciones generales de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988) enunciadas anteriormente, y que el punto de cambio se produzca en una fracción λ fija de la muestra; es decir, $T_B = \lambda T$ con T y T_B valores enteros.

Estas distribuciones dependen del valor del parámetro λ , y se expresan en términos de funcionales de procesos de Wiener. Para $\lambda=0$ ó $\lambda=1$, coinciden, como cabía esperar, con las obtenidas por Phillips y Perron (1988) para series que no presentan cambio estructural, cuando no se incluyen variables ficticias en la regresión de extracción de la tendencia.

Para cualquier $\lambda \in [0,1]$, estas distribuciones límite contienen los parámetros desconocidos σ^2 y σ_u^2 , definidos por:

$$\sigma^2 = E(T^{-1}S_T^2) \text{ y } \sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E[T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2] \text{ con } S_T = \sum_{t=1}^T u_t^5.$$

El uso práctico de estas aportaciones requiere distinguir dos situaciones. En el caso más simple en el que las perturbaciones de la serie son iid, $\sigma^2 = \sigma_u^2$,

⁵ Notar que en el caso de $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$, este hecho ya fue observado por Phillips y Perron (1988).

el contraste se lleva a cabo mediante el estadístico MCO normalizado y el estadístico t obtenidos a partir de la regresión (2.1.8), se utilizan los valores críticos que Perron (1989) obtiene mediante simulación bajo este supuesto, para varios valores de λ , están recogidos en las tablas IV, V, y VI de su artículo, y que reproducimos para el nivel de probabilidad del 5% en el cuadro I; en este cuadro, los valores críticos correspondientes al estadístico MCO normalizado de la regresión (2.1.8) se encuentran en la columna titulada "MCO", y los del estadístico tipo t en la columna titulada " t ". Estos valores críticos para cada modelo son mayores (en valor absoluto) que los correspondientes de Dickey-Fuller. Por otro lado, parecen alcanzar su máximo (en valor absoluto) alrededor de $\lambda=0.5$, es decir, cuando el cambio se produce en mitad de la muestra. De todas formas, hay que decir que las diferencias entre valores críticos para distintos valores de λ adyacentes no son muy sustanciales; así, según el autor citado, el uso de las tablas correspondientes, para llevar a cabo los contrastes de raíz unitaria, que supone calcular T_B/T y escoger el valor crítico de la tabla asignado al valor de λ más próximo a T_B/T , no da lugar a distorsiones considerables en la inferencia.

Cuadro I: Valores criticos axintóticos para el contraste con cambio en la tendencia
(Perron(1989))

λ	Modelo (A)		Modelo (B)		Modelo (C)	
	MCO	t	MCO	t	MCO	t
0.1	-25.04	-3.68	-25.00	-3.65	-26.63	-3.75
0.2	-26.00	-3.77	-27.16	-3.80	-29.95	-3.99
0.3	-25.90	-3.76	-28.61	-3.87	-32.47	-4.17
0.4	-25.40	-3.72	-29.23	-3.94	-33.22	-4.22
0.5	-25.25	-3.76	-29.65	-3.96	-33.79	-4.24
0.6	-25.56	-3.76	-29.51	-3.95	-33.19	-4.24
0.7	-25.99	-3.80	-28.68	-3.85	-33.11	-4.18
0.8	-25.82	-3.75	-27.24	-3.82	-30.70	-4.04
0.9	-25.40	-3.69	-25.25	-3.68	-27.16	-3.80

Si los residuos de la regresión anterior hacen sospechar (mediante los contrastes adecuados) que las perturbaciones de la serie no son iid (en particular cuando se considera que éstas siguen un proceso ARMA posiblemente heterocedástico), habría que aplicar uno de los dos procedimientos propuestos por Perron para el caso de perturbaciones que cumplen las condiciones generales (2.1.7), y descritos a continuación.

El primero consiste en construir los estadísticos MCO normalizados y estadísticos t corregidos, en la línea de Phillips y Perron (1988), utilizando estimadores consistentes de σ^2 y σ_u^2 basados en los residuos estimados a partir de la regresión (2.1.8), en este caso tienen la expresión:

$$(2.1.9) \quad Z(\hat{\rho}^i) = T(\hat{\rho}^i - 1) - T^2(\hat{\sigma}_i^2 - \hat{\sigma}_{ui}^2)/2s_i^2 \quad (i=A, B, C)$$

$$Z(t_{\hat{\rho}^i}) = (\hat{\sigma}_{ui}/\hat{\sigma}_i)t_{\hat{\rho}^i} - T(\hat{\sigma}_i^2 - \hat{\sigma}_{ui}^2)/2\hat{\sigma}_i s_i \quad (i=A, B, C)$$

donde $\hat{\sigma}_i^2$ y $\hat{\sigma}_{ui}^2$ son estimadores consistentes de σ^2 y σ_u^2 , respectivamente, pudiendo tomarse los que se construyen siguiendo las sugerencias dadas por Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988), que tienen la forma:

$$(2.1.10) \quad \hat{\sigma}_{ui}^2 = T^{-1} \sum_{i=1}^T \tilde{u}_i^2$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = T^{-1} \sum_{i=1}^T \tilde{u}_i^2 + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^l w_{\tau i} \sum_{i=\tau+1}^T \tilde{u}_i \tilde{u}_{i-\tau} \quad \text{donde } w_{\tau i} = 1 - \tau/(l+1) \text{ con}$$

$l = o(T^{1/4})$.

En la expresión anterior, s_i^2 (para $i=A, B, C$) es la suma residual de cuadrados de la regresión de X_i sobre $1, t$ y d_{it} para $i=A$; $1, t, (t-T_B)d_{it}$ cuando $i=B$; y $1, t, d_{it}, td_{it}$ si $i=C$.

Otra posibilidad es seguir la aproximación propuesta por Dickey y Fuller (1979, 1981) y Said y Dickey (1984), que consiste en incluir como regresores adicionales en la ecuación (2.1.8), un conjunto de retardos de la primera diferencia de los datos. Se trata de estimar (por MCO) la regresión:

$$(2.1.11) \quad \tilde{X}_t^i = \rho^i \tilde{X}_{t-1}^i + \sum_{j=1}^k C_j \Delta \tilde{X}_{t-j}^i + \tilde{e}_t^i$$

donde

$$\Delta \tilde{X}_t^i = \tilde{X}_t^i - \tilde{X}_{t-1}^i$$

El parámetro k , que indica el número de regresores que se añaden, sería igual a p en el caso de un proceso autorregresivo puro, $AR(p)$. Cuando el proceso es un $ARMA(p,q)$ general, con p y q desconocidos k , depende del tamaño muestral, de forma que $k \rightarrow \infty$ y $k^3/T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$. En una de las aplicaciones que realiza, Perron (1989) escoge el valor de k según un test de significación de los coeficientes C_j (usando 1.60 como valor crítico de la t asociado al valor estimado de C_j). Bajo las condiciones de Said y Dickey (1984) que conducen en el caso de tendencia no segmentada al contraste DFA, Perron (1989) argumenta que el estadístico t del coeficiente de X_{t-1} en la regresión

(2.1.11), t_{ρ^i} ($i=A,B,C$), tiene la misma distribución límite que la del correspondiente a la regresión (2.1.8) cuando las innovaciones son iid. Por lo tanto, este segundo procedimiento constituye, en realidad, una extensión directa del contraste DFA.

En resumen, para modelos generales se pueden utilizar los estadísticos corregidos o los que se obtienen de la regresión (2.1.11), y hacer uso de las mismas tablas de valores críticos calculadas por Perron (1989) citadas anteriormente (véase cuadro I).

Recientes estudios de simulación acerca de la potencia de estos contrastes (ver Sánchez de la Vega (1993)), ponen de manifiesto diversas características de interés. Estos tests son en general más potentes que los tradicionales, que no contemplan el cambio, en alternativas en que éste se presenta. La potencia de estos tests con cambio no está influenciada por la magnitud del cambio; a diferencia de lo que sucede con los tests tradicionales. Un problema importante que presentan estos nuevos contrastes es que sus propiedades de potencia se alteran notablemente cuando el punto de cambio se toma erróneamente.

C.- Cambio en la media

El caso concreto en que se incluye solamente una constante no nula en la representación de la serie (y no una componente de tendencia lineal en el

tiempo) es analizado en detalle en un trabajo posterior de Perron (1990). Propone un procedimiento similar al anterior para el modelo:

$$H_0: X_t = \gamma \Delta d_{1t} + X_{t-1} + u_t$$

$$H_1: X_t = \mu + \gamma d_{1t} + u_t$$

con u_t bajo las condiciones (2.1.7).

Para este modelo considera la regresión :

$$(2.1.12) \quad \tilde{X}_t = \tilde{\rho} \tilde{X}_{t-1} + \tilde{u}_t \quad t=1, \dots, T$$

donde $\tilde{X}_t$ son los residuos de una regresión de X_t sobre una constante y d_{1t} .

El estadístico MCO y estadístico t para $\tilde{\rho}$ se denotan respectivamente por $T(\tilde{\rho}-1)$ y $t_{\tilde{\rho}}$. Su distribución asintótica bajo la hipótesis nula de una raíz unitaria, obtenida por Perron (1990) (donde igual que antes, $T_B = \lambda T$), depende de nuevo de λ , y de σ^2 y σ_u^2 . Una característica destacada que presentan estas distribuciones límite es que son simétricas respecto a $\lambda = .5$, siendo las mismas para λ y $(1-\lambda)$, lo que hace que con una tabla de valores críticos no muy amplia se tengan cubiertos un buen número de posibilidades para λ .

Para el caso en que $\sigma^2 = \sigma_u^2$, Perron (1990) calcula los puntos porcentuales de los estadísticos $T(\tilde{\rho}-1)$ y $t_{\tilde{\rho}}$, tanto en muestra finita como infinita; en general, las distribuciones asintóticas constituyen una aproximación adecuada a las distribuciones en muestra finita. Estos valores críticos presentan las mismas características comentadas anteriormente para el modelo con tendencia, referidas a su relación con los valores críticos estándar de Dickey-Fuller, el valor de λ en el que los valores críticos son máximos, y la escasa diferencia entre valores críticos correspondientes a valores de λ cercanos.

Cuando se considera que las perturbaciones de la serie son iid, el contraste se realiza mediante los estadísticos calculados según la regresión (2.1.12) utilizando los valores críticos dados por Perron (1990). Los reproducimos en el cuadro II, para un nivel de probabilidad del 5%.

Cuadro II: Valores críticos al 5% para el contraste con cambio en la media
(Perron (1990))

Fracción de la muestra	Tamaño muestral	Estadístico MCO	Estadístico t
$\lambda = .1, .9$	$T = 50$	-15.04	-3.12
	$T = 100$	-16.14	-3.09
	$T = 200$	-15.99	-3.06
	$T = \infty$	-16.64	-3.10
$\lambda = .2, .8$	$T = 50$	-16.51	-3.30
	$T = 100$	-17.20	-3.22
	$T = 200$	-17.05	-3.20
	$T = \infty$	-18.02	-3.23
$\lambda = .3, .7$	$T = 50$	-17.04	-3.39
	$T = 100$	-17.69	-3.33
	$T = 200$	-18.34	-3.34
	$T = \infty$	-18.55	-3.30
$\lambda = .4, .6$	$T = 50$	-17.00	-3.43
	$T = 100$	-18.11	-3.38
	$T = 200$	-18.50	-3.34
	$T = \infty$	-18.97	-3.35
$\lambda = .5$	$T = 50$	-17.5	-3.45
	$T = 100$	-18.41	-3.38
	$T = 200$	-18.50	-3.34
	$T = \infty$	-18.95	-3.34

Para modelos con innovaciones $\{u_t\}$ más generales, de manera similar a los modelos con tendencia, se pueden utilizar los estadísticos obtenidos mediante una regresión aumentada, en la línea de Dickey y Fuller (1979) y Said y Dickey (1984); o bien corregir los estadísticos resultantes de la regresión (2.1.12) según el procedimiento de Phillips (1987) y Phillips y Perron (1988), en la forma:

$$Z(\hat{\rho}) = T(\hat{\rho} - 1) - T^2(\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_u^2)/(2S_e^2)$$

y

$$Z(t_p) = (\hat{\sigma}_u/\hat{\sigma})t_p - T(\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_u^2)/(2\hat{\sigma}S_e)$$

donde $\hat{\sigma}^2$ y $\hat{\sigma}_u^2$ son estimadores consistentes de σ^2 y σ_u^2 respectivamente,

cuya expresión se detalló en (2.1.10), y S_e^2 es la suma residual de cuadrados de la regresión de X_t sobre una constante y d_{11} . El contraste en este caso se lleva a cabo con estos estadísticos y utilizando la tabla de valores críticos mencionada anteriormente.

D.- Otras formas de especificación dinámica del cambio.

D1.- Cambio en la media.

En todos los tratamientos anteriores, se ha considerado que el cambio que afecta a la serie temporal tiene carácter exógeno, y puede ser debido a un "suceso atípico". Tal como dicen Box y Tiao (1975) en su "análisis de intervención", se supone que se puede aislar este cambio e introducirlo en la parte determinística de la serie. Se trata del tipo de outliers que Tiao (1985) (ver también Tsay (1986)) llama outliers aditivos "AO". Esta consideración de los cambios, tanto en el nivel, como en la función de tendencia implica que éstos son instantáneos y supone que modifican el nivel y/o tendencia de forma permanente, con lo que los cambios no están afectados por la dinámica del proceso.

De otro lado, existe otra posibilidad que consiste en considerar que el cambio no ha de ser necesariamente instantáneo, sino que puede estar afectado por la especificación dinámica del proceso correspondiente al ruido. Esta otra forma de ver los cambios puede ser más realista en algunos casos, ya que

recoge la situación en la que la economía reacciona gradualmente ante un shock que afecte a su nivel o tendencia. Los modelos que representan estas situaciones se definen en Tiao (1985) y Tsay (1986) como modelos de "innovational outliers", IO. Perron (1990) estudia el problema de contrastar una raíz unitaria cuando la media de la serie presenta un cambio de esta forma. Las hipótesis nula y alternativa para este caso son:

$$H_0: X_t = X_{t-1} + \Phi(B)^{-1} \Theta(B) [e_t + \gamma \Delta d_{1t}] \quad t=1, \dots, T$$

$$H_1: X_t = \mu + \Phi(B)^{-1} \Theta(B) [e_t + \gamma d_{1t}] \quad t=1, \dots, T$$

donde el proceso de innovaciones de la serie, u_t , sigue un proceso ARMA(p,q) de la forma: $(B) u_t = \Theta(B) e_t$ con $e_t \sim \text{iid}(0, \sigma_e^2)$.

Para contrastar la hipótesis nula Perron (1990) propone de nuevo el estimador MCO normalizado y el estadístico t para ρ , a partir de la regresión

$$X_t = \mu + \gamma d_{1t} + d \Delta d_{1t} + \rho X_{t-1} + \sum_{j=1}^k C_j \Delta X_{t-j} + u_t$$

La distribución asintótica del estadístico t es la misma que la del estadístico t para el modelo AO, por lo que pueden utilizarse para el contraste los puntos críticos tabulados para este último.

D2.- Cambio en la ordenada en el origen y/o en la pendiente

Perron (1989) plantea la posibilidad de que, en los modelos del tipo (A), (B) ó (C) examinados en la sección B. del presente trabajo, el cambio de nivel o de pendiente de la serie sea gradual en lugar de instantáneo. Una manera de modelizar este carácter gradual consiste en tratarlo como un IO. Para este caso, el autor indica que equivale a trabajar con las siguientes regresiones (construidas anidando los modelos correspondientes bajo la hipótesis nula y la hipótesis alternativa):

(2.1.12)

$$\text{modelo (A): } X_t = \mu^A + \theta^A d_{1t} + \beta^A t + d^A \Delta d_{1t} + \rho^A X_{t-1} + \sum_{j=1}^k C_j^A \Delta X_{t-j} + u_t$$

(2.1.13)

$$\text{modelo (B): } X_t = \mu^B + \theta^B d_{1t} + \beta^B t + \gamma^B (t - T_B) d_{1t} + \rho^B X_{t-1} + \sum_{i=1}^k C_i^B \Delta X_{t-i} + u_t$$

(2.1.14)

$$\text{modelo (C): } X_t = \mu^C + \theta^C d_{1t} + \beta^C t + \gamma^C t d_{1t} + d^C \Delta d_{1t} + \rho^C X_{t-1} + \sum_{i=1}^k C_i^C \Delta X_{t-i} + u_t$$

Estas expresiones corresponden a la hipótesis nula de raíz unitaria cuando

$$\rho^A = 1, \beta^A = 0, \theta^A = 0, \text{ en el modelo (A)}$$

$$\rho^B = 1, \gamma^B = 0, \beta^B = 0, \text{ en el modelo (B)}$$

$$\rho^C = 1, \gamma^C = 0, \beta^C = 0, \text{ en el modelo (C)}$$

mientras que para la hipótesis alternativa de un proceso "estacionario en tendencia", $\rho^A, \rho^B, \rho^C < 1$; $\beta^A, \beta^B, \beta^C \neq 0$; y $\theta^A, \theta^C, \gamma^B, \gamma^C \neq 0$. Además, d^A, d^C y θ^B deberían estar próximos a cero, a diferencia de la hipótesis nula, bajo la cual tendrían que ser significativamente distintos de cero.

El estadístico a utilizar para el contraste de raíz unitaria vuelve a ser el estadístico t para $\hat{\rho}^i$, $i = A, B, C$, en la regresión apropiada, y como siempre, se plantea la cuestión de determinar su distribución límite. Para los modelos (A) y (C), resulta ser la misma que sus análogos del tipo AO (véase sección B.); sin embargo, esto no sucede para el modelo (B). En este caso, el estadístico t para (B) tiene la misma distribución asintótica que el relativo al modelo (C). Por tanto, como señala Perron (1989), y por lo menos en muestras grandes, no se podrá distinguir el contraste del modelo (B) del contraste del modelo (C). Por ello, Perron sugiere modificar, en el caso (B), la hipótesis nula, considerando un paseo aleatorio con deriva constante; propone utilizar la regresión:

$$X_t = \mu^B + \beta^B t + \gamma^B (t - T_B) d_{1t} + \rho^B X_{t-1} + \sum_{i=1}^k C_i^B \Delta X_{t-i} + u_t$$

que no incluye un cambio en la deriva bajo la hipótesis nula. La distribución asintótica del estadístico t que se obtiene a partir de esta regresión, tiene ahora

la misma distribución asintótica que su análogo en el modelo AO, por lo que se utilizarían los valores críticos del cuadro I.

2.2. Momento del cambio desconocido.

La posibilidad de que uno sea capaz de identificar un suceso exógeno asociado con el cambio, que permita conocer el momento del tiempo en que éste se produce, no siempre resulta aplicable. Además, algunos autores (ver Christiano (1992)) argumentan que en cualquier caso, el punto de cambio siempre debe considerarse como un parámetro desconocido. Uno y otro tratamiento dan lugar a propiedades estadísticas completamente distintas de los elementos que intervienen en el contraste.

Esta consideración del cambio en fecha desconocida supone disponer de nuevos estadísticos para contrastar la hipótesis de raíz unitaria; estas técnicas serán las que expondremos a continuación.

A.- Cambio en la ordenada en el origen y/o en la pendiente .

Zivot y Andrews (1992) plantean el contraste de la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria y deriva excluyendo cualquier cambio estructural, frente a la alternativa de un proceso estacionario alrededor de una tendencia cuyos parámetros cambian en un momento del tiempo desconocido. Consideran los tres modelos de Perron(1989) para la hipótesis alternativa (véase sección 2.1.B del presente trabajo), pero toman como hipótesis nula para todos ellos la siguiente:

$$(2.2.1) \quad X_t = \mu + X_{t-1} + u_t$$

En la alternativa, la fracción de la muestra afectada por el cambio, λ , ha de ser estimada a partir de los datos. Los autores proponen utilizar para ello una "red de búsqueda", aplicada al procedimiento de contraste de Perron (con las modificaciones introducidas en la hipótesis nula); las ecuaciones de regresión que se proponen para el contraste de raíz unitaria y la estimación de λ son entonces:

$$\text{Modelo (A): } X_t = \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A d_{1t}(\lambda) + \hat{\beta}^A t + \hat{\rho}^A X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{C}_j^A \Delta X_{t-j} + \hat{u}_t$$

$$\text{Modelo (B): } X_t = \hat{\mu}^B + \hat{\beta}^B t + \hat{\gamma}^B (t - T\lambda) d_{1t}(\lambda) + \hat{\rho}^B X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{C}_j^B \Delta X_{t-j} + \hat{u}_t$$

$$\text{Modelo (C): } X_t = \hat{\mu}^C + \hat{\theta}^C d_{1t}(\lambda) + \hat{\beta}^C t + \hat{\gamma}^C (t - T\lambda) d_{1t}(\lambda) + \hat{\rho}^C X_{t-1} + \sum_{j=1}^k \hat{C}_j^C \Delta X_{t-j} + \hat{u}_t$$

donde $d_{1t}(\lambda) = 1$ si $t > T\lambda$ y 0 en otro caso. Estas regresiones se estiman para distintos valores del parámetro λ pertenecientes a un subconjunto cerrado Λ de $(0,1)$ especificado a priori. El objetivo de los autores es "dar más credibilidad" a la hipótesis de estacionariedad en tendencia (por supuesto con cambio estructural), por lo que proponen elegir el λ que da lugar a un estadístico t , asociado a $\hat{\rho}^i, i=A,B,C$ más pequeño, y por tanto, más favorable

a rechazar la posible diferenciación de la serie. Este λ se denota por $\tilde{\lambda}_{inf}^i$ para cada uno de los modelos $i=A,B,C$. Por tanto, su valor se determina de forma que:

$$t_{\hat{\rho}^i}[\tilde{\lambda}_{inf}^i] = \inf_{\lambda \in \Lambda} t_{\hat{\rho}^i}(\lambda) \quad i=A,B,C.$$

La consideración de λ como resultante de un procedimiento de estimación, hace que, al utilizar el estadístico t para contrastar la hipótesis de raíz unitaria, sea necesario obtener su distribución límite y calcular los valores críticos correspondientes. Hay que notar que no sería conveniente seguir utilizando los valores que se obtienen para los λ fijados, ya que, tal como señalan Zivot y Andrews (1992), el test consistiría en:

Rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria si:

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} t_{\hat{\rho}^i}(\lambda) < K_{inf,\alpha}^i \quad i=A,B,C$$

donde $K_{inf,\alpha}^i$ denota el valor crítico al nivel α de la distribución asintótica de $\inf_{\lambda \in \Lambda} t_{\hat{\rho}^i}(\lambda)$

y éste será claramente menor o igual (por la propia definición) que el correspondiente a cualquier λ fijado. Utilizar los valores críticos de Perron conduciría por tanto, a no rechazar la hipótesis nula en mayor número de casos que el marcado por el nivel escogido para el test.

Las distribuciones asintóticas de los estadísticos t_{β_i} cuando la serie $\{X_t\}$ está generada según (2.2.1), con perturbaciones independientes, se dan en el Teorema 1 de Zivot y Andrews (1992); para la extensión a perturbaciones más generales se propone, como es habitual, el uso de una regresión de tipo Dickey-Fuller aumentada, DFA, o bien la aproximación de Phillips (1987). Los autores proporcionan, además, los valores críticos de estas distribuciones límite, obtenidos por simulación, y que reproducimos parcialmente en el cuadro III (estos valores, comparados con los del cuadro I, permiten valorar las distorsiones en el tamaño que pueden derivarse del uso de los valores críticos de Perron)⁶.

Cuadro III: Valores críticos asintóticos al 5 % - test de Zivot-Andrews(1992)

Modelo (A)	Modelo (B)	Modelo (C)
-4.80	-4.42	-5.08

Las potencias en distintas situaciones, con o sin cambio, de los tests tradicionales y los que contemplan un cambio, tomando el momento del cambio como conocido o bien estimándolo, se comparan en Sánchez de la Vega (1993). Según los resultados de este trabajo, en nuestra opinión, en el análisis de raíz unitaria de una serie, es de gran interés utilizar, junto con los tests tradicionales de raíz unitaria, los tests específicos que contemplan un cambio estructural, especialmente los que estiman el punto de cambio, con el fin de obtener conclusiones más fiables.

Banerjee et al.(1992) también plantean la estimación del punto de cambio. Estos autores construyen múltiples estadísticos, tipo t o F, que se pueden clasificar en dos grandes grupos. Por una parte, proponen estadísticos

⁶ También se presentan en el artículo citado los valores críticos en muestra finita, cuando los errores que rigen el PGD son procesos ARMA (p,q) normales. Los distintos modelos ARMA (p,q) que se consideran son los que, mediante un estudio previo, ajustan mejor diversas series macroeconómicas que se manejan. Estos valores críticos en muestra finita tienen mayor valor absoluto que los asintóticos para los modelos (A) y (B), cuando el valor de k varía de regresión a regresión en función de λ . Cuando k se fija independientemente de λ y/o cuando se considera el modelo (C), las distribuciones de muestra finita y asintóticas son más próximas.

recursivos y "rolling" que extienden los estadísticos habituales de Dickey-Fuller, pero que no están específicamente destinados a contrastar cambio estructural en la tendencia de la serie; de hecho, estos estadísticos tienen una potencia relativamente baja, tanto en el caso en el que la serie presenta cambio en su tendencia, como en el caso, no contemplado en el presente trabajo, en que el cambio que se produce se debe a que la serie pasa de ser $I(0)$ a $I(1)$ (o viceversa) en algún momento. Por otra parte, construyen estadísticos secuenciales destinados específicamente al caso en el que se sospecha que la tendencia de la serie puede haber sufrido, en algún momento desconocido del tiempo, un cambio en su ordenada en el origen o en su pendiente. Estos estadísticos tienen potencia relativamente alta frente a las alternativas de cambio en la tendencia. Uno de ellos coincide con el estadístico que Zivot y Andrews (1992) desarrollaron de forma independiente. Los autores proponen también otro estadístico, cuya potencia es prácticamente idéntica a la del estadístico de Zivot-Andrews, pero cuyo cálculo, sin embargo, es algo más complicado, ya que requiere la obtención previa de otro estadístico. Finalmente, proponen un estadístico destinado a contrastar que una serie $I(1)$ con deriva ha sufrido un cambio en dicha deriva en algún momento desconocido de la muestra⁷. A título ilustrativo, la aplicación de sus resultados al PIB de cinco países desarrollados indican que sus contrastes permiten matizar el tipo de comportamiento no estacionario que siguen estas series. Así, la aplicación de contrastes DF estándar o DF recursivos y rolling concluye que los PIB de todos los países contienen una raíz unitaria. Los contrastes secuenciales, en cambio, indican que dos de estos cinco países tienen en realidad un PIB estacionario alrededor de una tendencia que cambia, mientras que los otros tres son series $I(1)$ con una deriva cambiante.

B.- Cambio en la media

Nos centramos ahora en el estudio de una serie con constante, a diferencia del bloque anterior en que la serie presentaba una tendencia lineal. La extensión de los contrastes de raíz unitaria bajo la presencia de cambio en el nivel, dados por Perron (1990) y examinados en la sección 2.1.C. de este trabajo, al caso de que no se conozca el momento del cambio, se investiga en un trabajo posterior por Perron y Vogelsang (1992). El modelo que utilizan es

⁷ No nos parece necesario presentar detalladamente estos dos estadísticos en el presente trabajo; en efecto, el primero de ellos no presenta ventajas claras sobre el estadístico de Zivot-Andrews (1992); en cuanto al segundo, aunque sea de indudable interés, no corresponde exactamente al objetivo de esta panorámica.

el mismo que en Perron (1990), y la técnica de estimación del punto de cambio es similar a la de Zivot y Andrews (1992), pero proponen además otra vía que, como veremos, da más peso a la posibilidad del cambio, y que puede elevar la potencia de los contrastes.

Asimismo, se consideran dos posibilidades acerca de cómo afecta el cambio a la serie: de forma instantánea (modelo "additive outlier", AO), o bien gradual, determinada por la dinámica del proceso (modelo "innovational outlier", IO), (posibilidades que se trataron anteriormente en el caso de cambio conocido).

El primer modelo, modelo AO, se expresa, bajo la hipótesis nula y bajo la alternativa, como:

(2.2.2)

$$H_0: X_t = \delta \Delta d_{it} + X_{t-1} + \omega_t \quad t=2,\dots,T$$

$$H_1: X_t = c + \delta d_{it} + v_t$$

donde $d_{it}=1$ si $t > T_B$ y 0 en otro caso, siendo T_B el momento en el que se produce el cambio, $1 < T_B < T$, con T el tamaño muestral. El valor inicial X_1 es una constante fijada o bien una variable aleatoria; y la sucesión de errores $\{\omega_t\}$ sigue un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible de la forma: $\Phi(B)\omega_t = \Theta(B)e_t$ con $e_t \sim iid(0, \sigma^2)$, mientras que los errores $\{v_t\}$ corresponden a un proceso ARMA(p+1,q) estacionario e invertible: $\Phi(B)v_t = \Theta(B)c_t$.

El procedimiento de contraste no cambia con respecto al de Perron (1990), y está basado, como es habitual, en el estadístico t para $\rho=1$ en la regresión

$$(2.2.3) \quad \tilde{X}_t = \sum_{i=0}^k \omega_i \Delta d_{it} + \rho \tilde{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta \tilde{X}_{t-i} + e_t$$

$$t=k+2,\dots,T$$

donde $\tilde{X}_t$ son los residuos de la regresión de X_t sobre una constante y d_{it} .

La única diferencia radica en la inclusión de las variables ficticias Δd_{it} para $i=1,\dots,k$, que se necesita para derivar convenientemente la distribución límite del estadístico t ; el estadístico obtenido se denota por $t_p(AO, T_B, k)$.

La inclusión del cambio en las innovaciones supone manejar el modelo innovational outlier (IO) ; bajo las hipótesis nula y alternativa, toma la forma:

$$H_0: X_t = X_{t-1} + \Psi(B) (e_t + \theta \Delta d_{1t}) \quad t=2,\dots,T$$

(2.2.4)

$$H_1: X_t = a + \phi(B) (e_t + \delta d_{1t}) \quad t=2,\dots,T$$

con $\Psi(B) = \Phi'(B)^{-1}\Theta(B)$ y $\phi(B) = \Phi(B)^{-1}\Theta(B)$.

El estadístico a utilizar para este test es el denotado por $t_\rho(IO, T_B, k)$ que es el estadístico t para $\rho=1$ según la regresión:

$$(2.2.5) \quad X_t = \mu + \delta d_{1t} + \theta \Delta d_{1t} + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^k C_i \Delta X_{t-i} + e_t \quad t=k+2,\dots,T$$

En cualquiera de los dos casos el parámetro T_B debe ser estimado; tal como anunciamos antes se proponen dos alternativas:

$$\text{- elegir } T_B^* \text{ de forma que } t_\rho(i, T_B^*, k) = \inf_{T_B \in (k+2, T)} t_\rho(i, T_B, k) \quad (i=AO, IO)$$

según el procedimiento utilizado por Zivot-Andrews(1992).

$$\text{- escoger } T_B(\bar{\delta}) \text{ de forma que se minimice el estadístico t para}$$

contrastar $\delta=0$ en la regresión $X_t = \mu + \delta d_{1t} + \tilde{X}_t$, $t=1,\dots,T$, en el caso del modelo AO, o en la regresión (2.2.5) si se trabaja con el modelo IO.

En cualquiera de los modelos (AO ó IO) y para cualquier procedimiento de selección de T_B , hay que determinar el parámetro de truncamiento, k, de las regresiones (2.2.3) ó (2.2.5).

Los procedimientos de determinación que analizan Perron y Vogelsang (1992) son los siguientes:

- elegir k según la guía teórica que dan Said y Dickey (1984) en relación al tamaño muestral T. En la práctica supone simplemente elegir un valor de k independiente de los datos; un k de este tipo fijado a priori, se denota por

$\bar{k}$, y los estadísticos a los que da lugar por: $t_{\hat{\rho}}(i, j, \bar{k})$,
 $(i=AO, IO, j=T_B^*, T_B(\hat{\delta}))$.

- la segunda posibilidad es la utilizada por Perron (1989, 1990) basada en la significatividad de los coeficientes c_i de las regresiones (2.2.3) ó (2.2.5), utilizando para ello el estadístico t relativo a estos coeficientes (véase sección 2.1.B. del presente trabajo). El valor de k obtenido de esta forma se denota por $k(t)$. Esta idea se puede enfocar alternativamente analizando la significatividad conjunta de los coeficientes c_i , $i=1, \dots, k$; contrastada mediante el estadístico F usual. Partiendo de un valor máximo para k , k_{max} , este estadístico evalúa la significatividad de los coeficientes desde $i=1, \dots, k$ frente a la de los $k-1$ primeros, escogiendo el máximo k que "no es rechazado" por estos contrastes de significatividad, y que se representa por $k(F)$.

- Por último, se podría seleccionar k según el mismo criterio de selección de T_B de minimización del estadístico t ; si se representa este valor por k^* , el estadístico t asociado a $\hat{\rho}$ al que da lugar, vendrá dado por:

$$t_{\hat{\rho}}(i, j, k^*) = \inf_{k \in (0, k_{max})} t_{\hat{\rho}}(i, j, k) \quad (i=AO, IO; j= T_B^*, T_B(\hat{\delta}))$$

Sin embargo, esta opción es desechada por los autores, y no se recomienda porque da lugar a propiedades no deseables, como por ejemplo que el tamaño empírico del test correspondiente puede exceder notablemente el tamaño nominal en algunos modelos con raíz unitaria.

Perron y Vogelsang (1992) obtienen las distribuciones límite de estos estadísticos tipo t en determinados casos. Consideran en primer lugar el modelo más simple en el que los errores son iid; esto es, cuando bajo la hipótesis nula se verifica, tanto para el modelo AO como para el modelo IO, que el proceso generador de datos es:

$$(2.2.6) \quad X_t = \delta \Delta d_{1t} + X_{t-1} + e_t \quad t=2, \dots, T$$

donde $e_t \sim iid(0, \sigma^2)$ (en la regresión (2.2.2), $\Phi^*(B)=\Theta(B)=1$, y en el modelo (2.2.4), $\Psi(B)=1$). Los autores obtienen las distribuciones de los estadísticos t de

los modelos AO e IO, tomando $k=0$ y para las dos posibles elecciones de T_B : T_B^* y $T_B(\hat{\delta})$. Para $T_B = T_B^*$, las distribuciones límite de los estadísticos t AO e IO coinciden; ahora bien, esto no sucede cuando se estima T_B mediante el otro procedimiento, $T_B(\hat{\delta})$. Estas distribuciones límite siguen siendo válidas para un proceso AR(p), si se escoge un $k \geq p$, o si se estima k según los criterios de significatividad de los coeficientes de los retardos de las diferencias primeras de los datos. Sin embargo, para casos más generales de procesos ARMA(p,q) no se dispone de resultados asintóticos, y los autores se limitan a sugerir que la extensión de lo anterior se puede realizar considerando k en función del tamaño muestral según la aproximación de Said y Dickey (1984).

En cualquier caso, para los dos modelos posibles (AO e IO) y las dos formas de seleccionar el punto T_B , se dan los valores críticos en muestra finita y asintóticos, obtenidos por simulación, de los estadísticos $t_p(i,j,k)$ ($i=AO,IO$; $j= T_B^*, T_B(\hat{\delta})$) bajo la hipótesis nula de una raíz unitaria, utilizando las distintas elecciones del parámetro de truncamiento, k , descritas anteriormente. El P.G.D. que se utiliza para la derivación de estos valores es:

$$X_t = X_{t-1} + e_t \quad X_1 = 0$$

con innovaciones $\{e_t\} \sim \text{iid } N(0,1)$. Conviene destacar que este P.G.D. no contempla ningún cambio, por lo que los valores críticos de muestra finita sólo son válidos para esta situación; no es el caso de los valores asintóticos, ya que las distribuciones asintóticas no dependen del valor del parámetro δ de la ecuación (2.2.6). Estos valores están reproducidos en el cuadro IV, para el nivel de probabilidad del 5%.

Cuadro IV: Valores críticos asintóticos al 5% de los contrastes de Perron-Vogelsang(1992)

Modelo AO $T_B = T_B^*$	Modelo IO $T_B = T_B^*$	Modelo AO $T_B = T_B(\hat{\delta})$	Modelo IO $T_B = T_B(\hat{\delta})$
-4.44	-4.44	-3.61	-4.19

El análisis de la potencia y el tamaño de los tests que se derivan de los estadísticos anteriores es bastante complejo, ya que hay muchos aspectos que estudiar y diversas posibilidades a tener en cuenta: la generación del proceso se puede hacer de muchas formas, desde cualquier autorregresivo puro hasta modelos más generales ARMA; estos pueden incluir o no un cambio en la constante (δ puede ser 0 ó distinto de 0, e igualmente θ , según el caso), y las elecciones de los parámetros T_B y k se pueden realizar de distintas formas. Un amplio estudio de Monte Carlo dirigido hacia la investigación de estas cuestiones, se presenta también en Perron y Volgesang (1992), de cuyos resultados subrayaremos que el procedimiento de selección del parámetro k que parece ser más recomendable en la práctica, es el que se basa en los tests de significatividad de los coeficientes de las diferencias primeras retardadas, en particular el "individual", $k(t)$, que tienen la ventaja añadida de la facilidad de su implementación, ya que utiliza resultados que proporcionan habitualmente los programas informáticos de regresión usuales.

3.- PRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LOS CONTRASTES DE RAÍZ UNITARIA EN PRESENCIA DE CAMBIO ESTRUCTURAL.

En las páginas que siguen, ofrecemos cuadros resúmenes de los contrastes que hemos recogido en el presente trabajo, indicando en cada caso la expresión del estadístico, su distribución y las condiciones de su aplicación.

TABLA Nº1.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN EL NIVEL Y/O EN LA PENDIENTE, DEL TIPO AO, EN MOMENTO DEL TIEMPO CONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PERRON (1989) Modelo (A): Cambio en nivel $H_0: \Delta X_t = \mu + \Delta d_{it} + u_t$ $H_1: X_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)d_{it} + u_t$ con $d_{it} = 1$ si $t > T_B$ $= 0$ en otro caso Modelo (B): Cambio en la pendiente $H_0: \Delta X_t = \mu + (\mu_2 - \mu_1)d_{it} + u_t$ $H_1: X_t = \mu + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{it} + u_t$ Modelo (C): Cambio en el nivel y en la pendiente $H_0: \Delta X_t = \mu + (\mu_2 - \mu_1)d_{it} + \Delta d_{it} + u_t$ $H_1: X_t = \mu + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)d_{it} + (\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{it} + u_t$	u_t verifica las condiciones generales de Phillips (1987) y Perron (1988)	Estadístico MCO normalizado y estadístico tipo t usual para $\tilde{\rho}^i$ asociados a la regresión: $(1) \quad \tilde{X}_t^i = \tilde{\rho}^i \tilde{X}_{t-1}^i + \tilde{u}_t \quad (i=A, B, C, t=1, 2, \dots, T)$ donde $\tilde{X}_t^i$ para $i=A, B, C$ son los residuos de la regresión de X_t sobre : - una constante, el tiempo y d_{it} para el modelo (A) - una constante, el tiempo y $(t - T_B)d_{it}$ para el modelo (B), y - una constante, el tiempo, d_{it} y td_{it} para el modelo (C).	Las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula correspondiente están tabuladas en Perron (1989) para varios valores de λ, con $T_B = \lambda T$, y bajo la suposición de $u_t \sim iid$. Estos valores críticos se pueden utilizar para el contraste en el caso en que u_t cumpla condiciones más generales, calculando los estadísticos a partir de la regresión (1) aumentada con los retardos de $\Delta \tilde{X}_t^i$ o bien corrigiendo los estadísticos procedentes de la regresión (1) en la forma indicada por Perron.

TABLA N°2.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN LA MEDIA, DEL TIPO AO, EN MOMENTO DEL TIEMPO CONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PERRON (1990) $H_0: X_t = X_{t-1} + \gamma \Delta d_{1t} + u_t$ $H_1: X_t = \mu + \gamma d_{1t} + u_t$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_0$ $= 0$ en otro caso	$X_0 = X(0)$ es una constante fijada o una variable aleatoria. u_t verifica las condiciones generales de Phillips (1987) y Perron (1988)	Estadístico MCO normalizado y estadístico tipo t usual para $\tilde{\rho}$ asociados a la regresión : $(1) \quad \tilde{X}_t = \tilde{\rho} \tilde{X}_{t-1} + \tilde{u}_t \quad t=1,2,\dots,T$ donde $\tilde{X}_t$ son los residuos de la regresión de X_t sobre una constante y d_{1t}.	Las distribuciones asintóticas y en muestra finita bajo la hipótesis nula están tabuladas en Perron (1990) para varios valores de λ, con $T_0 = \lambda T$, y bajo la suposición de $u_t \sim iid$. Estos valores críticos se pueden utilizar para el contraste en el caso en que u_t cumpla condiciones más generales, calculando los estadísticos a partir de la regresión (1) aumentada con los retardos de $\Delta \tilde{X}_t$ o bien corrigiendo los estadísticos procedentes de la regresión (1) en la forma indicada por Perron.

TABLA N°3.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN LA MEDIA DEL TIPO IO, EN MOMENTO DEL TIEMPO CONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PERRON (1990) $H_0: X_t = X_{t-1} + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)(e_t + \gamma\Delta d_{1t})$ $H_1: X_t = \mu + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)(e_t + \gamma d_{1t})$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_B$ $= 0$ en otro caso	$\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ son polinomios en el operador de retardos B , de órdenes p y q respectivamente. $e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$.	Se considera el estadístico tipo t para $\rho = 1$ en la regresión : $(1) \quad X_t = \mu + \delta d_{1t} + \theta \Delta d_{1t} + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta X_{t-i} + e_t$ Si $\Theta(B) = 1$ se toma $k=p$, y en el caso general, k es función del tamaño muestral T , de forma que $k \rightarrow \infty$ y $k^3/T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$.	La distribución límite y en muestra finita bajo la nula, está tabulada en Perron (1990) para varios valores de λ , con $T_B = \lambda T$. Estos valores críticos coinciden con los correspondientes al cambio en tipo AO.

TABLA N°4.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN EL NIVEL Y/O EN LA PENDIENTE, DEL TIPO IO, EN MOMENTO EL TIEMPO CONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PERRON (1989) Modelo (A): Cambio en nivel $H_0: X_t = \mu + X_{t-1} + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)(\Delta d_{1t} + e_t)$ $H_1: X_t = \mu_1 + \beta t + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)((\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + e_t)$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_B$ $= 0$ en otro caso Modelo (B): Cambio en la pendiente $H_0: X_t = \mu_1 + X_{t-1} + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)e_t$ $H_1: X_t = \mu + \beta_1 t + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)((\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{1t} + e_t)$ Modelo (C): Cambio en el nivel y en la pendiente $H_0: X_t = \mu_1 + X_{t-1} + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)((\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + \Delta d_{1t} + e_t)$ $H_1: X_t = \mu_1 + \beta_1 t + \Phi(B)^{-1}\Theta(B)((\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + (\beta_2 - \beta_1)t d_{1t} + e_t)$	$e_t \sim iid(0, \sigma_e^2)$ $\Phi(B)$ y $\Theta(B)$ son polinomios en el operador de retardos que cumplen las condiciones de estacionariedad e invertibilidad.	Se considera el estadístico tipo t para $\hat{\rho}^i = 1$ $i=A, B, C$, en las regresiones: -para el modelo (A): $X_t = \hat{\mu}^A + \hat{\theta}^A d_{1t} + \hat{\beta}^A t + \hat{\gamma}^A \Delta d_{1t} + \hat{\rho}^A X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}^A \Delta X_{t-i} + \hat{e}_t$ -para el modelo (B): $X_t = \hat{\mu}^B + \hat{\beta}^B t + \hat{\gamma}^B (t - T_B) d_{1t} + \hat{\rho}^B X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}^B \Delta X_{t-i} + \hat{e}_t$ -para el modelo (C): $X_t = \hat{\mu}^C + \hat{\theta}^C d_{1t} + \hat{\beta}^C t + \hat{\gamma}^C t d_{1t} + \hat{\gamma}^C \Delta d_{1t} + \hat{\rho}^C X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \hat{c}^C \Delta X_{t-i} + \hat{e}_t$ El parámetro k se toma en función del tamaño muestral T, de forma que $k \rightarrow \infty$ y $k^3/T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$.	La distribución asintótica de estos estadísticos bajo la hipótesis nula, coincide con la de los correspondientes al modelo AO.

TABLA N°5.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN EL NIVEL Y/O EN LA PENDIENTE, EN MOMENTO DEL TIEMPO DESCONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
ZIVOT Y ANDREWS (1992) Modelo (A): Cambio en nivel $H_0: X_t = \mu + X_{t-1} + u_t$ $H_1: X_t = \mu_1 + \beta t + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + u_t$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_B$ $= 0$ en otro caso Modelo (B): Cambio en la pendiente $H_0: X_t = \mu + X_{t-1} + u_t$ $H_1: X_t = \mu + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{1t} + u_t$ Modelo (C): Cambio en el nivel y en la pendiente $H_0: X_t = \mu + X_{t-1} + u_t$ $H_1: X_t = \mu_1 + \beta_1 t + (\mu_2 - \mu_1)d_{1t} + (\beta_2 - \beta_1)(t - T_B)d_{1t} + u_t$	u_t verifica las condiciones generales de Phillips(1987) y Perron(1988),	$t_{\rho,i}(T_B^*) = \inf_{\lambda \in \Lambda} t_{\rho,i}(\lambda) \quad i=A,B,C$ siendo Λ un subconjunto cerrado de $(0,1)$ y $t_{\rho,i}(\lambda)$ el estadístico tipo t de Perron(1989) para el modelo i, tomando $T_B = \lambda T$.	Las distribuciones asintóticas bajo la hipótesis nula están tabuladas en Zivot-Andrews(1992), considerando u_t iid. Se puede hacer uso de estos valores críticos para u_t pertenecientes a la clase de los modelos ARMA(p,q), añadiendo como regresores en la regresión retardos de las primeras diferencias de la variable. Para u_t bajo condiciones más generales se puede utilizar la técnica anterior o bien corregir los estadísticos en la línea de Phillips(1987) y Phillips y Perron(1988)

TABLA N°6.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN LA MEDIA, DEL TIPO A0, EN MOMENTO DEL TIEMPO DESCONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADISTICO	DISTRIBUCION
PERRON Y VOGELSANG(1992) $H_0: X_t = X_{t-1} + \gamma \Delta d_{1t} + w_t$ $H_1: X_t = \mu + \gamma d_{1t} + v_t$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_0$ $= 0$ en otro caso	$X_0 = X(0)$ es una constante fijada o una variable aleatoria. w_t es un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible, v_t es un ARMA(p+1,q) estacionario e invertible.	Se consideran los estadísticos tipo t para $\rho = 1$ en la regresión : $\bar{X}_t = \sum_{i=0}^k w \Delta d_{1,t-i} + \rho \bar{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^k c \Delta \bar{X}_{t-i} + e_t$ $t = k+2, \dots, T$ donde $\bar{X}_t$ son los residuos de una regresión de X_t sobre una constante y d_{1t} . Para T_0 y k dados estos estadísticos se denotan por $t_p(AQ, T_B, k)$ El parámetro k es un parámetro de truncamiento que se elige de la forma siguiente: $k=0$ si w_t son iid $k \geq p$ si w_t es AR(p) k es función del tamaño muestral T , de forma que $k \rightarrow \infty$ y $k^3/T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$, cuando w_t es un ARMA(p,q). Los dos estadísticos propuestos son: $t_p(AQ, T_B^*, k) = \inf_{T_B \in (k+2, T)} t_p(AQ, T_B, k)$ $t_p(AQ, T_B(\delta), k)$ donde $T_B(\delta)$ se elige de forma que se minimice el estadístico tipo t para $\delta=0$ en la regresión $X_t = \mu + \delta d_{1t} + \bar{X}_t \quad t=1, 2, \dots, T$	En Perron y Vogelsang (1992) están tabuladas las distribuciones asintóticas y en muestra finita de los dos estadísticos, para distintas elecciones de k , tomando como hipótesis nula : $X_t = X_{t-1} + e_t$ con $X_1 = 0$ y $e_t \sim \text{Niid}(0,1)$.

TABLA N°7.- TESTS DE RAIZ UNITARIA CON CAMBIO EN LA MEDIA DEL TIPO IO, EN MOMENTO DEL TIEMPO DESCONOCIDO.

MODELO	CONDICIONES	ESTADÍSTICO	DISTRIBUCION
PERRON Y VOGELSANG (1992) $H_0: X_t = X_{t-1} + \psi(B)(e_t + \theta \Delta d_{1t})$ $H_1: X_t = \mu + \phi(B)(e_t + \delta d_{1t})$ con $d_{1t} = 1$ si $t > T_0$ $= 0$ en otro caso	$X_0 = X(0)$ es una constante fijada o una variable aleatoria. $\psi(B) = \Phi'(B)^{-1} \Theta(B)$ y $\phi(B) = \Phi(B)^{-1} \Theta(B)$ donde $\Phi'(B)$ y $\Phi(B)$ son polinomios en B de órdenes p y $p+1$ respectivamente y $\Theta(B)$ es un polinomio en B de orden q . $e_t \sim \text{iid}$.	Se consideran los estadísticos tipo t para $p=1$ en la regresión : (1) $X_t = \mu + \delta d_{1t} + \theta \Delta d_{1t} + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^k c_i \Delta X_{t-i} + e_t$ Para T_0 y k dados estos estadísticos se denotan por $t_{\hat{\rho}}(IO, T_B, k)$ El parámetro k es un parámetro de truncamiento que se elige de la forma siguiente: $k=0$ si w_t son iid $k \geq p$ si w_t es $\text{AR}(p)$ k es función del tamaño muestral T , de forma que $k \rightarrow \infty$ y $k^3/T \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$, cuando w_t es un $\text{ARMA}(p, q)$. Los dos estadísticos propuestos son: $t_{\hat{\rho}}(IO, T_B^*, k) = \inf_{T_B \in (k+2, T)} t_{\hat{\rho}}(IO, T_B, k) \text{ y}$ $t_{\hat{\rho}}(IO, T_B(\hat{\delta}), k) \text{ donde } T_B(\hat{\delta}) \text{ se elige de forma que se minimice el estadístico tipo } t \text{ para } \delta=0 \text{ en la regresión (1).}$	En Perron y Vogelsang (1992) están tabuladas las distribuciones asintóticas y en muestra finita de los dos estadísticos, para distintas elecciones de k , tomando como hipótesis nula : $X_t = X_{t-1} + e_t$ con $X_1 = 0$ y $e_t \sim \text{Niid}(0,1)$.

BIBLIOGRAFÍA

- Andrés, J., Escribano, A., Molinas, C., Taguas, D. (1990): La inversión en España, econometría con restricciones de equilibrio, Instituto de Estudios Fiscales, A.Bosch, Madrid.
- Balke, N.S. y Fomby, T.B. (1991): "Infrequent Permanent Shocks and the Finite-Sample Performance of Unit Root Tests". Economics Letters, 36, págs. 269-273.
- Banerjee, A., Lumsdaine, R.L. y Stock, J.H. (1992): "Recursive and Sequential Tests of the Unit-Root and Trend-Break Hypotheses: Theory and International Evidence". Journal of Business and Economic Statistics, 10, págs. 271-287.
- Box, G.E.P. y Tiao, G.C. (1975): "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems". Journal of the American Statistical Association, 70, págs. 70-79.
- Christiano, L.J. (1992): "Searching for a Break in GNP". Journal of Business and Economic Statistics, 10, págs. 237-250.
- Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1979): "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root". Journal of the American Statistical Association, 74, págs. 427-431.
- Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1981): "Likelihood Ratio Statistics Autoregressive Time Series with a Unit Root". Econometrica, 49, págs. 1057-1072.
- Hackl, P. y Westlund, A.H. (1991): *Economic Structural Change*. Ed. Springer-Verlag. Berlín.
- Hannan, E.J.; Krishnaiah, P.R. y Rao, M.M. (1985): *Handbook of Statistics*. Vol.5. Time Series in the Time Domain. Ed. North-Holland. Amsterdam.
- Hendry, D.F. y Neale, A.J. (1991): "A Monte Carlo Study of Effects of Structural Breaks on Tests for Unit Roots". Artículo incluido en libro *Economic Structural Change* editado por Hackl, P. y Westlund, A.H. Ed. Springer-Verlag, Berlín.

- Molinas, C., Ballabriga, C., Canadell, E., Escribano, A., Lopez, E., Manzanedo, L., Mestre, R., Sebastián, M., Taguas, D. (1990) MOISEES: un modelo de investigación y simulación de la economía española, ed. Antoni Bosch.
- Perron, P. (1989): "The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis". Econometrica, 57, págs. 1361-1401.
- Perron, P. (1990): "Testing for a Unit Root in a Time Series with a Changing Mean". Journal of Business and Economic Statistics, 8, págs. 153-162.
- Perron, P. y Vogelsang, T.J. (1992): "Nonstationarity and Level Shifts with an Application to Purchasing Power Parity". Journal of Business and Economic Statistics, 10, págs. 301-320.
- Phillips, P.C.B. (1987): "Time Series Regression with a Unit Root". Econometrica, 55, págs. 277-301.
- Phillips, P.C.B. y Perron, P. (1988): "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". Biometrika, 75, págs. 335-346.
- Rappoport, P. y Reichlin, L. (1989): "Segmented Trends and Non-Stationary Time Series". The Economic Journal, 99, Conference Supplement, págs. 168-177.
- Said, E.S. y Dickey, D.A. (1984): "Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order". Biometrika, 71, págs. 599-607.
- Sánchez de la Vega, M.M.(1993): "Raíces Unitarias y Cambio Estructural en Series Temporales: un Estudio de Monte Carlo". Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.
- Serletis, A.(1992): "The Random Walk in Canadian Output". Canadian Journal of Economics, 25, págs. 392-406.
- Tiao, G.C. (1985): "Autoregressive Moving Average Models, Intervention Problems and Outlier Detection in Time Series". Artículo incluido en el libro Handbook of Statistics, Vol. 5, editado por Hannan, E.J.; Krishnaiah, P.R. y Rao, M.M.. Ed. North-Holland. Amsterdam.

-
- Tsay, R.S. (1986): "*Time Series Model Specification in the Presence of Outliers*". Journal of the American Statistical Association, 81, págs. 132-141.
 - Zivot, E. y Andrews, D.W.K. (1992): "*Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unit-Root Hypothesis*". Journal of Bussiness and Economic Statistics, 10, págs. 251-270.