

POLÍTICA PERIÓDICA EN UN MODELO PUBLICITARIO DE CONTROL ÓPTIMO, CON DOS VARIABLES DE ESTADO Y COSTES DE AJUSTE

Ramón Fernández Lechón
María Dolores Soto Torres

*Catedráticos de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid*

RESUMEN

Bajo condiciones muy generales, la trayectoria óptima de problemas de control autónomos y con una única variable de estado son monótonas. Este trabajo trata de encontrar una solución óptima periódica en problemas de control; para ello, se plantea un modelo en publicidad basado en el de Vidale-Wolfe, pero con dos variables de estado.

Se encuentran tres soluciones óptimas, dependiendo de los valores de los parámetros, que a su vez pueden ser monótonas o periódicas. Establecemos las condiciones que las caracterizan y construimos numéricamente una trayectoria periódica en uno de los casos.

ABSTRACT

Under very general conditions, the optimal solution of an autonomous control problem with one state variable is monotonous. This paper proposes a control problem in advertising where the optimal trajectory is periodical. The model is based from Vidale-Wolfe, but it contains two state variables.

In this model, three optimal solutions are found depend on the parameter values. In all cases, the optimal path can be monotonous or periodical. We derived conditions to determined when this one or the other one are optimals. A periodical trajectory is built numerically for a particular case.

1.- INTRODUCCIÓN.

El comportamiento monótono o no, de la solución óptima de un problema de control óptimo, autónomo, con una única variable de estado y horizonte temporal infinito, ha sido analizado por diferentes autores. Uno de los primeros resultados se deben a Kamien y Schwartz (1.981) que establecieron condiciones suficientes para que el comportamiento óptimo de la variable de estado sea monótono bajo determinadas condiciones de diferenciabilidad de las funciones que intervienen en el modelo y de concavidad estricta del hamiltoniano respecto a la variable de control. Más recientemente Hartl (1.987) prueba bajo qué condiciones la solución óptima es única y demuestra que la unicidad es una condición suficiente para garantizar el carácter monótono de la solución óptima (los controles pueden presentar un comportamiento no monótono). Por tanto, una posibilidad para

encontrar trayectorias óptimas cíclicas es plantear modelos con una única variable de estado que rompan las hipótesis formuladas por estos autores; en este sentido Grandmont (1.985) sugiere: "Un interesante estudio puede ser... descubrir ... mecanismos, por ejemplo, asociados con hechos particulares de la producción tecnológica, que admitan suficientes no linealidades para generar ciclos de gestión endógenos", o bien, plantear modelos con más de una variable de estado. Estos últimos modelos llevan implícito el problema de la dimensión del sistema dinámico que surge al aplicar las condiciones necesarias del Principio del Máximo y la complicación que ello entraña, en este sentido Mizrach (1.992 pág. 187) afirma: "La dimensión es una medida de la complejidad".

En efecto, al aplicar el Principio del Máximo, y debido a las ecuaciones diferenciales que tienen que verificar las variables de coestado asociadas a las variables de estado, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de doble dimensión que el número de variables de estado, con lo que el sistema tendría como mínimo cuatro, seis, ocho, etc. ecuaciones diferenciales y el estudio de su dinámica es previsible que se complique en exceso.

Aunque existen autores que estudian aspectos de sistemas dinámicos de dimensión superior a dos, entre los que podemos citar a Brock y Scheinkman (1.976), Cass y Shell (1.976) que establecieron condiciones suficientes globales para que el correspondiente estado de equilibrio sea punto de silla o Dockner (1.985), Medio (1.987) y Soto Torres y Fernández Lechón (1.988) que establecen condiciones locales necesarias y suficientes; sin embargo, para el análisis de soluciones óptimas cíclicas la tendencia es analizar la existencia de bifurcación de Hopf o bien, plantear modelos que dadas sus características peculiares originen estos comportamientos.

Desde esta última perspectiva, planteamos un modelo de publicidad y su estudio le hemos dividido en cinco apartados; en el segundo planteamos el modelo objeto de estudio como un problema de control óptimo y, en el apartado siguiente, teniendo en cuenta las condiciones necesarias del Principio del Máximo determinamos las distintas políticas admisibles, que serán válidas para determinados valores de los parámetros. Una vez conocidas las políticas admisibles demostramos, dependiendo de la relación existente entre los parámetros del modelo, que las trayectorias óptimas terminales pueden ser de dos tipos, monótona o cíclica y, bajo determinados supuestos, comprobamos que es mejor una que otra. Finalizamos este apartado con la resolución numérica del modelo para unos valores particulares de los parámetros y construimos la trayectoria cíclica como composición de trayectorias admisibles.

2.- FORMULACIÓN DEL MODELO.

El modelo que desarrollamos toma como base la formulación dada por Shethi del modelo de publicidad de Vidale -Wolfe (Kamien y Schwartz (1.981 pág. 196)) donde considerando hipótesis adicionales le transformamos en un modelo de Control Óptimo con dos variables de estado.

Supongamos, al igual que Shethi que, en cualquier instante de tiempo, la variación de los clientes es proporcional a la eficacia de la publicidad que actúa sobre la parte de mercado que desconoce el producto menos el número de clientes que se pierden con el tiempo debido al olvido, y que actúa sobre la parte del mercado que conoce el producto; entonces, si denotamos por $x(t)$ la cuota de mercado, por $u(t)$ la publicidad, por a el tanto de eficacia de la publicidad en las ventas y por b el tanto de pérdida de ventas debido al olvido, la ecuación que rige la variación de la cuota de mercado vendrá dada por:

$$\dot{x}(t) = au(1-x(t)) - bx(t)$$

Además, suponemos que podemos recoger la variación de la publicidad mediante una variable continua $v(t)$; tendremos entonces $\dot{u}(t) = v(t)$, esta nueva variable, que puede tomar valores positivos, negativos o nulos dependiendo de si la publicidad crece, decrece o permanece constante, nos permite, por decirlo de algún modo, que el modelo tenga un comportamiento más suave.

El beneficio total de las ventas de la empresa por unidad de tiempo, excluyendo costes de publicidad, se supone que es constante y lo denotamos por P ; la variación de la publicidad la penalizamos con unos costes $h(v)$ que tomaremos cuadráticos, en aras de una mayor operatividad, $h(v) = \frac{1}{2} v^2$. Consideraciones análogas pueden encontrarse en los trabajos de Feichtinger y Sorger (1.988) y Neck y Dockner (1.988).

Supondremos que la empresa tiene una restricción publicitaria de cuantía $\bar{u}$ y que la publicidad en el instante inicial es conocida $u(0) = u_0$. Por otro lado, y en relación con la cuota de mercado, consideramos que se encuentra acotada entre dos valores fijos x_1 y x_2 comprendidos estrictamente entre cero y uno, lo que puede justificarse por las propias características del proceso productivo o bien por razones de competitividad.

Desde la ecuación que determina la variación de la cuota de mercado, se obtiene sin dificultad que dicha cuota tiende a $\frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b}$ si se utiliza la publicidad máxima, por ello supondremos que la cuota inicial de mercado x_0 , que es conocida, está comprendida entre x_1 y x_2 con $x_2 < \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b}$.

Entonces, de acuerdo con las condiciones establecidas, la empresa tratará de maximizar el valor actual de sus beneficios sobre un período temporal infinito y el modelo quedará planteado del siguiente modo:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} [Px(t) - u(t) - \frac{1}{2}v^2(t)] dt,$$

sujeta a:

$$\dot{x}(t) = au(t)(1 - x(t)) - bx(t),$$

$$\dot{u}(t) = v(t),$$

$$0 < x_1 \leq x(t) \leq x_2 < \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b},$$

$$0 \leq u(t) \leq \bar{u},$$

$$x(0) = x_0 \in [x_1, x_2],$$

$$u(0) = u_0,$$

donde r es el tanto instantáneo de actualización.

Por tanto, tenemos planteado un modelo de control óptimo autónomo, de horizonte infinito, con dos variables de estado $x(t)$ y $u(t)$ y una variable de control $v(t)$. Para resolverle analizamos, utilizando las condiciones necesarias del Principio del Máximo, las distintas políticas admisibles y una vez conocidas dichas políticas determinaremos las trayectorias terminales óptimas.

3.- POLÍTICAS ADMISIBLES.

La resolución del modelo, aplicando las condiciones necesarias del Principio del Máximo, requiere plantear, en primer lugar, el hamiltoniano:

$$H(x, u, v, \psi_1, \psi_2) = Px - u - \frac{1}{2}v^2 + \psi_1(au(1-x) - bx) + \psi_2v,$$

y la lagrangiana:

$$\mathcal{L}(x, u, v, \psi_1, \psi_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = H + \lambda_1(\bar{u} - u) + \lambda_2 u + \mu_1(x_2 - x) + \mu_2(x - x_1),$$

donde ψ_1 y ψ_2 son las variables de coestado asociadas respectivamente a la cuota de mercado y a la publicidad y $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ son los multiplicadores asociados a las restricciones puras de las variables de estado.

La aplicación de las condiciones necesarias nos determina el siguiente sistema:

$$\psi_2 = v$$

$$\psi_1 = (au + b + r) \psi_1 - P + \mu_1 - \mu_2,$$

$$\psi_2 = r\psi_2 - a(1-x)\psi_1 + 1 + \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$\dot{x} = au(1-x) - bx,$$

$$\dot{u} = v,$$

$$\lambda_1(\bar{u} - u) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0,$$

$$\lambda_2 u = 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

$$\mu_1(x_2 - x) = 0, \quad \mu_1 \geq 0,$$

$$\mu_2(x - x_1) = 0, \quad \mu_2 \geq 0,$$

Puesto que en el modelo existen restricciones puras en las variables de estado, las variables de coestado asociadas a ellas pueden presentar discontinuidades; aunque se garantiza la continuidad del hamiltoniano (Kamien y Schwartz (1981 pág. 220)).

Teniendo en cuenta el sistema de ecuaciones que obtuvimos al aplicar las condiciones necesarias del Principio del Máximo, para las condiciones suficientes puede seguirse el Teorema 11 de Seierstad y Sydsaeter (1.993 pág. 385), obtenemos que las políticas admisibles del modelo son:

Política 1 $x = x_1$.

Si $x = x_1 \Rightarrow \mu_1 = 0$ y $\dot{x} = 0$, entonces $au(1 - x_1) = bx_1$ luego el nivel de publicidad será $u = \frac{bx_1}{a(1-x_1)} = u_1$, pero u_1 tiene que ser admisible, esto es, $0 \leq u_1 \leq \bar{u}$. Ahora bien, $u_1 > 0$ por definición, luego hemos de comprobar que se verifica el lado derecho de la desigualdad; en efecto, puesto que $x_1 < \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b}$ tenemos $bx_1 < b \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b}$, ya que b es positivo, además

$$a(1-x_1) > a \left(1 - \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b} \right) = a \frac{b}{a\bar{u}+b}$$

luego

$$\frac{bx_1}{a(1-x_1)} < \frac{\frac{ba\bar{u}}{a\bar{u}+b}}{a(1-x_1)} < \frac{\frac{ba\bar{u}}{a\bar{u}+b}}{\frac{ba}{a\bar{u}+b}} = \bar{u}$$

Por tanto, con esta política $u_1 \in (0, \bar{u}) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \dot{u} = 0$ y $\psi_2 = 0 = v$, entonces se tiene:

$$\psi_1 = \frac{1}{a(1-x_1)}$$

y $\psi_1 = 0$ con lo que sustituyendo en su correspondiente ecuación diferencial tenemos:

$$\mu_2 = (au_1 + b + r) \psi_1 - P \geq 0.$$

Sustituyendo u_1 y ψ_1 por sus valores calculados antes obtenemos:

$$Pa(1 - x_1)^2 - r(1 - x_1) - b \leq 0,$$

esto es:

$$\left(1 - x_1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}\right) \left(1 - x_1 - \frac{r - \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}\right) \leq 0,$$

por tanto, ambos factores han de tener signos opuestos; ahora bien, el segundo factor es siempre mayor que cero, pues si no lo fuera tendríamos que:

$$1 - x_1 \leq \frac{r - \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} < 0,$$

lo cual es absurdo ya que $1 - x_1 > 0$.

Entonces, en esta política se ha de verificar que:

$$1 - x_1 \leq \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} \Rightarrow x_1 \geq 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}.$$

Luego, podemos concluir que para que esta política sea admisible se debe verificar:

$$1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} \leq x_1 < x_2 < \frac{a\bar{u}}{a\bar{u} + b}. \quad (1)$$

Política 2 $x = x_2$

Si $x = x_2 \Rightarrow \mu_2 = 0$ y $\dot{x} = 0$ con lo que $au(1 - x_2) = bx_2$ y entonces $u = \frac{bx_2}{a(1 - x_2)} = u_2$; pero u_2 , razonando como en el caso anterior, es siempre admisible y tal que $u_2 \in (0, \bar{u})$, con lo que, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

En este caso tenemos que:

$$\psi_1 = \frac{1}{a(1-x_2)}$$

y, desde la ecuación diferencial de dicha variable de coestado se tiene:

$$\mu_1 = P - (au_2 + b + r) \psi \geq 0.$$

Sustituyendo u_2 y ψ_1 por sus valores tenemos:

$$\left(1 - x_2 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}\right) \left(1 - x_2 - \frac{r - \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}\right) \geq 0.$$

Al igual que en el caso anterior, el segundo factor es siempre positivo, por tanto, para que se verifique la desigualdad se tendrá que satisfacer:

$$1 - x_2 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}.$$

Entonces, la condición para que esta política sea admisible será:

$$0 < x_1 < x_2 \leq 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}. \quad (2)$$

Política 3 $x \in (x_1, x_2)$, $u = \bar{u}$.

De las condiciones necesarias se tiene que $\lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, y como $\dot{u} = 0$, tenemos $v = 0$, por tanto, la variable de coestado $\psi_2 = 0$, luego se verificará:

$$-a(1-x)\psi_1 + 1 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow a\psi_1(1-x) \geq 1. \quad (3)$$

Las ecuaciones diferenciales que satisfacen la cuota de mercado y el pseudo-precio de la cuota de mercado son:

$$\dot{x} = a\bar{u}(1-x) - bx,$$

$$\dot{\psi}_1 = (a\bar{u} + b + r)\psi_1 - P,$$

cuyas soluciones serán:

$$x(t) = \left(x(z) - \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b} \right) e^{-(a\bar{u}+b)(t-z)} + \frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b} \quad z \leq t,$$

$$\psi_1(t) = \left(\psi_1(z) - \frac{P}{a\bar{u}+b+r} \right) e^{(a\bar{u}+b+r)(t-z)} + \frac{P}{a\bar{u}+b+r} \quad z \leq t,$$

donde z es el momento a partir del cual comienza a aplicarse esta política. El comportamiento de la cuota de mercado, en esta política, es creciente asintótico hacia $\frac{a\bar{u}}{a\bar{u}+b}$.

Notemos que esta política no puede aplicarse más que en intervalos de longitud finita, pues si se aplica durante un tiempo infinito, al ser la cuota de mercado creciente, llegaría un momento en el que se perdería la admisibilidad, dadas las condiciones exigidas a las cuotas de mercado x_1 y x_2 .

Política 4 $x \in (x_1, x_2), \quad u = 0.$

Bajo estas hipótesis, las condiciones necesarias nos determinan $\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\bar{u} = 0 = v$, luego $\psi_2 = 0$, por lo que se verifica:

$$-a(1-x)\psi_1 + 1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow a\psi_1(1-x) \leq 1. \quad (4)$$

Las ecuaciones diferenciales que satisfacen x y ψ_1 son:

$$\dot{x} = -bx,$$

$$\dot{\psi}_1 = (r+b)\psi_1 - P,$$

de donde resolviéndolas obtenemos:

$$x(t) = x(z) e^{-b(t-z)} \quad z \leq t,$$

$$\psi_1(t) = \left(\psi_1(z) - \frac{P}{r+b} \right) e^{(r+b)(t-z)} + \frac{P}{r+b} \quad z \leq t.$$

donde z tiene el mismo significado que en la política anterior. Ahora la cuota de mercado es decreciente, tendiendo asintóticamente hacia cero.

Esta política tampoco puede ser terminal, ya que, se perdería la admisibilidad de la variable $x(t)$ que está acotada inferiormente por $x_i > 0$. Así pues, solamente se puede aplicar esta política en intervalos de longitud finita.

Política 5 $x \in (x_1, x_2), \quad u \in (0, \bar{u})$.

Ahora, todos los multiplicadores son nulos y las condiciones necesarias del Principio del Máximo nos determinan el sistema dinámico:

$$\dot{\psi}_1 = (au + b + r)\psi_1 - P,$$

$$\dot{\psi}_2 = r\psi_2 - a(1-x)\psi_1 + I,$$

$$\dot{x} = au(1-x) - bx,$$

$$\dot{u} = \psi_2.$$

Para analizar la dinámica de este sistema, nos planteamos, en primer lugar, calcular sus posibles estados de equilibrio con lo que, a partir del análisis de su estabilidad, es de esperar que podamos caracterizar las trayectorias admisibles.

Los estados de equilibrio del sistema dinámico que define esta política, se obtienen al resolver el sistema:

$$\psi_2 = 0,$$

$$\psi_1(au + b + r) = P,$$

$$\psi_1 a(1-x) = I,$$

$$au(1-x) - bx = 0,$$

luego, despejando se tiene:

$$\psi_1 = \frac{P}{au+b+r}, \quad \psi_2 = 0, \quad x = \frac{au}{au+b}$$

y el valor de u^* de la publicidad de equilibrio ha de verificar:

$$1 = \frac{Pab}{(au+b+r)(au+b)},$$

o equivalentemente, ha de ser solución de la ecuación:

$$a^2 u^2 + (ra + 2ab) u - (Pab - b(r + b)) = 0,$$

y puesto que u ha de ser positiva, existe un único valor que la satisface

$$u^* = \frac{-(r+2b) + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2a},$$

Por tanto, existe un único estado de equilibrio. Para determinar el resto de los valores de sus componentes sustituimos, el valor de u^* encontrado, en la expresión de la cuota de mercado de equilibrio y tenemos:

$$x^* = 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP},$$

que para que sea admisible ha de verificar:

$$x_1 < 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} < x_2. \quad (5)$$

La publicidad de equilibrio ha de ser admisible, esto es, se tendrá que verificar $0 < u^* < \bar{u}$, pero puesto que u^* toma el valor:

$$u^* = \frac{-(r+2b) + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2a} = \frac{bx^*}{a(1-x^*)}$$

y x^* ha de verificar la relación (5) para que sea admisible, $x_1 < x^* < x_2$, tenemos:

$$u_1 = \frac{bx_1}{a(1-x_1)} < \frac{bx^*}{a(1-x^*)} < \frac{bx_2}{a(1-x_2)} = u_2,$$

pero ya hemos demostrado que $u_1 > 0$ y $u_2 < \bar{u}$, por tanto u^* es admisible.

Luego, si se verifica la relación (5) existe estado de equilibrio y los pseudo-precios de mercado y publicidad de equilibrio son:

$$\psi_1^* = \frac{P}{au^* + b + r}, \quad \psi_2^* = 0.$$

Ahora bien, si se dan las condiciones para que exista estado de equilibrio, este sería un punto de silla (Fernández Lechón (1.992 págs. 71-72), en este trabajo se considera un modelo con un planteamiento similar pero con costes de publicidad recogidos mediante una función de clase C^r , con $r > 1$ y se demuestra que si la derivada segunda de la función de costes, en el estado de equilibrio, es no negativa, entonces el estado de equilibrio es un punto de silla) independientemente de los valores que tomen los parámetros del modelo y tendremos garantizado, por el teorema de la variedad estable, la existencia de dos variedades locales, una estable y otra inestable, tangentes en el estado de equilibrio a los subespacios lineales, estable e inestable.

Este resultado nos permite caracterizar las trayectorias en un entorno del estado de equilibrio, siendo la variedad estable la única que tiende a él. Por tanto, si partimos de unas condiciones iniciales que se encuentren sobre la variedad estable la tendencia es permanecer en ella acercándose al estado de equilibrio, mientras que en cualquier otro caso nos alejaremos de él. Este alejamiento, en un intervalo de amplitud infinita, nos llevaría a la pérdida de admisibilidad de las trayectorias ya que tanto la cuota de mercado como la publicidad deben de estar acotadas y no pueden existir órbitas cerradas, dentro de la zona de admisibilidad, que satisfagan el sistema de ecuaciones diferenciales.

En efecto, la no existencia de órbitas cerradas dentro de la zona de admisibilidad se debe a que en el caso de existir tendría que ocurrir (Guckenheimer y Holmes (1.983 pág. 51)) que en su interior existiese al menos un punto fijo, si éste es único debe ser un sumidero o una fuente y si existiesen más de uno, todos ellos hiperbólicos, debe haber $2n+1$, de los cuales n son puntos de silla y $n+1$ son sumideros o fuentes; ahora bien, como en nuestro caso sólo existe un estado de equilibrio y es un punto de silla, tenemos garantizada la no existencia de órbitas cerradas.

Así pues, tanto si se dan las condiciones para que exista estado de equilibrio o no, esta política no puede aplicarse en un período terminal a menos que, existiendo estado de equilibrio, se parta de unas condiciones iniciales que estén sobre la variedad estable, en cuyo caso se alcanzaría el estado de equilibrio y nos mantendríamos en él. Luego, salvo condiciones muy específicas (existencia de

estado de equilibrio y condiciones iniciales sobre la variedad estable), esta política sólo podrá aplicarse en intervalos de longitud finita.

Una vez analizadas las políticas admisibles, en la sección siguiente trataremos de ver que salvo en un período de tiempo inicial finito, la solución óptima o es monótona o es periódica, siendo mejor la periódica bajo determinados supuestos.

4.- SOLUCIÓN TERMINAL ÓPTIMA.

Conocidas las políticas admisibles determinemos las candidatas para la solución óptima terminal, excepto para un intervalo de tiempo finito.

A tenor de los resultados obtenidos en la sección anterior, sabemos que se nos pueden presentar distintos casos según la relación que exista entre los parámetros del modelo. Así, tendremos distintos resultados según que la expresión

$1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP}$ sea menor o igual que x_1 , pertenezca al intervalo (x_1, x_2) o bien sea mayor o igual que x_2 .

A)

Supongamos, en primer lugar, que los parámetros del modelo verifican la relación:

$$1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} \leq x_1. \quad (6)$$

En este caso existen dos posibilidades para la solución óptima terminal que serán:

- Política terminal monótona, que equivaldría a que la cuota de mercado $x(t) = x_1$ se alcance en un instante τ y entonces la política 1 prevalezca en el intervalo $[\tau, \infty)$.
- Política terminal periódica, que supone la existencia de dos instantes finitos τ y θ tal que $x(\tau) = x_1$, $u(\tau) = u_1$ y la solución sea periódica en $[\tau, \infty)$ de período θ es decir $x(\tau + n\theta) = x_1$, $u(\tau + n\theta) = u_1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ y $x(t) = x(\tau + n\theta) \in (x_1, x_2)$ $t \in (\tau + n\theta, \tau + (n+1)\theta)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

En efecto, puesto que se verifica la relación (6) es imposible, según hemos visto al analizar las distintas políticas admisibles, que se mantenga $x(t) \in (x_1, x_2)$ en intervalos de longitud infinita. Entonces, ha de existir un instante $t = \tau$ para el cual $x(\tau) = x_1$, y por tanto podría mantenerse la política 1 en el intervalo $[\tau, \infty)$. Supongamos, ahora, que la política 1 no se mantiene en $[\tau, \infty)$, entonces debe de aplicarse una política en la que crezca la cuota de mercado, en este caso la política 5, y por tanto, $x(t)$ tiene un mínimo en $t = \tau$ luego $\dot{x}(\tau) = 0$. Aquí tenemos que la publicidad en el instante τ es $u(\tau) = u_1 = \frac{bx_1}{a(1-x_1)}$.

Ahora bien, puesto que $x(t) \in (x_1, x_2)$ es imposible en $[\tau, \infty)$ ha de existir un $\theta > 0$ tal que $x(\tau + \theta) = x_1$ donde de nuevo se alcanza el mínimo y como antes $\dot{x}(\tau + \theta) = 0$ de donde $u(\tau + \theta) = u_1$. Entonces tenemos que las variables de estado toman los mismos valores en tiempos equidistantes y tendríamos garantizada la existencia de una trayectoria periódica.

Una vez que tenemos garantizada la existencia de una trayectoria periódica terminal, hemos de ver si bajo determinadas condiciones podemos asegurar que la trayectoria periódica es mejor que la monótona.

Para demostrar este hecho, vamos a comparar los valores del funcional objetivo con una y otra política.

Entonces, siguiendo a Feichtinger y Sorger (1.988 pág. 130), tenemos que para problemas de control óptimo autónomos, se tiene, que si $e^{-\rho t} H$ tiende a cero cuando t tiende a infinito, se verifica:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho t} F(x, u, v) dt = \frac{1}{\rho} e^{-\rho \tau} H(x(\tau), u(\tau), v(\tau), \psi_1(\tau), \psi_2(\tau)). \quad (7)$$

Este resultado puede aplicarse en nuestro caso pues sabemos que cualquier función periódica que es continua o que tiene un número finito de saltos de amplitud finita por período está acotada. Por tanto, el hamiltoniano correspondiente a la solución periódica está acotado y tendremos que $e^{-\rho t} H$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito.

Con respecto a la solución monótona descrita por la política 1, también la expresión $e^{-\rho t} H$ tiende a 0 ya que:

$$e^{-\rho t} H = e^{-\rho t} [Px_1 - u_1 + \psi_1(au_1(1-x_1) - bx_1)] = e^{-\rho t} [Px_1 - u_1],$$

luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\pi(Px_1 - u_1)} = 0$$

y entonces también se verificará (7).

Podemos, por tanto, comparar los valores de los funcionales objetivos y puesto que:

$$x(\tau) = x_1, \quad u(\tau) = u_1,$$

tendremos que para la solución monótona se verificará:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\pi} F(x, u, v) dt = \frac{1}{r} e^{-\pi} (Px_1 - u_1),$$

y para la periódica

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\pi} F(x, u, v) dt = \frac{1}{r} e^{-\pi} (Px_1 - u_1 + \frac{1}{2} \psi_2^2(\tau)).$$

Luego, la solución periódica es al menos tan buena como la monótona y es precisamente la óptima si y sólo si $\psi_2(\tau)$ es distinta de cero.

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que sea mejor la periódica terminal que la monótona es que $\psi_2(\tau)$ sea distinta de cero.

B)

Supongamos en este caso que los parámetros del modelo satisfacen la relación:

$$x_2 \leq 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP},$$

el razonamiento sería idéntico al del caso anterior; sin embargo hemos de notar que ahora la solución monótona vendría dada por la política 2 y en el instante $t = \tau$ se tendría $x(\tau) = x_2$; ahora la cuota de mercado tiene un máximo en τ y como x

$(t) \in (x_1, x_2)$ no puede mantenerse, existirá un θ tal que $x(\tau) = x(\tau + \theta) = x_2$ y $u(\tau) = u(\tau + \theta) = u_2$. Los resultados que se obtendrían para los valores de los funcionales objetivos con una y otra solución son iguales que los anteriores sin más que sustituir x_1 por x_2 y u_1 por u_2 .

C)

La condición que exigimos ahora a los parámetros es excluyente respecto a los casos A y B, esto es, suponemos que:

$$x_1 < 1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} < x_2,$$

En esta situación y dado que las únicas políticas admisibles son la 3, 4 y 5 tenemos que ninguna de ellas puede mantenerse en horizonte infinito salvo el caso de que alcancemos unas condiciones sobre las variables de estado y coestado específicas que nos permitan seguir la variedad estable del punto de silla, ahora admisible, que satisface el sistema dinámico de la política 5.

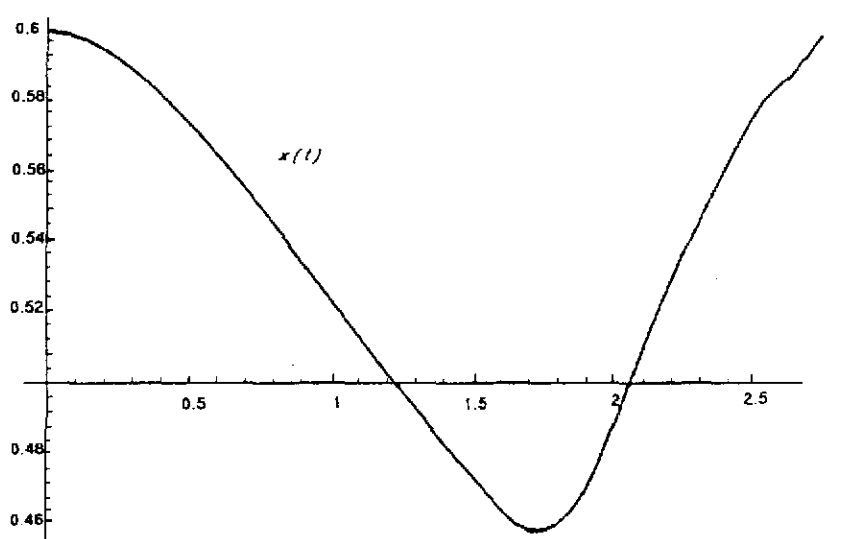
Entonces, si en $t = \tau$ se verifican tales condiciones, tendremos que la política 5 será terminal. Si estas condiciones no se alcanzan, obtendremos una trayectoria periódica terminal que se formará por actuaciones sucesivas de las políticas 3, 4 y 5. En efecto, existirá un intervalo en el que se esté aplicando la política 5 donde la publicidad terminará por perder la admisibilidad, lo que llevará a utilizar la política tercera o cuarta. Supongamos el primer caso, un razonamiento similar se seguiría en el otro supuesto, la aplicación de esta política nos llevará a alcanzar instantáneamente la cuota de mercado x_1 ; la política que a partir de ese instante se seguirá será la 5 hasta que la publicidad alcance su valor máximo, instante en el cual comenzaría a aplicarse la política cuarta que nos llevaría a alcanzar, después de un intervalo de tiempo la cuota de mercado máxima, a partir de ese momento de nuevo se aplicaría la política 5; la nueva pérdida de admisibilidad de la publicidad y la subsiguiente aplicación de la política tercera completaría el ciclo.

Con el objeto de encontrar una solución periódica, hemos resuelto el problema numéricamente utilizando el programa Mathematica y para los siguientes valores de los parámetros:

$$a = 0,6 \quad b = 0,2 \quad r = 0,05 \quad P = 4 \quad x_1 = 0,375 \quad x_2 = 0,6 \quad \bar{u} = 1.$$

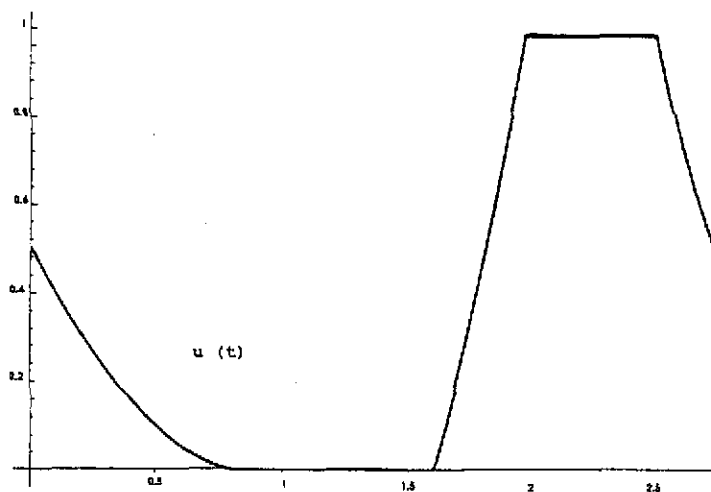
Para estos valores de los parámetros se tiene $1 - \frac{r + \sqrt{r^2 + 4aPb}}{2aP} = 0,7$ luego

estamos en el caso B. Supuesto alcanzado el nivel x_2 , partimos de las condiciones iniciales $x(0) = 0,6$, $u(0) = 0,5$ para las variables de estado y tomando condiciones iniciales apropiadas para las variables de coestado, que sabemos son discontinuas en los puntos frontera donde se saturan las restricciones puras, es decir, ψ_1 puede dar saltos cuando $x(t)$ alcanza el nivel x_1 o x_2 y ψ_2 puede ser discontinua cuando $u(t)$ toma los valores 0 o 1, se obtienen las gráficas 1 y 2 para las variables de estado $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente.

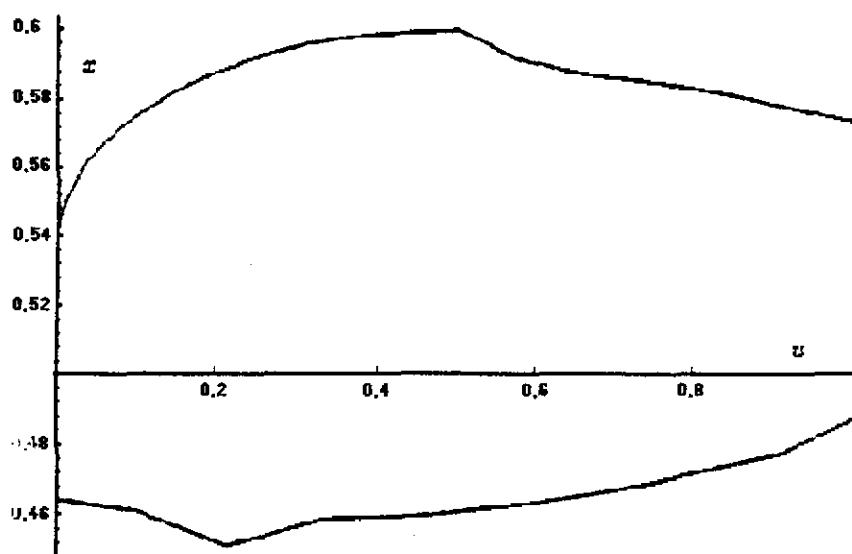


Gráfica 1

En la gráfica 3 proyectamos la órbita periódica en el plano de fase (u, x) y se observa que, partiendo de una cuota de mercado $x(0) = 0,6$ disminuye paulatinamente dicha cuota y el nivel de publicidad hasta que este último alcanza su mínimo $u = 0$. Para $u = 0$ la cuota de mercado sigue decreciendo, en la siguiente política $x(t)$ decrece algo, mientras que $u(t)$ crece; cuando $x(t)$ alcanza el nivel más bajo, comienza a crecer y continua creciendo cuando se alcanza la publicidad máxima, para posteriormente esta última decrecer y cerrarse el ciclo. Se observa, en los gráficos, que existen intervalos de tiempo en los cuales ambas variables $u(t)$ y $x(t)$ decrecen y otros en los que crecen.



Gráfica 2



Gráfica 3

5.- CONCLUSIONES.

En el trabajo hemos realizado una reformulación de un modelo publicitario de Vidale-Wolfe en el que consideramos que los costes de publicidad son lineales, pero existen además unos costes cuadráticos debidos a la variación de la publicidad. El problema se plantea como un problema de control óptimo pero, a diferencia del básico, tiene dos variables de estado, la cuota de mercado y la publicidad y una variable de control que es libre, mientras que las variables de estado están acotadas; este último supuesto, que se refleja en el desarrollo del modelo, permite que sea posible un comportamiento discontinuo de los pseudo-precios asociados a dichas variables.

Teniendo en cuenta las ecuaciones dinámicas que surgen al aplicar las condiciones necesarias del Principio del Máximo, determinamos las distintas políticas admisibles las cuales dependen de la relación existente entre los parámetros del modelo. Sin embargo, las políticas admisibles encontradas no pueden aplicarse, todas ellas, en un intervalo de longitud infinita, de ahí que sólo nos interesa encontrar cuál es la solución óptima en un período terminal, pudiéndose distinguir tres posibles casos.

En cada uno de estos tres casos demostramos que existen siempre dos posibles trayectorias óptimas terminales, una monótona y otra periódica y además esta última es la óptima siempre que el pseudo-precio de publicidad, en el instante que comienza a aplicarse dicha política, es distinto de cero.

La demostración de la existencia de la trayectoria periódica terminal no nos da ningún procedimiento para su construcción, de ahí que realicemos ésta de forma numérica dando unos valores determinados a los parámetros del modelo, con lo que nos encontraremos en una de las tres posibles situaciones que garantizan la existencia de la trayectoria periódica, la cual construimos mediante la conexión de políticas admisibles partiendo de unas condiciones iniciales para las variables de estado y tomando condiciones iniciales apropiadas para las variables de coestado que presentan discontinuidades.

Así, para ese caso concreto, aplicamos primeramente el sistema dinámico con un valor del pseudo-precio de publicidad distinto de cero (en este caso negativo), conectamos después con una política de publicidad nula, para seguir posteriormente la evolución de las variables mediante el sistema dinámico que luego conectamos con una política de publicidad máxima y, a continuación, aplicamos otra vez el sistema dinámico para completar el ciclo. Determinamos el

comportamiento de las variables de estado y coestado para un período completo y representamos gráficamente las trayectorias de dichas variables y la órbita periódica en el plano de fase (u, x).

En el modelo de Vidale-Wolfe original, las trayectorias óptimas dependían de las condiciones iniciales y de los valores de los parámetros del modelo y salvo la situación donde es óptimo mantener una publicidad nula en todo el horizonte, la política óptima terminal consiste en alcanzar una cuota de mercado. Esta cuota de mercado vuelve a ser particularmente interesante en nuestro trabajo y ella sería la cuota a alcanzar si la solución óptima fuese seguir la variedad estable del punto de silla. Solamente en este caso se alcanzaría esa cuota de mercado, en el resto de los casos estaríamos fluctuando alrededor de dicho valor o bien se superaría siempre o sería siempre inferior.

BIBLIOGRAFÍA.

- Brock, W.A. y Scheinkman, J. (1976): "*Global Asymptotic Stability of Optimal Control Systems with Applications to the Theory of Economic Growth*". Journal of Economic Theory. nº 12, págs. 164-190
- Cass, D. y Shell, K. (1976): *The Hamiltonian Approach to Dynamic Economic*. London. Academic Press.
- Dockner, E.J. (1985): "*Local Stability Analysis in Optimal Control Problems with two State Variables*" en Optimal Control Theory and Economic Analysis 2. (G. Feichtinger Ed.). Amsterdam. North-Holland. págs. 89-103
- Feichtinger, G. y Sorger, G. (1988): "*Periodic Research and Development*" en Optimal Control Theory and Economic Analysis 3. (G. Feichtinger Ed.). Amsterdam. North-Holland. págs. 121-141
- Fernández Lechón, R. (1992): *Comportamientos Ciclicos en Modelos Económicos*. Trabajo de Investigación presentado al concurso de la Cátedra de Economía Aplicada (Matemáticas) de la Universidad de Valladolid.
- Grandmont, J.M. (1985): "*On Endogenous Competitive Business Cycles*". Econometría. Vol. 53, págs. 995-1045

-
- Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York. Springer-Verlag.
 - Hartl, R.F. (1987): "A Simple Proof of the Monotonicity of the State Trajectories in Autonomous Control Problems". *Journal of Economic Theory*. nº 41, págs. 211-215
 - Kamien, M.I. y Schwartz, N.L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York. North-Holland.
 - Medio, A. (1987): "Oscillations in Optimal Growth Models". *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 11, nº 2, págs. 201-206
 - Mizrach, B. (1992): "The State of Economic Dynamics". *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 16, nº 1, págs. 175-190
 - Neck, R. y Dockner, E.J. (1988): "On the Optimality of Cyclical Stabilization Policies: Some Variations on a Models of Nordhaus" en *Optimal Control Theory and Economic Analysis 3*. (G. Feichtinger Ed.). Amsterdam. North-Holland. págs. 77-96
 - Seierstad, A. y Sydsaeter, K. (1993): *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amsterdam. North-Holland.
 - Soto Torres, M.D. y Fernández Lechón, R. (1988): "Un Problema de Control Óptimo: Estudio de sus Bifurcaciones". *Cuadernos de Economía*. Vol. 16, págs. 143-160