Estudios de Economía Aplicada
N° 4, 1995. Págs. 95 a 113

Una propuesta metodológica para medir la productividad global

Xosé Antón Rodríguez González
Departamento de Econometría y Métodos Cuantitativos
Fac. Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Santiago de Compostela

RESUMEN
Para conocer con mayor exactitud la eficacia de la utilización de los inputs en la generación del output, no basta con el cálculo de los índices de productividad parcial, es preciso analizar la trayectoria de la productividad global.
Los métodos tradicionales de medida de la productividad total se fundamentan en supuestos muy restrictivos. En este trabajo, proponemos un procedimiento alternativo de medida, genérico y flexible, que nos indica el comportamiento de ésta a partir de los factores o fuentes más importantes que la determinan.
Pensamos que una propuesta metodológica, para ser efectiva, debe ser operativa y, por ello, contrastamos su bondad ilustrando su utilización para el caso de la minería metálica española.
Palabras clave
Productividad Total; Índice de Divisia; Aplicaciones Econométricas; Minería Metálica.

ABSTRACT
In order to know more accurately the efficiency in the utilization of the inputs in the generation of the output, is not enough the calculation of indexes of parcial productivity, it is needed to analyse the path of the global productivity.
The traditional methods to asses the total productivity are based on very restrictive hypothesis. In this paper, we propose an alternative measurement process, generic and flexible, that show us the performance of it from the main factors or sources that determine it.
We think that a methodological proposal, for being effective, should also be operative, thus we tested its capacity by illustrating its use for the case of the spanish metallic mining sector.
Key words
Total Productivity; Divisia Index; Applied Econometrics, Metallic Mining.

1. Introducción

Resulta de primordial importancia medir adecuadamente la evolución de la productividad, dado que su trayectoria nos indica con gran precisión las características productivas, de crecimiento y competitivas de una economía, sector o industria.

La dificultad para encontrar una medición conjunta de los factores productivos —o contemplarlos insertos en la correspondiente función de producción (costes)— ocasiona que en la práctica predominen los cálculos de índices de productividad parcial. No obstante, para conocer con mayor exactitud la eficacia de la utilización de los inputs en la generación del output, es necesario analizar la trayectoria de la productividad global.

Los procedimientos habituales de medida de la productividad total se fundamentan en hipótesis muy restrictivas. Nosotros proponemos un método alternativo de medida, genérico y flexible, que nos indica la evolución de ésta a partir de los factores o fuentes más importantes que la determinan: avances técnicos, efectos globales de desequilibrio (de ajuste y de utilización no óptima de los recursos) y efectos de escala.

Ahora bien, una descomposición de la tasa de variación de la productividad, como la propuesta, requiere la especificación de modelos econométricos alternativos (basados en formas funcionales flexibles), cuya estimación nos permita un conocimiento preciso de la realidad productiva en estudio.

Por último, tratamos de verificar la validez de esta propuesta metodológica presentando los resultados de su aplicación en el ámbito de la minería metálica española, los cuales nos ilustran el comportamiento productivo de este tipo de minerales en el período 1974-1991.

2. Métodos habituales para medir la productividad

Definiendo la variable "productividad" como la relación existente entre la cantidad de producto y la cantidad de uno o más inputs utilizados en su obtención, encontramos como primeras aproximaciones a su medida los ratios entre el agregado del nivel de output y el agregado de un factor productivo, es decir, los índices de productividad parcial:

$$PP_i = \frac{Q}{F_i} \qquad [1]$$

donde:

PP_i, representa la productividad parcial del input i-ésimo.

Q, representa el agregado del nivel de output.

F_i, representa el agregado del input i-ésimo.

Aunque este tipo de indicadores (entre los que destacan los índices de productividad parcial del trabajo y del capital) mantienen un amplio uso debido, fundamentalmente, a su fácil cálculo, si los consideramos de forma aislada pueden proporcionarnos una idea no del todo correcta de la realidad productiva, precisamente por centrarse en un solo factor productivo y no tener presente el comportamiento del resto.

Consecuentemente, una medida más precisa de la estructura productiva y de la evolución de su productividad requiere que se tengan en cuenta contemporáneamente los principales inputs utilizados en la generación del output, es decir que se calculen los índices de productividad total o global de los factores:

$$PTF = \frac{Q}{F} \qquad [2]$$

donde:

PTF, es el índice de productividad total.
Q, es el agregado del nivel de output.
F, es el agregado de los principales inputs que intervienen en la elaboración de Q.

Una de las dificultades más importantes que encontramos en el cálculo de este tipo de indicadores consiste en la selección del método más adecuado para agregar la diversidad de inputs y, en su caso, de las distintas producciones. Hay que tener presente que los factores productivos (o producciones) están formados por componentes cualitativamente distintos; incluso diferentes dentro de cada tipo, inputs de capital de distinta eficiencia productiva o mano de obra con grado de formación muy heterogénea.

Los primeros procedimientos de agregación (basados en la suma aritmética y en los índices tipo Laspeyres) pronto quedan en desuso debido, principalmente, a la aparición de un nuevo método de agregación fundamentado en el índice de Divisia[1]. Éste, para los procesos de agregación, se define en términos de tasas de crecimiento. Así, la tasa de variación del output agregado se define:

$$\hat{Q} - \sum_{j} \frac{p_j q_j}{Y} \hat{q}_j \qquad [3]$$

siendo:

$\hat{Q} = \dfrac{dQ/dt}{Q}$ la tasa de crecimiento o variación del output agregado.

$Y = \sum_j p_j q_j$ los ingresos totales.

$\hat{q}_j = \dfrac{dq_j/dt}{q_j}$ la tasa de crecimiento del output j-ésimo.

Igualmente se define el índice de Divisia para la agregación del input:

$$\hat{F} = \sum_i \frac{w_i x_i}{C} \hat{x}_i \qquad [4]$$

siendo:

$\hat{F} = \dfrac{dF/dt}{F}$ la tasa de crecimiento o variación del input agregado.

$C = \sum_i w_i x_i$ el coste total.

$\hat{x}_i = \dfrac{dx_i/dt}{x_i}$ la tasa de crecimiento del input i-ésimo.

Por tanto, la tasa de crecimiento o variación de la productividad total de los factores se define como $P\hat{T}F = \hat{Q} - \hat{F}$ con denominación habitual de índice de Divisia de la productivad total de los factores.

Su aproximación discreta más usual es la que realiza Törnqvist (1936):

$$\Delta\, PTF = \Delta \ln Q - \Delta \ln F \qquad [5]$$

siendo:

$$\Delta \ln Q = \ln\left(\frac{Q_t}{Q_{t-1}}\right) = 1/2 \sum_j \left(b_{jt} + b_{jt-1}\right) \ln\left(\frac{q_{jt}}{q_{jt-1}}\right)$$

$$\Delta \ln F = \ln\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right) = 1/2 \sum_i \left(a_{it} + a_{it-1}\right) \ln\left(\frac{x_{it}}{x_{it-1}}\right)$$

donde:

$$b_{jt} = \frac{p_{jt}\, q_{jt}}{\sum_j p_{jt}\, q_{jt}} \quad \text{y} \quad a_{it} = \frac{w_{it}\, x_{it}}{\sum_i w_{it}\, x_{it}}$$

son, respectivamente, la participación de cada tipo de output e input en el valor de la producción y del coste total.

Tomando como partida el trabajo pionero de Solow (1957), en el que se demuestra que bajo determinados supuestos el índice de Divisia es el instrumento adecuado para medir lo que denomina "cambio tecnológico", el cálculo directo de este tipo de índices se extiende de forma importante hasta convertirse, junto con las aplicaciones econométricas, en los procedimientos más habituales[2] en los análisis de la productividad. Entre los abundantes estudios realizados en este ámbito, con la utilización del índice de referencia, se pueden citar los de Jorgenson y Griliches (1967); Christensen y Jorgenson (1970); Denison (1979); Gollop y Jorgenson (1980); Denny, Fuss y Waverman (1981); Myro (1983, 1985); Gandoy (1989); Lemmi, Quaranta y Viviani (1991); Denny, Bernstein, Fuss, Nakamura y Waverman (1992) y Hernando y Vallés (1993).

3. Descomposición y ajuste del índice de divisa

El índice de Divisia determinado como el crecimiento del output que no se debe a las modificaciones en los inputs representa un residual de productividad. Por tanto, resulta de vital importancia analizar qué contiene dicho resto o cuáles son los factores que lo determinan. Ello es posible encuadrando la medida de la productividad en el contexto de la teoría de la producción (costes).

Partiendo de una función genérica de producción $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ o de su dual[3] de costes $C=g(w_1, w_2, \ldots, w_n, Q, t)$ —en las cuales (x_i) y (w_i) representan, respectivamente, las cantidades y los precios de los factores productivos, (Q) el nivel de producción y (t) la variable tecnológica—, bajo los supuestos de rendimientos constantes a escala y equilibrio competitivo en los mercados y efectuando las derivaciones totales de las funciones anteriores respecto al tiempo, se demuestra que:

$$P\hat{T}F = -\hat{B} = \hat{A} = \hat{Q} - \hat{F} \qquad [6]$$

donde:

$\hat{A} = \dfrac{\delta \ln f}{\delta t}$ representa los desplazamientos en la función de producción a través del tiempo, también denominado habitualmente "cambio técnico".

$\hat{B} = \dfrac{\delta \ln g}{\delta t}$ representa los cambios o desplazamientos en la función de costes.

Es decir, cumpliéndose las hipótesis de referencia, el convencional índice de Divisia de la productividad total de los factores $\left(P\hat{T}F\right)$ mide el denominado cambio técnico $\left(\hat{A}\right)$, el cual, a su vez, puede representarse mediante dos desplazamientos en la función de costes $\left(\hat{B}\right)$.

La pregunta surge de inmediato, ¿qué ocurre cuando los supuestos de referencia no se cumplen? La respuesta es clara: los avances técnicos no pueden explicar por si solos la evolución de la productividad total, es decir, el residual de productividad también se debe a otros componentes.

Para detallar cuáles son los elementos principales que configuran el resto de productividad, procedemos a la descomposición de éste para una situación genérica usual en que los procesos productivos no manifiestan rendimientos constantes a escala y que no exista competencia perfecta en los mercados (factores y productos). Además, contemplamos los contextos habituales de que existan diversidad de producciones $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ y diferenciamos entre inputs variables $(x_1, x_2, \ldots, x)$

—aquellos que se ajustan con rapidez a las variables circunstancias productivas— y los inputs fijos o cuasi-fijos ($x_{r+1}, \ldots, x_n$) —que pueden presentar rigideces de adaptación ante las nuevas características productivas en el corto plazo—.

Para ello partimos de la correspondiente función dual[4] de coste variable:

$$CV = h\,(w_1, w_2, w_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n, q_1, q_2, \ldots, q_m, t) \qquad [7]$$

siendo w_1, w_2, w_r los precios de los inputs variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Efectuando la derivación total correspondiente de [7] respecto al tiempo y reorganizando los términos (Rodríguez, 1995), se llega a que:

$$P\hat{T}F = \underbrace{-\hat{B}}_{[a]} - \underbrace{\sum_{i=r+1}^{n} (w_i - z_i)\frac{X_i}{C}\hat{X}_i}_{[b]} + \underbrace{\left(1 - \sum_j \varepsilon_{C_{q_j}}\right)\hat{Q}^C}_{[c]} + \underbrace{\left(\hat{Q}^Y - \hat{Q}^C\right)}_{[d]} \qquad [8]$$

En la fórmula anterior descomponemos la tasa de variación de la productividad total $(P\hat{T}F)$ en cuatro componentes fundamentales:

[a] Medida dual de $\hat{A}$, que pretende recoger los avances en la tecnología desde la vertiente del coste $\left(\hat{B} = \dfrac{\delta h / \delta t}{C}\right)$.

[b] Representa los efectos globales (de ajuste y de utilización no óptima de los factores productivos) debidos a una situación de equilibrio temporal o de desequilibrio en el largo plazo. Este término únicamente se anula en el caso poco frecuente de que $w_i = z_i$ para todo $i = r+1, r+2, \ldots, n$ (siendo $-z_i = \delta h/\delta x_i$, el precio o valor implícito del input i-ésimo).

[c] Recoge los posibles efectos de escala, pues si el proceso productivo en estudio no exhibe rendimientos constantes de escala $\varepsilon_{CQ} \neq 1$ (siendo ε_{CQ} la elasticidad del coste respecto a la producción) y este componente no se anula.

[d] Recoge lo que denominamos "efecto mercado", pues se debe a la no coincidencia entre los costes marginales de las distintas producciones y sus precios o a la no existencia de variaciones uniformes de estos últimos sobre los costes

marginales. En caso de cumplirse alguna de las dos condiciones anteriores $\hat{Q}^C = \hat{Q}^Y$ —siendo, $\hat{Q}^C$ y $\hat{Q}^Y$, respectivamente, la tasa de variación del agregado del output cuando ponderamos según la participación de la elasticidad coste de cada producto respecto a la elasticidad coste total y según el valor de cada producto en los ingresos totales— y este último componente se anularía.

No obstante, pensamos que este cuarto efecto en el que se descompone el índice de Divisia de la productividad se debe a un "defecto" de agregación de las producciones $(\hat{Q})$ en el propio índice (Rodríguez, 1995), en el sentido de que se pondera cada una de ellas en el montante global de la producción según su valor y, como es evidente, su importancia en el mercado no tiene por que representar adecuadamente su participación en el proceso productivo total.

Podemos ilustrar lo anterior demostrando que el índice de Divisia, tal como lo definimos, es coherente con una situación de equilibrio competitivo a largo plazo. En este contexto los ingresos totales se igualan a los costes totales:

$$\sum_i w_i x_i = \sum_j p_j q_j \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } j = 1, 2, \ldots, m.$$

De modo que, derivando la identidad anterior respecto al tiempo y realizando las agrupaciones oportunas, obtenemos:

$$\sum_i \frac{w_i x_i}{C} \hat{w}_i + \underbrace{\sum_i \frac{w_i x_i}{C} \hat{x}_i}_{\hat{F}} = \underbrace{\sum_j \frac{p_j q_j}{Y} \hat{q}_j}_{\hat{Q}} + \sum_j \frac{p_j q_j}{Y} \hat{p}_j \qquad [9]$$

Esta igualdad, que contiene a los índices de las cantidades del input $(\hat{F})$ y del output $(\hat{Q})$ que se utilizan en el habitual índice de Divisia, no se cumple en el caso de que existan beneficios o pérdidas (lo normal) y no exista equilibrio competitivo $\left(\frac{\delta C}{\delta q_j} \neq p_j\right.$, costes marginales distintos de precios) y ello afecta, de forma principal a la agregación de las producciones $(\hat{Q})$, que estará sesgada por las condiciones de mercado (los precios no representan fielmente los costes marginales).

Por ello, proponemos un ajuste del tradicional índice de Divisia de medida de la productividad total del modo siguiente:

$$P\hat{T}F^{*} = \hat{Q}^{C} - \hat{F}$$

siendo:

$$\hat{Q}^{C} = \sum_{j} \left(\frac{\varepsilon_{c_{q_j}}}{\sum_{j} \varepsilon_{c_{q_j}}} \right) \hat{q}_j$$

el agregado del output en el que se ponderan las tasas de variación de cada producto según su elasticidad coste respecto a la elasticidad coste total.

La tasa de variación de la productividad total corregida, y partiendo de la derivación correspondiente de la función de coste variable para producciones múltiples [7], se descompone en los tres efectos principales ya conocidos (tecnológicos, de desequilibrio y de escala):

$$P\hat{T}F' = -\hat{B} - \sum_{i=r+1} \left(w_i - z_i\right) \frac{x_i}{C} \hat{x}_i + \left(1 - \sum_{j} \varepsilon_{c_{q_j}}\right) \hat{Q}^{C} \qquad [10]$$

Esta formulación representa una medida más precisa de la evolución de la productividad total, con validez genérica tanto para un solo tipo de output como para producciones diversas.

Desde el punto de vista empírico y considerado como único input cuasi-fijo al capital (K), se puede hacer una aproximación semidiscreta de [10]:

$$PTF' = -\hat{B} + \left(z_K - w_K\right) \frac{x_K}{C} \Delta \ln x_K + \left(1 - \sum_{j} \varepsilon_{c_{q_j}}\right) \Delta \ln Q^{C} \qquad [11$$

siendo:

$$\Delta \ln x_K = \ln\left(\frac{x_{Kt}}{x_{Kt-1}}\right)$$

$$\Delta \ln Q_C = \ln\left(\frac{Q_t^C}{Q_{t-1}^C}\right) = 1/2\sum_j \left(C_{jt} + C_{jt-1}\right)\ln\left(\frac{q_{jt}}{q_{jt-1}}\right)$$

donde $C_{jt} = \dfrac{\varepsilon_{c_{q_{jt}}}}{\sum_j \varepsilon_{c_{q_{jt}}}}$

4. Especificación econométrica

La descomposición de $P\hat{T}F^*$, según la formulación [11], exige el conocimiento del proceso productivo en análisis. Teniendo en cuenta que hemos diferenciado entre inputs fijos y variables, debemos situarnos en el corto plazo o en el equilibrio temporal y especificar una función de costes variables que recoja dicha circunstancia.

Dos formas funcionales, que cumplen dichas características y que ofrecen mayor uso desde el punto de vista práctico, son la función de costes translog restringida o variable y la función de costes variable del tipo Leontief. La primera es el resultado de adaptar o acomodar al corto plazo la función costes translog habitual. Como ejemplo de ésta proponemos una generalización de la presentada por Berndt y Hesse (1986), que nos permite diseñar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ln CV = {} & \alpha_0 + \alpha_Q \ln Q + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \ln W_i + \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i \ln X_i + \alpha_t t + 1/2\, \alpha_{tt} t^2 + \\ & + 1/2\, \alpha_{QQ} (\ln Q)^2 + 1/2 \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \ln W_i \ln W_j + 1/2 \sum_{i=r+1}^{n}\sum_{j=r+1}^{n} \beta_{ij} \ln X_i \ln X_j + \\ & + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{iQ} \ln W_i \ln Q + \sum_{i=r+1}^{n} \beta_{iQ} \ln X_i \ln Q + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n} \delta_{ij} \ln W_i \ln X_j + \\ & + \delta_{Qt} \ln Q\, t + \sum_{i=r+1}^{n} \beta_{it} \ln X_i\, t + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{it} \ln W_i\, t \end{aligned} \qquad [12]$$

$$S_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \ln w_j + \alpha_{iQ} \ln Q + \sum_{j=r+1}^{n} \delta_{ij} \ln x_j + \alpha_{it} t \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r$$

$$P = \frac{\delta CV}{\delta Q} \cdot \sigma$$

siendo $w_1, w_2, \ldots, w_r$, los precios de los inputs variables; $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, los posibles inputs fijos o cuasi-fijos; Q y t, respectivamente, el nivel de producción y la variable tecnológica. De modo que la primera ecuación es la principal del coste variable; las (r) ecuaciones siguientes son las ecuaciones de participación en el coste variable, resultado de aplicar a la primera el lema de Shephard (1970); la última ecuación es la del precio del output, en la cual (σ) es el factor de divergencia entre el precio y el coste marginal, cuya forma puede cambiar dependiendo de la aplicación concreta a realizar.

La función de costes variable del tipo Leontief es una generalización muy amplia de la función originaria de costes Leontief (1941), concretamente la que planteamos está en la línea de la propuesta de Morrison (1988), que nos posibilita el establecimiento del siguiente sistema:

$$
\begin{aligned}
CV = Q\Bigg[&\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}W_i^{1/2}W_j^{1/2} + \sum_{i=1}^{r}\alpha_{iQ}W_iQ^{1/2} + \sum_{i=1}^{r}\alpha_{it}W_it^{1/2} + \\
&+ \sum_{i=1}^{r}W_i\left(\beta_{QQ}Q + 2\beta_{Qt}Q^{1/2}t^{1/2} + \beta_{tt}t\right)\Bigg] + \\
&+ Q^{1/2}\Bigg[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{n}\gamma_{ij}W_iX_j^{1/2} + \sum_{i=1}^{r}W_i\sum_{j=r+1}^{n}\delta_{jQ}X_j^{1/2}Q^{1/2} + \\
&+ \sum_{i=1}^{r}W_i\sum_{j=r+1}^{n}\delta_{jt}X_j^{1/2}t^{1/2}\Bigg] + \sum_{i=1}^{r}W_i\sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=r+1}^{n}\theta_{jl}X_j^{1/2}X_l^{1/2}
\end{aligned}
\qquad [13]
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{X_i}{Q} = &\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}\left(\frac{W_j}{W_i}\right)^{1/2} + \alpha_{iQ}Q^{1/2} + \alpha_{it}t^{1/2} + \beta_{QQ}Q + 2\beta_{Qt}Q^{1/2} + \beta_{tt}t + \\
&+ \sum_{j=r+1}^{n}\gamma_{ij}\left(\frac{X_j}{Q}\right)^{1/2} + \sum_{j=r+1}^{n}\delta_{iQ}X_j^{1/2} + \sum_{j=r+1}^{n}\delta_{jt}\left(\frac{X_j}{Q}\right)^{1/2}t^{1/2} + \sum_{j=r+1}^{n}\sum_{l=r+1}^{n}\theta_{jl}\frac{X_j^{1/2}X_l^{1/2}}{Q}
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2, \ldots, r$.

$$P = \frac{\delta\, CV}{\delta\, Q} \cdot \sigma$$

El modelo anterior, diseñado a partir de los precios de los inputs variables, de las cantidades de los factores productivos considerados cuasi-fijos, del nivel de producción y de la variable tecnológica, está constituido por $r+2$ ecuaciones en el cual la primera es la principal del coste variable, las (r) siguientes (derivadas a partir de la primera aplicando el lema de Shephard) constituyen las ecuaciones de demanda de los factores productivos variables y la última es la ecución del precio.

Ambos tipos de modelos multiecuacionales por sus características —y una vez efectuadas las transformaciones adecuadas, teniendo en cuenta las distintas restricciones paramétricas— se estiman habitualmente por el procedimiento iterativo de Zellner (método iterativo SURE) o por el método iterativo de los mínimos cuadrados en tres etapas.

5. Aplicación al caso de la minería metálica

Con la finalidad de verificar la operatividad de la metodología propuesta, recogemos los resultados de la evolución de la productividad total en el caso de la minería metálica española, que es una de las veinte aplicaciones que presentamos en la tesis doctoral (Rodríguez, 1995).

El objetivo consiste en medir la trayectoria de la productividad según la formulación [11]. Para ello es necesario conocer el comportamiento productivo en el ámbito de la minería, para cuyo fin contrastamos la efectividad de los dos tipos de especificaciones analizadas en el apartado anterior, concluyendo que la tipo translog manifiesta una clara superioridad respecto a la Leontief, que se revela en aspectos como la estacionalidad de los regresores, la coherencia de los resultados o las ventajas interpretativas.

En concreto, consideramos tres factores productivos variables —el trabajo (*L*), la energía (*E*) y los materiales intermedios (*M*)— y uno fijo o cuasi-fijo —el capital (*K*)—, de modo que partimos de la siguiente función genérica de costes variable:

$$CV = h\,(W_L, W_E, W_M, X_K, q_1, q_2, t)$$

donde:

W_L, es el precio del factor trabajo.
W_E, es el precio del factor energía.
W_M, es el precio de los materiales consumidos.
X_K, es la cantidad de capital (stock de capital).
q_1 y q_2, representan a las distintas cantidades de producto (por simplicidad consideramos dos tipos).

Teniendo en cuenta las distintas variantes del sistema [12] y las correspondientes restricciones paramétricas (las cuales nos permiten eliminar una de las ecuaciones de participación), resulta el modelo que hemos utilizado en las veinte aplicaciones:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{CV}{W_M}\right) = {} & \alpha_0 + \alpha_{q_1} \ln q_1 + \alpha_{q_2} \ln q_2 + \alpha_L \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) + \alpha_E \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) + \beta_K \ln X_K + \\
& + \alpha_t\, t + 1/2\, \alpha_{LL}\left[\ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right)\right]^2 + 1/2\, \alpha_{EE}\left[\ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right)\right]^2 + \alpha_{LE} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) + \\
& + \alpha_{Lq_1} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) \ln q_1 + \alpha_{Lq_2} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) \ln q_2 + \alpha_{Eq_1} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) \ln q_1 + \\
& + \delta_{Eq_2} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) \ln q_2 + \delta_{LK} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) \ln X_K + \delta_{EK} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) \ln X_K \\
& + \alpha_{Lt} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) t + \alpha_{Et} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) t
\end{aligned} \qquad [14]$$

$$S_L = \alpha_L + \alpha_{LL} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) + \alpha_{LE} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) + \alpha_{Lq_1} \ln q_1 + \alpha_{Lq_2} \ln q_2 + \delta_{LK} \ln X_K + \alpha_{Lt}\, t$$

$$S_E = \alpha_E + \alpha_{EE} \ln\left(\frac{W_E}{W_M}\right) + \alpha_{LE} \ln\left(\frac{W_L}{W_M}\right) + \alpha_{Eq_1} \ln q_1 + \alpha_{Eq_2} \ln q_2 + \delta_{EK} \ln X_K + \alpha_{Et}\, t$$

Después de efectuar la elaboración correspondiente de las variables, a partir de los datos que ofrece la *Estadística Minera de España*, realizamos la estimación del modelo [14] mediante el método iterativo SURE, cuyos resultados presentamos en la tabla 1.

Observada la coherencia global de los resultados de la estimación, podemos calcular el crecimiento de la productividad (Δ *PTF**) a partir de sus componentes principales: avances técnicos —estado técnico-físico de extracción de las explotaciones metálicas (*AT*)—, efectos globales de desequilibrio —de ajuste y utilización no óptima de los factores productivos (*EGDE*)— y efectos de escala (*EDE*), cuyos resultados presentamos en la tabla 2.

Tabla 1.- Estimación del modelo translog (1974-1991). Minería metálica.

PARÁMETROS							
α_C	α_{q1}	α_{q2}	α_{q3}	α_{q4}	α_L	α_E	β_K
8,805 (3,516)	0,118 (0,619)	-0,369 (2,214)	0,051 (0,333)	-0,178 (1,014)	2,766 (5,909)	-0,157 (0,933)	0,495 (2,033)
α_t	α_{LL}	α_{EE}	α_{LE}	α_{Lq1}	α_{Lq2}	α_{Lq3}	α_{Lq4}
-0,049 (3,692)	0,130 (7,047)	0,121 (11,758)	-0,085 (10,948)	0,030 (0,845)	-0,147 (4,708)	-0,038 (1,347)	-0,068 (2,077)
α_{Eq1}	α_{Eq2}	α_{Eq3}	α_{Eq4}	δ_{LK}	δ_{EK}	δ_{Lt}	δ_{Et}
0,009 (0,758)	0,027 (2,493)	-0,001 (0,022)	0,024 (2,100)	0,046 (1,082)	-0,039 (2,536)	-0,013 (5,156)	0,006 (7,594)

Ecuación del CV	Ecuación de S_L	Ecuación S_E
$R^2 = 0{,}97$	$R^2 = 0{,}85$	$R^2 = 0{,}97$
% RECM = 1,30	% RECM = 2,95	% RECM = 2,97
DW = 2,013	DW = 2,134	DW = 2,024

R^2: Coeficiente de determinación.

% RECM: Porcentaje de la raíz del error cuadrático medio.

DW: Estadístico Durbin-Watson.

NOTA: Los *t*-ratios se presentan entre paréntesis en valor absoluto por debajo de las cantidades que obtenemos para los parámetros.

Tabla 2.- Tasas medias de crecimiento de la productividad total y de sus fuentes en la minería metálica española (%).

	PERÍODO		
	1974-83	1984-91	1974-91
AT	-1,58	-1,45	-1,52
EGDE	2,13	5,19	3,57
EDE	0,04	-1,33	-0,61
ΔPTF^*	0,59	2,41	1,44

Estos resultados nos permiten entender y explicar el comportamiento productivo de la minería metálica española:

— A partir de 1980 se genera un importante descenso en las producciones metálicas que va acompañado de una reducción paralela del empleo y del capital (Rodríguez, 1995) y esta tendencia se confirma también a nivel mundial debido, fundamentalmente, a la caída global de la demanda de estos minerales (Rambaud, 1992).
— El descenso en las producciones metálicas es el principal factor que condiciona la evolución de la productividad total: mediante los efectos negativos de escala y los efectos, en general, positivos de ajuste productivo (al cerrar explotaciones o eliminar capacidad productiva ociosa[5]).
— La tasa media de variación negativa, del 1,52%, que se obtiene para el residual *AT*, refleja que el estado de agotamiento y de difícil explotación en numerosas minas —que llevan muchos años abiertas y tuvieron su auge de explotación en el siglo pasado— predomina sobre las posibles mejoras tecnológicas.

6. Consideraciones finales

Como resumen y conclusiones de los apartados anteriores podemos destacar lo siguiente:

— El análisis aislado de los índices de productividad parcial puede aportarnos conclusiones ambiguas acerca de los verdaderos avances en la productividad. Por ello, es preciso relacionar la evolución de la producción con el conjunto de los factores productivos.
— El tradicional índice de Divisia de la productividad total representa un resto de la variación del output que no se debe a las variaciones del input agregado. Por tanto, resulta de vital importancia descomponer dicho residuo entre los factores que lo determinan.
— Hemos dividido el habitual índice de Divisia en cuatro tipos de efectos fundamentales: tecnológicos, de desequilibrio, de escala y los denominados "de mercado". No obstante, pensamos que este último componente se debe a un "defecto" de agregación de las producciones en el propio índice de Divisia., el cual ajustamos para concluir con una fórmula de descomposición (en efectos tecnológicos, de desequilibrio y escala) flexible y genérica.

— La determinación de la evolución de la productividad, a partir de sus fuentes más importantes, requiere el suficiente conocimiento de la realidad productiva en estudio, el cual se puede obtener a partir de la estimación de modelos econométricos que pretenden describir dicha realidad.

— Verificamos la operatividad de la metodología propuesta presentando una aplicación de la misma en el ámbito de la minería metálica española, lo que nos permite afirmar que las reducciones en las producciones metálicas (que también ocurren globalmente a nivel mundial) son las que determinan, principalmente, la trayectoria de su productividad.

Notas

1. Índice que, según Richter (1966), Hulten (1973), Usher (1974), Diewert (1976) y Lemmi-Quaranta-Viviani (1991), ofrece importantes propiedades, las cuales le facultan para su uso coherente y adecuado en los estudios de productividad.
2. Una alternativa metodológica al índice de Divisia (Solow), a finales de los años 60, fue el denominado "índice de Kendrick", sin alcanzar la popularidad del primero, respecto a los cuales Kleiman, Halevi y Levhari (1966) demuestran que son equivalentes para pequeñas cambios en las cantidades del input y output. En la actualidad también existen propuestas de medición de la productividad total en el campo de la economía de la empresa sin la definición previa de un índice, en la línea de Grifell (1990), u otros planteamientos no paramétricos que toman como referencia el trabajo pionero de Farrell (1957).
3. La "teoría de la dualidad" se debe a los trabajos de Shephard (1953, 1970), Uzawa (1964) y McFadden (1966, 1978) y significa, de forma abreviada, que, en un contexto genérico en el cual las empresas manifiestan comportamientos minizadores de costes, para cualquier función de producción existe una función de costes que puede proporcionar información equivalente del proceso productivo en estudio.
4. Lawrence J. Lau (1976) particulariza el teorema de la dualidad a las relaciones entre las funciones de producción y funciones restringidas.
5. La retirada de capital en las explotaciones metálicas españolas se realiza de forma intensa a partir de 1983, en un proceso de desmantelamiento y cierre o cuasi-cierre de las minas, lo que provoca importantes efectos de ajuste positivos sobre la productividad (5,19% en el período 1984-91).

Bibliografía

BERNDT, E.R.; HESSE, D. (1986): "Measuring and Assessing Capacity Utilization in the Manufacturing Sector of Nine OECD Countries", *European Economic Review*, Vol. 30, Nº 5.

CHRISTENSEN, R.; JORGENSON, D.W. (1970): "U.S. Real Product and Real Factor Input, 1929-1967", *Review of Income and Wealth*, Series 16.

DENISON, E.F. (1979): *Accounting for Slower Economic Growth*. Washington, D.C.: The Brookings Institution.

DENNY, M.; BERNSTEIN, J.; FUSS, M.; NAKAMURA, S.; WAVERMAN, L. (1992): "Productivity in Manufacturing Industries, Canada, Japan and the United States, 1953-1986: Was the "Productivity Slowdown" Reversed?", *Canadian Journal of Economics*, Vol. 25, Nº 3.

DENNY, M.; FÚSS, M.; WAVERMAN, L. (1981): "The Measurement and Interpretation of Total Factor Productivity in Regulated Industries, with an Application to Canadian Telecomunications", *Productivity Measurement in Regulated Industries*. T.C. Cowing and R.E. Stevenson [ed].

DIEWERT, W.E. (1976): "Exact and Superlative Index Numbers", *Journal of Econometrics*, (may).

FARRELL, M.J. (1957): "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 120.

GANDOY JUSTE, R. (1989): *Evolución de la productividad global de la industria española. Un analisis desagregado para el período 1964-1981*. [Tesis Doctoral]. Madrid: Universidad Complutense.

GOLLOP, F.M.; JORGENSON, D.W. (1980): "U.S. Productivity Growth by Industry, 1947-1973", *Studies in Income and Wealth*, Vol. 44. New Developments in Productivity Measurements and Analysis. National Bureau of Economic Research.

GRIFELL I TATJE, E. (1990): "Aspectos metodológicos relacionados con la medición, en términos absolutos, de la productividad total de los factores", *Investigaciones Económicas*, (2ª época), Vol. 14, Nº 3.

HERNANDO, I.; VALLÉS, J. (1993): "Productividad sectorial: Comportamiento cíclico en la economía española", *Papeles de Economía Española*, Nº 56. Fundación Fondo para la Investigación Económica y Social.

HULTEN, C.R. (1973): "Divisia Index Numbers", *Econometrica*, Vol. 41, Nº 6.

JORGENSON, D.W.; GRILICHES, Z. (1967): "The Explanation of Productlivity Change", *Review of Economic Studies*, Vol. 34, Nº 3.

KLEIMAN, E.; HALEVI, N.; LEVHARI, D. (1966): "The Relationship between Two Measures of Total Productivity", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 48, Nº 3.

LAU, L.J. (1976): "A Characterizacion of the Normalized Restricted Profit Funtion", *Journal of Economic Theory*, Vol. 12.

LEMMI, A.; QUARANTA, A.; VIVIANI, A. (1991): "La Misura della Produttività: Questioni di Metodo ed Evidenze Empiriche", *Serie Rapporti Tecnici*, Nº 1. Università degli Studi di Siena.

LEONTIEF, W.W. (1941): *The Structure of the American Economy 1919-1929*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

MCFADDEN, D. (1966): "Cost, Revenue and Profit Functions: A Cursory Review", *Working Paper*, Nº 86. Institute for Busines and Economic Research. University of California-Berkeley.

MCFADDEN, D. (1978): Cost, *Revenue and Profit Funtions, in Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. M.Fuss and D.McFadden [ed.]. North-Holland.

MINISTERIO DE INDUSTRIA Y ENERGÍA: *Estadística Minera de España, 1974-1991*. Madrid: MINER.

MYRO, R. (1983): "La evolución de la productividad global de la economía española en el periodo 1965-1981", *Información Comercial Española*, Nº 594.

MYRO, R. (1985): "Evolución de la productividad de la economía española", *Cuadernos del IMPI*, (2ª época), Nº 15. Madrid: Ministerio de Industria y Energía.

MORRISON, C. (1988): "Quasi-fixed Inputs in U.S. and Japanese Manufacturing: A Generalized Leontief Restricted Cost Funtion Approach", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 70, (may).

RAMBAUD PÉREZ, F. (1992): "Nuevas tendencias en la economía de los minerales", *Recursos Minerales de España*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

RICHTER, M.K. (1966): "Invariance Axioms and Economic Indexes", *Econometrica*, (october).

RODRÍGUEZ GONZÁLEZ, X.A. (1995): *La medida de la productividad global. Análisis desagregado para la minería española durante el período 1974-1991*. [Tesis Doctoral]. Universidad de Santiago de Compostela.

SHEPHARD, R.W. (1953): *Cost and Production Funtions*. Princeton, NJ.: Princeton University Press.

SHEPHARD, R.W. (1970): *Theory of Cost and Production Funtions*. Princeton, NJ.: Princeton University Press.

SOLOW, R.M. (1957): "Technical Change and the Aggregate Production Function", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 39.

TÖRNQVIST, L. (1936): "The Bank Finland's Consumption Price Index", *Bank of Finland Monthly Bullettin*, Nº 10.

USHER. (1974): "The Suitability of the Divisia Index for the Measurement of Economic Aggregates", *The Economic Journal*.

UZAWA, H. (1964): "Duality Principles in the Theory of Cost and Production", *Internacional Economic Review*, (may).