

Leyes financieras procedentes de funciones de distribución que se concentran a la izquierda o a la derecha

Salvador Cruz Rambaud
Universidad de Almería

Abstract

This paper relates distribution functions of random variables which are concentrated at the left of one point and discount financial laws, in the way that the error rate of a random variable coincides with the instantaneous rate of the financial law, proving, in case that random variables are independent between them, that there are correspondences with an homomorphic behaviour between random variables which are concentrated at the left of one point, discount financial laws and rates with "minimum", "product" and "addition" operations, respectively.

Analogously, there are new homomorphisms considering independent random variables which are concentrated at the right of one point, now with the "maximum" operation and capitalization financial laws, whose instantaneous rates coincide with the growth rates of the correspondent random variables.

Key-words: Financial law; random variable; instantaneous rate; maximum; minimum.

Resumen

En este trabajo se relacionan funciones de distribución de variables aleatorias que se concentran a la izquierda de un punto con leyes financieras de descuento, de manera que la tasa de fallo de una variable aleatoria coincida con la tasa o tanto instantáneo de la ley financiera, demostrándose que, en caso de variables aleatorias independientes entre sí, aparecen correspondencias con un comportamiento homomórfico entre dichas variables que se concentran a la izquierda de un punto, leyes financieras de descuento y tasas con las operaciones "mínimo", "producto" y "suma", respectivamente.

Análogamente, aparecen homomorfismos considerando variables aleatorias independientes que se concentran a la derecha de un punto con la operación "máximo" y leyes de capitalización, cuyas tasas instantáneas coinciden con las tasas de crecimiento de las variables aleatorias correspondientes.

Palabras-clave: Ley financiera; variable aleatoria; tanto instantáneo; máximo; mínimo.

1 INTRODUCCIÓN

Este artículo está basado en los trabajos de Maravall (1.970a, pp. 155-180), en los que se pone de manifiesto la existencia de un cierto paralelismo entre las funciones de distribución de variables aleatorias y las leyes financieras, en particular las que son regulares. En efecto, no cabe duda de que existe un trasvase entre riesgo y tipos de interés, ya que en los fenómenos actuariales "las fuerzas que actúan sobre el capital en el transcurso del tiempo son, además del interés nominal, el riesgo o la incertidumbre. Cuando estas fuerzas son medibles y se traducen en modificaciones del tipo de interés se obtienen tantos de capitalización actuarial". (Vegas y Nieto de Alba (1.993, pp. 17-21))

Así, el ejemplo más claro podemos encontrarlo en los seguros de capital diferido en caso de vida a prima única, en los que el asegurador se compromete a pagar un capital C si sobrevive el asegurado después de n años y 0, si ha fallecido, satisfaciendo el asegurado una prima única C_0 en el origen p de la operación. En este caso, la prima única sería:

$$C_0 = C \cdot V^n \cdot {}_n p_x,$$

siendo V el factor de descuento al tanto i y ${}_n p_x$ la probabilidad de que una persona de edad x alcance la edad $x+n$, que aparecería como factor adicional de descuento. Ahora bien, la literatura teórica y empírica ha enfocado este tema desde tres puntos de vista:

1. Desde un punto de vista estadístico, considerando en el instante $p+n$ la variable aleatoria dicotómica:

$$\eta = \begin{cases} C, & \text{con probabilidad } {}_n p_x \\ 0, & \text{con probabilidad } {}_n q_x \end{cases}$$

y hallando la esperanza matemática de los valores de dicha variable aleatoria, actualizados en p . (Rodríguez (1.984, pp. 319-324))

2. Desde un punto de vista diferencial, planteando la ecuación:

$$C(t) \cdot [1 + \delta(t)dt] = C(t+dt) \cdot [1 - \mu_{x+t}dt],$$

siendo: $C(t)$ = capital constituido al comienzo del período $(t, t + dt)$; $C(t + dt)$ = capital constituido al final del período, si vive el asegurado; $\delta(t)$ = tanto instantáneo de capitalización financiera pura; μ_{x+t} = fuerza instantánea de mortalidad, llegándose a la igualdad:

$$\gamma_{x+t} = \delta(t) + \mu_{x+t},$$

donde γ_{x+t} es la fuerza de capitalización actuarial. (Vegas y Nieto de Alba (1.993, pp. 17-21))

3. Desde un punto de vista demográfico: Básicamente es el mismo planteamiento anterior, suponiendo que los l_x coetáneos de una persona de edad x entregan una peseta. Se tienen así l_x pesetas que, después de n años, se han convertido en $l_x \cdot (1 + i)^n$. Como los l_x individuos han quedado reducidos a l_{x+n} , a cada uno le corresponde

$$\frac{l_x \cdot (1 + i)^n}{l_{x+n}} = (1 + i)^n \cdot \frac{1}{{}_n p_x}. \text{ (Insolera (1.950, pp. 186-188))}$$

Pues bien, el propósito de este trabajo es extender, bajo determinadas condiciones, los resultados obtenidos en seguros a cualquier variable aleatoria. Para ello, en nuestro estudio, partimos de la suposición de que los dos conceptos que intervienen en el problema, variable aleatoria y ley financiera, coinciden en una magnitud común a ambos, a saber, el tanto, considerando dos posibilidades:

1. Que el tanto instantáneo de la ley financiera sea igual a la tasa de fallo de la variable aleatoria, situación que, como veremos en la Sección 3, tiene sentido cuando el dominio de la ley financiera sea un intervalo $[p, t_0[$ (eventualmente, t_0 podría ser $+\infty$), es decir, cuando la ley financiera sea de descuento y, además, la variable aleatoria se concentre en el intervalo $]p, t_0[$.
2. Que el tanto instantáneo de la ley financiera sea igual a la tasa de crecimiento de la variable aleatoria, situación que, como veremos en la Sección 4, tiene sentido cuando el dominio de la ley financiera es $]t_0, p]$ (eventualmente, t_0 podría ser $-\infty$), es decir, cuando la ley financiera sea de capitalización y, además, la variable aleatoria se concentre en el intervalo $]t_0, p]^{(1)}$.

Más concretamente, podemos observar, y ello es lógico, que la tasa de fallo de la variable aleatoria:

$$\xi_x = \text{"edad aleatoria de fallecimiento de una persona de edad } x\text{"}$$

es igual, en el caso de supervivencia del asegurado, al tanto instantáneo de la ley financiera adicional, lo que nos permite generalizar, bajo ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad, el resultado anterior a una variable aleatoria cualquiera y obtener una ley financiera de descuento en p cuyo tanto instantáneo coincida con la tasa de fallo de dicha variable aleatoria, a saber:

$$A(t; p) = \frac{1 - F(t)}{1 - F(p)}.$$

Para ello, en la Sección 2, hacemos un breve repaso de los principales conceptos de la Matemática Financiera, que utilizaremos en este artículo. A continuación, generalizamos la condición de supervivencia de una persona a dicha condición para un colectivo, por lo que tendremos que considerar la edad mínima de fallecimiento de una persona del colectivo. Por este motivo, en la Sección 3 hacemos un estudio de la operación mínimo de dos variables aleatorias y demostramos que los correspondientes tantos de descuento tienen un comportamiento aditivo, en el caso de que las variables aleatorias utilizadas sean independientes.

Si, en lugar de considerar la condición de supervivencia, consideramos la de fallecimiento, obtenemos un factor de capitalización adicional en p :

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n \cdot \frac{1}{{}_nq_x}.$$

En este caso, el tanto de crecimiento de la variable aleatoria ξ_x coincide con el tanto instantáneo de la ley financiera adicional y, análogamente, podemos generalizar el estudio a una variable aleatoria cualquiera, obteniendo:

$$L(t; p) = \frac{F(p)}{F(t)}.$$

Si generalizamos la condición de fallecimiento de una persona a la de un colectivo, estaremos considerando el máximo de un conjunto de variables aleatorias. Pues bien, en la Sección 4 se hace un estudio dual al de la sección

anterior, obteniéndose también un comportamiento aditivo en los tantos de capitalización correspondientes a variables aleatorias independientes.

Por último, en la Sección 5 se aplica la teoría desarrollada a fenómenos actuariales y a la fiabilidad de un sistema, proponiendo un ejemplo sencillo y se resumen las principales conclusiones obtenidas en las secciones anteriores.

2 PRELIMINARES

Un *sistema financiero* es una función

$$F : \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^+$$

$$(C, t; p) \mapsto F(C, t; p)$$

que verifica las siguientes condiciones:

1. $F(C, t; p) > 0$.
2. $F(C, t; p) = C.F(1, t; p) = C.F(t; p)$, donde $F(t; p) = F(1, t; p)$ recibe el nombre de *sistema financiero unitario*.
3. $F(t; t) = F(p; p) = 1$.
4. F es continua con respecto a t y a p .
5. $\frac{\Delta_t F(t; p)}{\Delta t} \leq 0$ y $\frac{\Delta_p F(t; p)}{\Delta p} \geq 0$.

Si $F(t; p)$ es derivable con respecto a t y a p : $\frac{\partial F(t; p)}{\partial t} \leq 0$ y $\frac{\partial F(t; p)}{\partial p} \geq 0$.

Como consecuencia se deduce que $F(t; p) \geq 1$, si $t \leq p$ y $F(t; p) \leq 1$, si $t \geq p$.

Si p es constante, $F(C, t; p)$ es una *ley financiera*:

1. De capitalización, si $t \leq p$.
2. De descuento, si $t \geq p$.

Se llama *dominio temporal de una ley financiera en p* al conjunto $D = \{t \in \mathcal{R} / F(t; p) \in \mathcal{R}^+\}$. Por tanto, si ponemos $F(t; p) = f(t)$, al ser f continua y monótona creciente, se verifica que $D = f^{-1}([0, 1]) = [p, t_0[$, si $F(t; p)$ es de descuento y $D = f^{-1}([1, +\infty[) =]t_0, p]$, si $F(t; p)$ es de capitalización (eventualmente, t_0 puede ser $+\infty$ ó $-\infty$, respectivamente).

Existen tres sistemas financieros cuya importancia es conocida:

1. *Sistemas estacionarios*: $F(t; p) = F(t + h; p + h), \forall h \in \mathcal{R}$.
2. *Sistemas simplemente sumativos*: $I(t; p) + I(p; q) = I(t; q)$, siendo $I(t; p)$ el complemento a 1, en valor absoluto, de $F(t; p)$.

Se demuestra que la expresión general de estos sistemas es:

$$F(t; p) = 1 + \Phi(p) + \Phi(t),$$

siendo $\Phi(t)$ una función monótona creciente.

Además, se llama *sistema ampliamente sumativo* a todo sistema simplemente sumativo y estacionario. A esta familia pertenece la capitalización simple.

3. *Sistemas simplemente multiplicativos*: $F(t; p) \cdot F(p; q) = F(t; q)$.

Se demuestra que la expresión general de estos sistemas es:

$$F(t; p) = \frac{\Phi(p)}{\Phi(t)},$$

siendo $\Phi(t)$ una función monótona creciente.

Además, se llama *sistema ampliamente multiplicativo* a todo sistema simplemente multiplicativo y estacionario. A esta familia pertenece la capitalización compuesta.

Para una ampliación de estos conceptos, véase Gil (1.993, pp. 91-144).

3 MÍNIMO DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

En esta Sección vamos a considerar tres conjuntos:

1. El conjunto formado por la leyes financieras unitarias de descuento en un punto p , que, además, son absolutamente continuas en su dominio temporal $[p, t_0]$, es decir, continuas y con derivada continua salvo en un conjunto numerable de puntos.

2. El conjunto formado por las variables aleatorias absolutamente continuas que se concentran en un intervalo $]p, t_0[$.
3. El conjunto formado por las funciones reales de variable real no negativas, continuas salvo en un conjunto numerable de puntos, cuyo dominio es un intervalo $]p, t_0[$ de extremo inferior fijo e integrables Riemann sobre $[p, t]$, $\forall t \in]p, t_0[$, y tales que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \int_p^t f(x) dx = +\infty.$$

A continuación, dotaremos a cada uno de estos conjuntos de una estructura algebraica y construiremos un diagrama triangular conmutativo bajo el criterio de que el tanto de muerte de una variable aleatoria coincida con el tanto instantáneo de la ley financiera correspondiente.

Con respecto al primer conjunto, por un lado, bastará con definir una ley de composición interna entre leyes financieras unitarias, ya que una ley financiera completa supone la acción de una ley financiera unitaria sobre un conjunto de cuantías y, por otro, dicha operación entre leyes financieras ha de recoger una idea de superposición o solapamiento de los efectos debidos a ambas leyes en su acción sobre una cuantía. Con este planteamiento, podemos considerar dos operaciones entre sistemas financieros unitarios:

1. $(F_1 \cdot F_2)(t; p) = F_1(t; p) \cdot F_2(t; p)$.
2. $(F_1 \oplus F_2)(t; p) = F_1(t; p) + F_2(t; p) - 1$.

3.1 Lema

Sean $F_1(t; p)$ y $F_2(t; p)$ dos sistemas financieros unitarios. Entonces

$$F(t; p) = F_1(t; p) \cdot F_2(t; p)$$

y

$$F(t; p) = F_1(t; p) + F_2(t; p) - 1.$$

también son sistemas financieros unitarios.

Demostración.- Es evidente. ■

La primera operación es compatible con la propiedad de ser simplemente multiplicativos dos sistemas financieros, mientras que la segunda lo es con la propiedad de aditividad simple. En nuestro estudio, vamos a centrarnos en la primera operación, aunque podríamos realizar un estudio dual con la segunda.

Si llamamos $\mathcal{F}_p$ al conjunto formado por todas las leyes financieras unitarias en p , podemos enunciar el siguiente

3.2 Teorema

$(\mathcal{F}_p, \cdot)$ es un monoide conmutativo.

Demostración.- Es evidente. ■

Si llamamos $\mathcal{A}_p$ al conjunto formado por todas las leyes financieras unitarias de descuento en p y $\mathcal{L}_p$ al conjunto formado por todas las leyes financieras unitarias de capitalización en p , tendremos:

3.3 Corolario

$\mathcal{A}_p$ y $\mathcal{L}_p$ son monoides conmutativos. ■

3.4 Lema

Sean ξ_1 y ξ_2 dos variables aleatorias independientes con funciones de densidad $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y con funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$, respectivamente. Entonces

$$\tau = \min(\xi_1, \xi_2)$$

es también una variable aleatoria con función de densidad

$$h(x) = f_1(x) \cdot [1 - F_2(x)] + f_2(x) \cdot [1 - F_1(x)]$$

y con función de distribución

$$H(x) = 1 - [1 - F_1(x)] \cdot [1 - F_2(x)].$$

Demostración.- Véase Fisz (1.962, pp. 58-63). ■

Llamaremos $\mathcal{V}_p^-$ al conjunto formado por todas las variables aleatorias ξ , absolutamente continuas, que se concentran en un intervalo $]p, t_0[$ de extremo inferior fijo. Esto implica que la función de distribución es derivable en todo $\mathcal{R}$ salvo, a lo sumo, en un conjunto numerable de puntos y que, además:

$$F_\xi(p) = 0, \quad F_\xi(t_0) = 1.$$

En estas condiciones, podemos enunciar el siguiente

3.5 Teorema

$(\mathcal{V}_p^-, \min)$ es un semigrupo conmutativo.

Demostración.- Para ello, tenemos que demostrar que $\min$ es una ley de composición interna en $\mathcal{V}_p^-$. En efecto, $\forall \xi, \xi' \in \mathcal{V}_p^-$, si $N = \min(\xi, \xi')$ (supongamos el caso general, es decir, que ξ y ξ' están correlacionadas. Véase Maravall (1.976b)):

$$F_N(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t f_{\xi\xi'}(x, y) dx dy.$$

Por tanto,

$$F_N(p) = \int_{-\infty}^p \int_{-\infty}^p f_{\xi\xi'}(x, y) dx dy = 0.$$

y

$$F_N(\max(t_0, t'_0)) = 1.$$

Luego $N \in \mathcal{V}_p^-$ y se concentra en el intervalo $]p, \max(t_0, t'_0)[$.

Las propiedades asociativa y conmutativa se verifican en general. ■

Supongamos que el *tanto instantáneo de muerte o terminación en t* de la variable aleatoria ξ :

$$m(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)} = -\frac{d \ln p(t)}{dt}$$

(siendo $p(t) = 1 - F(t) = \text{Pr}(\xi > t)$ la función de pervivencia en t de la variable aleatoria ξ) coincide con el *tanto instantáneo en t* de la ley financiera $F(t; p)$ (en aquellos puntos en que ésto sea posible, es decir, salvo, a lo sumo, en un conjunto numerable de puntos):

$$\tau(t; p) = -\frac{\frac{\partial F(t; p)}{\partial t}}{F(t; p)} = -\frac{\partial \ln F(t; p)}{\partial t}.$$

Entonces:

$$-\frac{d \ln p(t)}{dt} = -\frac{\partial \ln F(t; p)}{\partial t}.$$

Integrando entre t y p :

$$\int_t^p \frac{d \ln p(x)}{dx} dx = \int_t^p \frac{\partial \ln F(x; p)}{\partial x} dx,$$

se obtiene:

$$[\ln p(x)]_t^p = [\ln F(x; p)]_t^p,$$

por lo que:

$$F(t; p) = \frac{1 - F(t)}{1 - F(p)}.$$

Esta expresión es un caso particular de los sistemas simplemente multiplicativos y nos ofrece una fórmula para generar leyes financieras a partir de funciones de distribución de variables aleatorias.

En el caso de que la variable aleatoria ξ sea absolutamente continua y se concentre en un intervalo $]p, t_0[$, $F(p) = 0$ y $F(t; p) = 1 - F(t)$, lo que nos induce a considerar la siguiente correspondencia:

$$\varphi : \mathcal{V}_p^- \longrightarrow \mathcal{A}_p^{(2)}$$

definida por:

$$\xi \mapsto \varphi(\xi) : [p, t_0[\longrightarrow]0, 1],$$

tal que:

$$\varphi(\xi)(t) = 1 - F(t), \quad \forall t \in [p, t_0[,$$

siendo éste el intervalo en cuyo interior se concentra ξ .

El siguiente resultado pone de manifiesto el trasvase entre riesgo y fuerza de capitalización o descuento al que hacíamos referencia en la Introducción, trasvase que, además, respeta las operaciones definidas entre variables aleatorias, por un lado, y leyes financieras, por el otro, cuando se trate de variables aleatorias independientes entre sí.

3.6 Teorema

φ es una aplicación biyectiva tal que:

$$\varphi(\min(\xi, \xi')) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí.

Demostración.- Para ello, tenemos que demostrar que:

1º) φ está bien definida. En efecto, $\varphi(\xi)$ es una ley financiera en p .

2º) φ es inyectiva. En efecto:

$$\text{Si } \varphi(\xi) = \varphi(\xi') \Rightarrow \forall t \in [p, t_0[, \varphi(\xi)(t) = \varphi(\xi')(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t \in [p, t_0[, 1 - F_\xi(t) = 1 - F_{\xi'}(t) \Rightarrow \forall t \in [p, t_0[, F_\xi(t) = F_{\xi'}(t) \Rightarrow \xi = \xi',$$

por ser ξ y ξ' absolutamente continuas (Ríos (1.985, pp. 92-94)).

3º) φ es sobreyectiva. En efecto:

$$\forall A(\cdot; p) \in \mathcal{A}_p, \exists \xi \in \mathcal{V}_p^- / \varphi(\xi) = A(\cdot; p),$$

siendo ξ la variable aleatoria que se concentra en el interior $]p, t_0[$ del dominio de la ley financiera y cuya función de distribución es:

$$\forall t \in]p, t_0[, F(t) = 1 - A(t; p).$$

a)

$$\varphi(\xi)(t) = 1 - F(t) = 1 - 1 + A(t; p) = A(t; p).$$

b) $F(t)$ es la función de distribución de una variable aleatoria ξ . En efecto:

1. $A(t; p)$ es una función no creciente de t . Por tanto, $F(t) = 1 - A(t; p)$ es una función no decreciente de t .
2. $\exists t_0 \in]p, +\infty[/ A(t_0; p) = 0 \Rightarrow F(t_0) = 1$. Por tanto, $F(+\infty) = 1$. Además, $F(p) = 1 - A(p; p) = 1 - 1 = 0$. Luego $F(-\infty) = 0$.
3. $A(t; p)$ es continua con respecto a t . Por consiguiente, $F(t) = 1 - A(t; p)$ es también continua con respecto a t . Por ser absolutamente continua, F procede de una variable aleatoria continua.

Por tanto, φ es biyectiva.

4º)

$$\varphi(\min(\xi, \xi')) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí. En efecto,

$$\begin{aligned} \forall t \in [p, \max(t_0, t'_0)[, \varphi(\min(\xi, \xi'))(t) &= 1 - H(t) = \\ &= [1 - F_\xi(t)] \cdot [1 - F_{\xi'}(t)] = \varphi(\xi)(t) \cdot \varphi(\xi')(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(\min(\xi, \xi')) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi'). \blacksquare \end{aligned}$$

A continuación, llamaremos $\mathcal{F}_p^-$ al conjunto formado por las funciones reales de variable real $f \geq 0$, cuyo dominio es un intervalo $]p, t_0[$ de extremo inferior fijo e integrables Riemann sobre $[p, t]$, $\forall t \in]p, t_0[$ y tales que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \int_p^t f(x) dx = +\infty.$$

Sabemos que $(\mathcal{F}_p^-, +)$ es un semigrupo conmutativo.

Consideremos la siguiente correspondencia:

$$\delta : \mathcal{A}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p^-$$

definida por:

$$A(\cdot; p) \mapsto \delta(A(\cdot; p)) : [p, t_0[\rightarrow \mathcal{R}$$

dada, a su vez, por:

$$\delta(A(t; p)) = -\frac{\partial \ln A(t; p)}{\partial t},$$

siendo $[p, t_0[$ el dominio temporal de $A(\cdot; p)$.

3.7 Teorema

δ es un isomorfismo de semigrupos.

Demostración.- Para ello, tenemos que demostrar que:

1º) δ está bien definida, pues $\delta(A(\cdot; p)) \geq 0$ y, además, $\forall t \in [p, t_0]$, es integrable Riemann sobre $[p, t]$, ya que:

$$\int_p^t \delta(A(x; p)) dx = -\ln A(t; p).$$

Además,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \int_p^t \delta(A(x; p)) dx = -\ln A(t_0; p) = +\infty.$$

2º) δ es inyectiva. En efecto:

$$\text{Si } \delta(A(\cdot; p)) = \delta(A'(\cdot; p)) \Rightarrow \forall t \in [p, t_0], \delta(A(t; p)) = \delta(A'(t; p)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \ln A(t; p)}{\partial t} = -\frac{\partial \ln A'(t; p)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t \in [p, t_0], \int_p^t \frac{\partial \ln A(x; p)}{\partial x} dx = \int_p^t \frac{\partial \ln A'(x; p)}{\partial x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln A(t; p) = \ln A'(t; p),$$

ya que la constante de integración $\ln K(p)$ se anula, por ser $A(p; p) = 1$. Así:

$$A(t; p) = A'(t; p), \forall t \in [p, t_0] \Rightarrow A(\cdot; p) = A'(\cdot; p).$$

3º) δ es sobreyectiva. En efecto:

$$\forall h \in \mathcal{F}_p^-, \exists A(\cdot; p) \in \mathcal{A}_p / \delta(A(\cdot; p)) = h,$$

siendo $A(\cdot; p)$ la ley financiera de descuento en p tal que:

$$\forall t \in [p, t_0], -\frac{\partial A(t; p)}{\partial t} = h(t).$$

Integrando Riemann entre t y p :

$$\forall t \in [p, t_0], -\ln A(t; p) = \int_p^t h(x) dx \Rightarrow A(t; p) = e^{-\int_p^t h(x) dx}$$

$A(\cdot; p)$ es una ley financiera de descuento en p cuyo dominio temporal es $[p, t_0]$ y, además, por la definición de integrabilidad de Riemann, es absolutamente continua.

4º)

$$\delta(A(\cdot; p).A'(\cdot; p)) = \delta(A(\cdot; p)) + \delta(A'(\cdot; p)).$$

En efecto, $\forall t \in [p, t_0[$:

$$\begin{aligned} \delta(A(t; p).A'(t; p)) &= -\frac{\partial \ln(A(t; p).A'(t; p))}{\partial t} = -\frac{\partial(\ln A(t; p) + \ln A'(t; p))}{\partial t} = \\ &= -\frac{\partial \ln A(t; p)}{\partial t} - \frac{\partial \ln A'(t; p)}{\partial t} = \delta(A(t; p)) + \delta(A'(t; p)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta(A(\cdot; p).A'(\cdot; p)) = \delta(A(\cdot; p)) + \delta(A'(\cdot; p)). \blacksquare \end{aligned}$$

Por último, consideremos la siguiente correspondencia:

$$\eta : \mathcal{V}_p^- \longrightarrow \mathcal{F}_p^-$$

definida por:

$$\xi \mapsto \eta(\xi) : [p, t_0[\rightarrow \mathcal{R}$$

dada, a su vez, por:

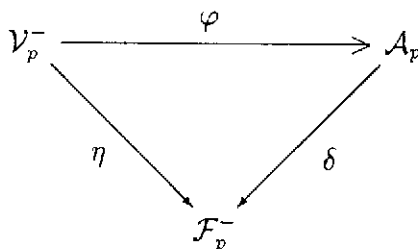
$$\eta(\xi)(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

siendo $f(t)$ la función de densidad y $F(t)$ la función de distribución de la variable aleatoria ξ .

La relación entre las correspondencias φ , δ y η queda establecida en el siguiente

3.8 Corolario

El diagrama



es conmutativo, es decir,

$$\boxed{\delta \circ \varphi = \eta}.$$

Además, se comporta como un homomorfismo para las variables aleatorias independientes entre sí. $\blacksquare$

3.9 Corolario

η es una aplicación inyectiva tal que

$$\eta(\min(\xi, \xi')) = \eta(\xi) + \eta(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí.

Demostración.- Es evidente. ■

4 MÁXIMO DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

En esta sección, vamos a realizar un estudio dual al expuesto en la Sección 3, pero considerando variables aleatorias absolutamente continuas que se concentran en un intervalo $]t_0, p[$, con la operación máximo y leyes financieras de capitalización en p , llegando a la construcción de un diagrama triangular conmutativo análogo al obtenido en el corolario 3.8.

4.1 Lema

Sean ξ_1 y ξ_2 dos variables aleatorias independientes con funciones de densidad $f_1(x)$ y $f_2(x)$ y con funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$, respectivamente. Entonces

$$\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$$

es también una variable aleatoria con función de densidad

$$g(x) = f_1(x).F_2(x) + f_2(x).F_1(x)$$

y con función de distribución

$$G(x) = F_1(x).F_2(x).$$

Demostración.- Véase Fisz (1.962, pp. 58-63). ■

Si llamamos $\mathcal{V}_p^+$ al conjunto formado por todas las variables aleatorias ξ absolutamente continuas que se concentran en un intervalo $]t_0, p[$ de extremo superior fijo, en este caso:

$$F_\xi(p) = 1, \quad F_\xi(t_0) = 0,$$

y podemos enunciar el siguiente

4.2 Teorema

$(\mathcal{V}_p^+, \max)$ es un semigrupo conmutativo.

Demostración.- Para ello, tenemos que demostrar que $\max$ es una ley de composición interna en $\mathcal{V}_p^+$. En efecto, $\forall \xi, \xi' \in \mathcal{V}_p^+$, si $M = \max(\xi, \xi')$ (supondremos también el caso general, es decir, que ξ y ξ' están correlacionadas):

$$F_M(t) = 1 - \int_t^{+\infty} \int_t^{+\infty} f_{\xi\xi'}(x, y) dx dy.$$

Por tanto,

$$F_M(p) = 1 - \int_p^{+\infty} \int_p^{+\infty} f_{\xi\xi'}(x, y) dx dy = 1$$

y

$$F_M(\min(t_0, t'_0)) = 0.$$

Luego $M \in \mathcal{V}_p^-$ y se concentra en el intervalo $]\min(t_0, t'_0), p[$.

Las propiedades asociativa y conmutativa se verifican en general. ■

Supongamos ahora que el *tanto instantáneo de crecimiento en t* de la variable aleatoria ξ :

$$c(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$$

coincide con el *tanto instantáneo en t* de la ley financiera $F(t; p)$ (salvo, a lo sumo, en un conjunto numerable de puntos):

$$\tau(t; p) = -\frac{\partial \ln F(t; p)}{\partial t}.$$

Entonces:

$$\boxed{F(t; p) = \frac{F(p)}{F(t)}}$$

Esta expresión es también un caso particular de los sistemas simplemente multiplicativos y asimismo nos ofrece una fórmula para generar leyes financieras a partir de funciones de distribución de variables aleatorias.

En el caso de que la variable aleatoria ξ sea absolutamente continua y se concentre a la izquierda de p , $F(p) = 1$ y $F(t; p) = \frac{1}{F(t)}$, lo que nos induce a considerar la siguiente correspondencia:

$$\varphi' : \mathcal{V}_p^+ \longrightarrow \mathcal{L}_p^{(3)}$$

definida por:

$$\xi \mapsto \varphi'(\xi) :]t_0, p] \longrightarrow [1, +\infty[,$$

tal que:

$$\varphi'(\xi)(t) = \frac{1}{F(t)}, \quad \forall t \in]t_0, p],$$

siendo éste el intervalo en cuyo interior se concentra ξ .

4.3 Teorema

φ' es una aplicación biyectiva tal que:

$$\varphi'(\max(\xi, \xi')) = \varphi'(\xi) \cdot \varphi'(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí.

Demostración.- Para ello, tenemos que demostrar que:

1ª) φ' está bien definida. En efecto, $\varphi'(\xi)$ es una ley financiera en p .

2ª) φ' es inyectiva. En efecto:

$$\text{Si } \varphi'(\xi) = \varphi'(\xi') \Rightarrow \forall t \in]t_0, p], F_\xi(t) = F_{\xi'}(t) \Rightarrow \xi = \xi',$$

por ser ξ y ξ' absolutamente continuas.

3ª) φ' es sobreyectiva. En efecto:

$$\forall L(t; p) \in \mathcal{L}_p, \exists \xi \in \mathcal{V}_p^+ / \varphi'(\xi) = L(t; p),$$

siendo ξ la variable aleatoria que se concentra en el interior $]t_0, p[$ del dominio de la ley financiera y cuya función de distribución es:

$$\forall t \in]t_0, p[, F(t) = \frac{1}{L(t; p)}.$$

a)

$$\varphi'(\xi)(t) = \frac{1}{F(t)} = L(t; p).$$

b) $F(t)$ es la función de distribución de una variable aleatoria ξ . En efecto:

1. $L(t; p)$ es una función no creciente de t . Por tanto, $F(t) = \frac{1}{L(t; p)}$ es una función no decreciente de t .
2. $\exists t_0 \in [-\infty, p[/ L(t_0; p) = +\infty \Rightarrow F(t_0) = 0$. Por tanto, $F(-\infty) = 0$. Además, $F(p) = \frac{1}{L(p; p)} = 1$. Luego $F(+\infty) = 1$.
3. $L(t; p)$ es continua con respecto a t y $L(t; p) \neq 0$. Por consiguiente, $F(t) = \frac{1}{L(t; p)}$ es también continua con respecto a t . Por ser absolutamente continua, F procede de una variable aleatoria continua.

Por tanto, φ' es biyectiva.

4^a)

$$\varphi'(\max(\xi, \xi')) = \varphi'(\xi) \cdot \varphi'(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí. En efecto,

$$\begin{aligned} \forall t \in]\min(t_0, t'_0), p], \varphi'(\max(\xi, \xi'))(t) &= \frac{1}{H(t)} = \\ &= \frac{1}{F_\xi(t)} \cdot \frac{1}{F_{\xi'}(t)} = \varphi'(\xi)(t) \cdot \varphi'(\xi')(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Consideremos ahora la siguiente correspondencia:

$$\delta' : \mathcal{L}_p \longrightarrow \mathcal{F}_p^+$$

(siendo $\mathcal{F}_p^+$ el homólogo de $\mathcal{F}_p^-$ en el intervalo $]t_0, p]$) definida por:

$$L(; p) \mapsto \delta'(L(; p)) :]t_0, p] \rightarrow \mathcal{R}$$

dada, a su vez, por:

$$\delta'(L(t; p)) = -\frac{\partial \ln L(t; p)}{\partial t},$$

siendo $]t_0, p]$ el dominio temporal de $L(; p)$.

Análogamente al Teorema 3.7, se demuestra el siguiente

4.4 Teorema

δ' es un isomorfismo de semigrupos. ■

Por último, consideremos ahora la siguiente correspondencia:

$$\eta' : \mathcal{V}_p^+ \longrightarrow \mathcal{F}_p^+$$

definida por:

$$\xi \mapsto \eta'(\xi) :]t_0, p] \rightarrow \mathcal{R}$$

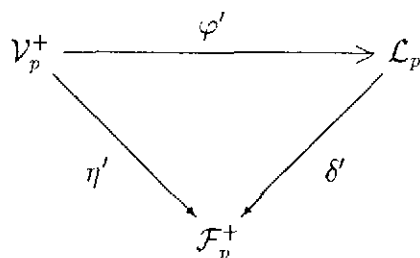
dada, a su vez, por:

$$\eta'(\xi)(t) = \frac{f(t)}{F(t)},$$

siendo $f(t)$ la función de densidad y $F(t)$ la función de distribución de la variable aleatoria ξ .

4.5 Corolario

El diagrama



es conmutativo, es decir,

$$\boxed{\delta' \circ \varphi' = \eta'}.$$

Además, se comporta como un homomorfismo para las variables aleatorias independientes entre sí. ■

4.6 Corolario

η' es una aplicación biyectiva tal que

$$\eta'(\max(\xi, \xi')) = \eta'(\xi) + \eta'(\xi'),$$

siendo ξ y ξ' variables aleatorias independientes entre sí.

Demostración.- Es evidente. ■

Finalmente, observemos que toda variable aleatoria que se concentra a la derecha de un punto p , genera otra variable aleatoria que se concentra a la izquierda de p . En efecto, si la función de distribución de una variable aleatoria es:

$$F : [p, +\infty[\longrightarrow [0, 1],$$

podemos definir

$$G :]-\infty, p] \longrightarrow [0, 1],$$

tal que:

$$G(t) = 1 - F(2p - t).$$

Si F y G verifican las condiciones de los teoremas anteriores, podemos construir sus correspondientes leyes financieras (de descuento y de capitalización, resp.), que, como se comprueba fácilmente, son *conjugadas*, es decir:

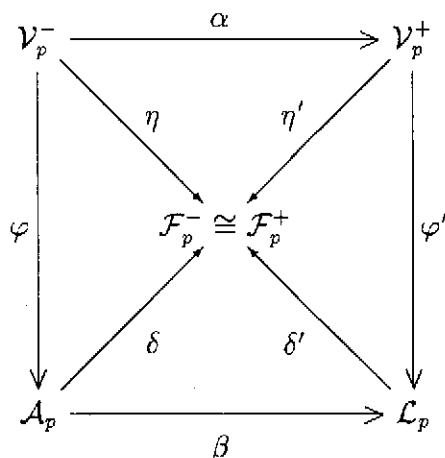
$$A(t; p) = 1 - F(t), \text{ para } t \geq p,$$

$$L(t; p) = \frac{1}{1 - F(2p - t)}, \text{ para } t \leq p.$$

Como consecuencia de todo ello, agrupando los diagramas obtenidos en los corolarios 3.8 y 4.5, podemos enunciar el siguiente

4.7 Corolario

El diagrama



está formado por triángulos conmutativos. ■

5 CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta el *principio de subestimación de las necesidades futuras*, el alejamiento de la disponibilidad de un bien debe ser compensado con un aumento de cuantía para que sean indiferentes, es decir, todo sujeto económico prefiere los bienes presentes sobre los futuros a igualdad de cantidad y calidad. Pues bien, si consideramos una unidad monetaria a lo largo del intervalo temporal $[p, +\infty[$, teniendo en cuenta que el tiempo es un *bien económico negativo*, se produce una subestimación o pérdida del valor real de dicha unidad monetaria en una cantidad creciente con respecto al tiempo. Dicho de otra forma, podemos considerar toda cuantía monetaria como un "sistema" cuyas "unidades" tienen fallos, por lo que la subestimación experimentada por la unidad puede ser considerada como la función de distribución de la variable aleatoria "momento en el que se produce el fallo de una unidad del sistema".

Es evidente que esta subestimación $F(t)$ de la unidad monetaria en el intervalo $[p, t]$ debe ser igual al descuento $D(t; p)$ producido por cierta ley financiera en dicho intervalo para que el capital $(1 - D(t; p), p)$ sea equivalente a $(1, t)$. En otras palabras,

$$F(t) = D(t; p) = 1 - A(t; p).$$

Este es el significado de la biyección entre ciertas variables aleatorias y leyes financieras de descuento, dada en el teorema 3.6. Así, por ejemplo, se puede demostrar que la ley de descuento compuesto al tanto i se corresponde con una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial negativa de parámetro $\lambda = \ln(1 + i)$, siguiendo el proceso descrito en el párrafo anterior.

Ahora bien, la subestimación anterior, de tipo económico-financiero, puede verse incrementada por la consideración de otras variables aleatorias como, por ejemplo, el instante en que se producirá un siniestro, etc.. Más concretamente, supóngase que una compañía de seguros "pacta" con un asegurado una ley financiera F . Considérese además un seguro objeto de contrato y que Y es una variable aleatoria que mide cualquier hecho relevante para este seguro (por ejemplo, el momento en que se producirá el primer siniestro, el tiempo de espera entre dos siniestros consecutivos, el número de siniestros en un intervalo de tiempo, etc.). Sea G la función de distribución de Y y consideremos que G verifica las condiciones pedidas en los teoremas anteriores. Pues bien, si lo que hemos asegurado es la ausencia de un suceso

en un intervalo temporal (no realización del primer siniestro, tiempo de espera entre dos siniestros consecutivos superior a un número dado, número de siniestros en un intervalo de tiempo inferior a uno dado, etc.), teniendo en cuenta que la ley financiera F se corresponde, según el teorema 3.6, con una variable aleatoria cuya tasa de fallo coincide con el tanto de descuento de F (de acuerdo con el corolario 3.8) y que, por tanto, refleja la subestimación de una unidad monetaria a lo largo del tiempo (debido a las expectativas sobre inflación, evolución de los tipos de interés y otras circunstancias de tipo económico-financiero previstas por la entidad aseguradora y que normalmente se reflejan en un tipo de interés técnico, ya que usualmente F es la capitalización compuesta), podemos considerar que la cantidad asegurada se pagará en caso de que no se produzca el suceso en cuestión y que el vencimiento del seguro esté dentro del dominio temporal de la ley financiera (es decir, que no se produzca la "pérdida" de la unidad monetaria). Dicho de otra forma, la cantidad asegurada se pagará en caso de que no se verifique la variable aleatoria $\min(X, Y)$ en el intervalo de tiempo considerado. Por tanto, tendríamos que encontrar una ley financiera cuyo tanto instantáneo fuese igual a la tasa de fallo de la variable aleatoria mencionada.

De este modo, el teorema 3.6 nos asegura la existencia de una ley financiera H tal que el valor actual esperado de cualquiera de las circunstancias relevantes para el seguro, se puede obtener trasladando en el tiempo el capital asegurado considerado en el instante final del período (que es un capital cierto), mediante H . En el caso concreto de que las variables X e Y fuesen independientes

$$H = F \cdot \varphi(Y).$$

Podemos realizar un estudio análogo al anterior en el supuesto de que pretendamos asegurar la realización de un suceso, obteniendo resultados análogos por aplicación del teorema 4.3.

Obsérvese que el factor de descuento obtenido en la Sección 3, es la fiabilidad del sistema cuya tasa de fallo coincide con el tanto instantáneo de descuento de la ley financiera correspondiente.

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos obtener los resultados conocidos de seguros y generalizarlos posteriormente. En efecto, entre las diversas modalidades de seguros que podemos contratar con una compañía aseguradora, destacamos dos:

1. El seguro de capital diferido o capital C pagadero al asegurado de edad x si vive a la edad $x+n$, en el que la tasa de fallo de la variable aleatoria ξ_x cuya función de distribución es:

$$F_x(k) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } k = x \\ {}_1q_x & , \text{ si } k = x + 1 \\ {}_2q_x & , \text{ si } k = x + 2 \\ {}_3q_x & , \text{ si } k = x + 3 \\ \vdots & , \vdots \\ {}_{w-x-1}q_x & , \text{ si } k = w - 1 \end{cases}$$

(siendo w la edad límite que ninguna persona llegará a alcanzar) coincide con el tanto instantáneo de descuento de la ley financiera adicional. Por tanto,

$$C_0 = C \cdot V^n \cdot (1 - F_x(x+n)) = C \cdot V^n \cdot (1 - {}_nq_x) = C \cdot V^n \cdot {}_np_x.$$

2. El seguro integral o capital C pagadero, al término del período fijado, si el asegurado fallece dentro de dicho período, en el que la tasa de crecimiento de la variable aleatoria ξ_x coincide con el tanto instantáneo de capitalización de la ley financiera adicional. Por tanto,

$$C = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{F_x(x+n)} = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{{}_nq_x}.$$

Ambos seguros pueden ser suscritos para cualquier intervalo temporal, aunque el segundo ellos suele ser aplicado en períodos anuales, ya que la condición de fallecimiento conlleva generalmente la de pago de la cantidad asegurada al final del año en que se produce el óbito, por lo que la modalidad de seguro de capital para caso de muerte consistiría en una suma de n seguros de capital diferido en períodos anuales consecutivos, con lo cual la prima única a satisfacer por el asegurado sería:

$$C_0 = \sum_{k=1}^n (1+i)^{-k} \cdot {}_{k-1}q_x,$$

siendo ${}_{k-1}q_x$ la probabilidad de fallecimiento de una persona de edad x , durante el k -ésimo año siguiente.

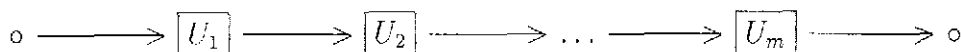
Pues bien, estas modalidades de seguro y todas las que se derivan de ellas pueden ser generalizadas a cualquier sistema en que intervenga el riesgo o la incertidumbre, elementos que pueden ser traducidos en variaciones del tipo de interés. En efecto, consideremos un sistema que tiene asignada una determinada misión en el intervalo de tiempo (p, t) . Si el coste inicial de esta misión es C_0 (por ejemplo, coste de las materias primas), el valor final del output resultante será:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n,$$

siendo i la rentabilidad que queremos obtener inicialmente, cantidad que deberá ser incrementada por el riesgo consistente en la posibilidad de que el sistema tenga fallos. Así, si la tasa de fallo del sistema es muy alta, el coste final deberá ser mayor que si el sistema utiliza un procedimiento más perfeccionado.

Además, podemos aplicar los resultados anteriores a seguros de colectivos de personas o a fiabilidades de grupos de sistemas (Fernández de Trocóniz (1.969, pp. 5.1.1.1-5.4.2.7)), obteniendo, por el teorema 3.6 o por el teorema 4.3, un comportamiento multiplicativo de las leyes financieras asociadas a variables aleatorias independientes entre sí.

En efecto, consideremos un sistema "de tipo serie", es decir, un sistema formado por m partes $U_1, U_2, \dots, U_m$, que falla en cuanto falle una, varias o todas ellas. De esta definición se deduce un esquema muy análogo al de los circuitos eléctricos formado por varios contactos en serie:



Si llamamos ξ_i a la edad aleatoria de fallo de la i -ésima parte del sistema, no cabe duda que la edad aleatoria de fallo del sistema completo será $N = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, siendo m el número de partes del sistema. Por tanto, si lo que hemos asegurado es su funcionamiento en un período de tiempo $[t_1, t_2]$, el factor adicional de descuento será la fiabilidad del sistema en dicho intervalo:

$$\frac{1 - F_N(t_2)}{1 - F_N(t_1)}.$$

o, en caso de independencia en el funcionamiento de las m partes del sistema:

$$\frac{1 - F_1(t_2)}{1 - F_1(t_1)} \cdot \frac{1 - F_2(t_2)}{1 - F_2(t_1)} \cdots \frac{1 - F_m(t_2)}{1 - F_m(t_1)},$$

siendo F_i la función de distribución de ξ_i ; $i = 1, 2, \dots, m$.

Si lo que pretendemos asegurar es el fallo del sistema en el intervalo $[t_1, t_2]$, el factor adicional de capitalización será el correspondiente a la ley de capitalización que se obtiene por conjugación de la anterior de descuento (corolario 4.7):

$$\frac{F_N(t_2)}{F_N(t_1)}.$$

Estos sistemas son los más frecuentes en las diversas tecnologías. Por ejemplo, si un sistema electrónico está dispuesto, con estructura funcional de tipo serie, por 20.000 componentes cada una de las cuales tiene una fiabilidad 0'99999, el factor adicional de capitalización será, en caso de independencia en el funcionamiento de dichas componentes:

$$\frac{1}{0'99999^{20.000}} = 6'6 \dots$$

Los sistemas de tipo paralelo también tienen cabida en nuestro estudio. Diremos que las partes $U_1, U_2, \dots, U_m$ con actuación simultánea forman un sistema redundante de tipo paralelo si cada una de ellas por sí sola es capaz de garantizar el cumplimiento de la misión. Como consecuencia de ello, el sistema sobrevive en cuanto sobrevivan una, varias o todas éstas. Así, la edad aleatoria de fallo del sistema completo será $M = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$. Por tanto, si lo que hemos asegurado es su fallo en un período de tiempo $[t_1, t_2]$, el factor adicional de capitalización en dicho intervalo será:

$$\frac{F_M(t_2)}{F_M(t_1)},$$

o, en caso de independencia en el funcionamiento de las m partes del sistema:

$$\frac{F_1(t_2)}{F_1(t_1)} \cdot \frac{F_2(t_2)}{F_2(t_1)} \cdots \frac{F_m(t_2)}{F_m(t_1)}.$$

Si lo que pretendemos asegurar es la supervivencia del sistema en el intervalo $[t_1, t_2]$, el factor adicional de descuento será el correspondiente a la ley de descuento que se obtiene por conjugación de la anterior de capitalización (corolario 4.7):

$$\frac{1 - F_M(t_2)}{1 - F_M(t_1)}.$$

Como comentario final, hemos de indicar que todo este desarrollo podría ser reelaborado con la operación $\oplus$ definida en la Sección 3, sin más que sustituir el tanto instantáneo por el tanto instantáneo acumulado:

$$\mu(t) = -\frac{\partial L(t;p)}{\partial t} \text{ ó } \nu(t) = -\frac{\partial A(t;p)}{\partial t}.$$

NOTAS

(1) Es preciso hacer notar que cualquiera de los enfoques anteriores trabaja simultáneamente con leyes financieras (que son continuas) y variables aleatorias discretas. Para una definición de ley financiera en tiempo discreto, véase Cruz (1.994, pp. 85-91).

(2) En lo que sigue, $\mathcal{A}_p$ será el conjunto de todas las leyes financieras de descuento en p que, además, son regulares, es decir, aquellas para las que existe un $t_0 \geq p$ tal que $A(t_0, p) = 0$ (eventualmente, t_0 puede ser $+\infty$).

(3) En lo que sigue, $\mathcal{L}_p$ será el conjunto de todas las leyes financieras de capitalización en p que, además, son regulares, es decir, aquellas para las que existe un $t_0 \leq p$ tal que $L(t_0, p) = +\infty$ (eventualmente, t_0 puede ser $-\infty$).

BIBLIOGRAFÍA

Ames, E. (1983): *Automaton and Group Structures in Certain Economic Adjustment Mechanisms*. Mathematical Social Sciences 6, North-Holland, Amsterdam, pp. 247-260.

Apostol, T.M. (1991): *Calculus*. Editorial Reverté, Barcelona.

Bhaumik, R.N. y Das, A. (1984): *The Role of Preference Relations in Mathematical Economics*. The Mathematics Student (Vol. 52, Nos. 1-4), pp. 1-24.

Cruz, S. (1994): *Nuevo enfoque de las leyes financieras a través de la Teoría Algebraica de Autómatos (Tesis Doctoral)*. U.N.E.D., Madrid.

De Pablo, A. (1993): *Planes y Fondos de Pensiones (Introducción)*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Fernández de Trocóniz, A. (1969): *Introducción a la fiabilidad*. Ed. Argol, Bilbao.

Fisz, M. (1962): *Probability Theory and Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

Gil, L. (1993): *Matemática de las Operaciones Financieras*. Editorial AC, Madrid.

Insolera, F. (1950): *Curso de Matemática Financiera y Actuarial*. Editorial Aguilar, Madrid.

Kingman, J.F. and Taylor, S.J. (1966): *Introduction to Measure and Probability*. Cambridge University Press, London.

Loeve, M. (1976): *Teoría de la Probabilidad*. Editorial Tecnos, Madrid.

Maravall, D. (1976): *Estadística Teórica y Aplicada*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Maravall, D. (1970): *Matemática Financiera*. Editorial Dossat, Barcelona.

Maravall, D. (1967): *La G-topología del semigrupo de las distribuciones de frecuencia y la teoría analítica de la probabilidad*. Revista Matemática Hispano-Americana, pp. 234-259.

Ríos, S. (1985): *Métodos Estadísticos*. Ediciones del Castillo, Madrid.

Rodríguez, A. (1984): *Matemática de la Financiación*. Romargraf, S.A., Barcelona.

Vegas, J. y Nieto, U. (1993): *Matemática Actuarial*. Editorial Mapfre, Madrid.

White, A. J. (1973): *Introducción al análisis real*. Ediciones de Promoción Cultural, S.A., Barcelona.