

Estudios de Economía Aplicada (1996)  
No. 5, pág. 161-175

# Comportamiento en muestras pequeñas de los atípicos innovacionales: Un ejercicio de simulación

F. JAVIER TRIVEZ  
JAVIER NIEVAS  
*Universidad de Zaragoza*

## RESUMEN

Los atípicos u *outliers* innovacionales (IO), en el límite (esto es, asintóticamente y considerando un tamaño de dichos *outliers* suficientemente grande) no producen efecto alguno en las funciones de autocorrelación. Esto implica que la presencia de IO nos llevaría, en el límite, a identificar correctamente el proceso generador de la serie temporal objeto de estudio. El objetivo de este artículo consiste en analizar mediante un ejercicio de simulación el cumplimiento de este resultado teórico (límite); en concreto, se trata de analizar si, efectivamente, para cualquier tamaño de *outliers* innovacionales presentes en una serie temporal, las funciones de autocorrelación muestrales no se ven afectadas por dichos atípicos.

*Palabras Clave:* Outlier innovacional, Función de autocorrelación, Función de autocorrelación parcial

---

Este artículo se ha realizado dentro de los Proyectos de investigación PB94-1182 y PB94-0602 patrocinados por la DGICYT. Los autores desean agradecer los comentarios y sugerencias de un evaluador anónimo.

Recibido Enero 96; Revisado Marzo 96.

## 1. Introducción

Las series temporales se encuentran frecuentemente contaminadas por observaciones espúreas que son inconsistentes con el resto de los datos de la serie temporal. A tales observaciones (atípicas) se les denomina habitualmente como *outliers*. Estos *outliers* pueden llegar a causar verdaderos estragos en el análisis de series temporales, afectando a todas y cada una de las etapas del método propuesto por Box y Jenkins (1976) para el análisis univariante de series temporales: identificación, estimación, chequeo y predicción.

Los efectos de las observaciones atípicas sobre dichas etapas de la modelización Box-Jenkins, sin embargo, no son los mismos para cualquier tipo de *outlier*. De hecho, de entre los distintos tipos de *outliers* considerados en la literatura (ver Hillmer et al., 1983, Chen y Tiao, 1990 y Chen y Liu, 1993), en Trávez (1993, 1994a, 1995) puede verse cómo los efectos en la estimación y predicción de los modelos ARIMA son bien distintos según cual sea el atípico considerado. Por lo que respecta al *outlier* innovacional (*Innovational Outlier*, IO), que es aquel suceso que afecta a la serie de innovación del proceso ARIMA- ver la sección 2-, Trávez (1994b) ha demostrado que el no tratamiento del mismo no produce sesgo alguno en la estimación de los coeficientes de los modelos ARIMA, mientras que, por lo que respecta a la predicción, sí bien no afecta a la exactitud de las predicciones puntuales, sí que incrementa la amplitud de los intervalos de confianza de dichas predicciones, afectando, en consecuencia, al contenido informativo de dichos modelos.<sup>1</sup>

El objetivo de este artículo consiste en analizar si la existencia (y no tratamiento) de los *outliers* innovacionales producen algún efecto en la especificación (identificación) del proceso estocástico subyacente a la serie temporal objeto de estudio, esto es, en la función de autocorrelación muestral (FACM), que denotaremos mediante  $\{r_j\}$ . En este sentido, Chan (1995) ha analizado el comportamiento límite teórico de la FACM para distintos tipos de *outliers*, demostrando que en el límite, mientras que la presencia de un *outlier* aditivo lleva a eliminar totalmente la información contenida en la FACM (lo que nos conduciría a la identificación de procesos estocásticos tipo ruido blanco, con independencia del proceso estocástico generador de la serie libre de *outliers*), en el caso del *outlier* innovacional, éste dejará en el límite invariable la FACM. Esto

---

<sup>1</sup> Los términos "exactitud" y "contenido informativo" deben entenderse de acuerdo con la nomenclatura enunciada en Aznar (1989), Trávez (1992) y Aznar y Trávez (1993).

significa que, en el límite (esto es, asintóticamente y para un tamaño del *outlier* tendente a infinito) los IO no producen ningún error de especificación, esto es, conducen a identificar el proceso estocástico generador de la serie libre de *outliers*.

En este artículo se trata de analizar mediante un ejercicio de simulación si este resultado límite teórico conocido se produce para cualquier magnitud de los IO presentes en las series temporales. Para ello, el artículo se estructura como sigue. En la sección 2 se presenta la notación y el resultado (asintótico) teórico referido a las consecuencias que los *outliers* innovacionales tienen sobre la FACM; a continuación, en la sección 3 se presentan los principales resultados del ejercicio de simulación efectuado, el cual se ha restringido a dos de los procesos estocásticos más habitualmente considerados en la literatura, el AR(1) y el MA(1).

## 2. Comportamiento límite de la FACM ante la presencia de outliers innovacionales

Denominemos  $y_t$  a la serie temporal objeto de estudio y  $z_t$  a la misma serie temporal, pero libre de *outliers*. Suponiendo que  $z_t$  sigue un proceso ARIMA  $(p,d,q)$ , escribiremos:

$$\phi(L)(1-L)^d z_t = \theta(L)a_t \quad (2.1)$$

donde:

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p; \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q$$

son operadores estacionarios e invertibles, esto es, tales que las raíces de  $\phi(L) = 0$  y  $\theta(L) = 0$  caen fuera del círculo unitario, donde  $L$  es el operador de retardos, tal que  $L^s x_t = x_{t-s}$ , sin raíces comunes, y siendo  $a_t$  una secuencia de variables aleatorias que se distribuyen idéntica e independientemente con media cero y varianza  $\sigma_a^2$ .

Una forma alternativa de escribir (2.1) es:

$$z_t = \psi(L)a_t, \quad \psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots = \theta(L) / \phi(L)(1-L)^d \quad (2.2)$$

Además, denotando por  $\rho_j$  la función de autocorrelación para el modelo (2.1), a partir de la cual puede caracterizarse dicho modelo, la estimación de dicha función permite identificar a partir de una serie temporal el modelo ARIMA que subyace a la misma<sup>1</sup>. En consecuencia, el estimador que utilizaremos para la identificación de los modelos ARIMA es la FACM ( $r_j$ ), que se definen como sigue:

$$r_j = \frac{\sum_{t=j+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-j} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (2.3)$$

donde:  $\bar{y} = \frac{\sum y_t}{T}$ .

A diferencia del outlier aditivo (AO), que es un suceso (efecto externo) que afecta a una serie (output) en un sólo instante temporal ( $t = t_0$ ), el outlier innovacional (IO) es aquel suceso que afecta a la serie de innovación  $\{a_t\}$ , y cuyo efecto se propaga en conformidad con el modelo ARIMA del proceso, afectando a los valores observados después de su ocurrencia. Lo representaremos, por tanto, como sigue:

$$y_t = z_t + \omega \psi(L) \xi_t \quad (2.4)$$

donde:

$$\xi_t = \begin{cases} 1, & \text{si } t = t_0 \\ 0, & \text{si } t \neq t_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

es la variable que representa la presencia o ausencia del outlier, siendo  $\omega$  el efecto de dicho outlier.

En un modelo con outlier innovacional como el definido en (2.1) y (2.4), Chan (1995) demuestra que asintóticamente, y considerando que la magnitud del

---

<sup>1</sup> Como es bien conocido, también puede caracterizarse el modelo ARIMA a partir de la función de autocorrelación parcial. De hecho, el proceso de identificación suele llevarse a cabo atendiendo a la estimación de ambas funciones de autocorrelación. Sin embargo, bastará con que nos centremos, de momento, en la función de autocorrelación, dado que la función de autocorrelación parcial siempre puede escribirse en términos de la primera.

*outlier* tiende a infinito, el coeficiente de autocorrelación muestral tiende al coeficiente de autocorrelación poblacional. Esto es:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\text{plim}_{\omega \rightarrow \infty} r_j) = \rho_j \quad (2.6)$$

A partir de (2.6) podemos concluir que la presencia de un *outlier* innovacional en una serie temporal no produce, en el límite, sesgo alguno en la FACM, esto es, conduce a identificar correctamente el proceso ARIMA generador de la serie libre de *outliers* innovacionales. Ahora bien, este resultado límite teórico, ¿se cumplirá para tamaños de IO más pequeños? Para responder a esta cuestión, en la próxima sección se lleva a cabo un ejercicio de simulación considerando dos modelos ARIMA concretos, el AR(1) y el MA(1).

### 3. Ejercicio de simulación

#### 3.1. Proceso AR(1)

En el caso del proceso AR(1), la serie libre de *outliers* se modelizará como:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t, \quad |\phi_1| < 1 \quad (3.1)$$

Dicho proceso AR(1) puede caracterizarse a partir de la función de autocorrelación ( $\rho_j$ ) y la función de autocorrelación parcial ( $\phi_{jj}$ ), que son iguales, en este caso, a:

$$\rho_j = \phi_1^j, \quad \text{para } j \geq 1; \quad \phi_{jj} = \begin{cases} \phi_1, & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Esta misma serie, pero con un IO, se escribirá, ver (2.4), como:

$$y_t = z_t + \omega \psi(L) \xi_t \quad (3.3)$$

siendo:

$$z_t = \frac{a_t}{(1 - \phi_1 L)}; \quad \psi(L) = \frac{1}{(1 - \phi_1 L)} = 1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \dots \quad (3.4)$$

A partir de (3.3) y (3.4) se observa cómo el IO causa un efecto en la serie observada en el período  $t_0$  de magnitud  $\omega$ , que se propaga en el futuro, si bien con un efecto cuya magnitud va decreciendo. Esto es, se cumple:

$$y_t = \begin{cases} z_t, & \text{para } t < t_0 \\ z_t + \omega\phi_j^j, & \text{para } t = t_0 + j, \quad j = 1, 2, \dots, T - t_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Las expresiones (3.3) y (3.4) pueden generalizarse al caso en que acontezcan  $k$  outliers innovacionales, escribiendo:

$$y_t = z_t + \sum_{j=1}^k \omega_j \psi_j(L) \xi_{jt} \quad (3.6)$$

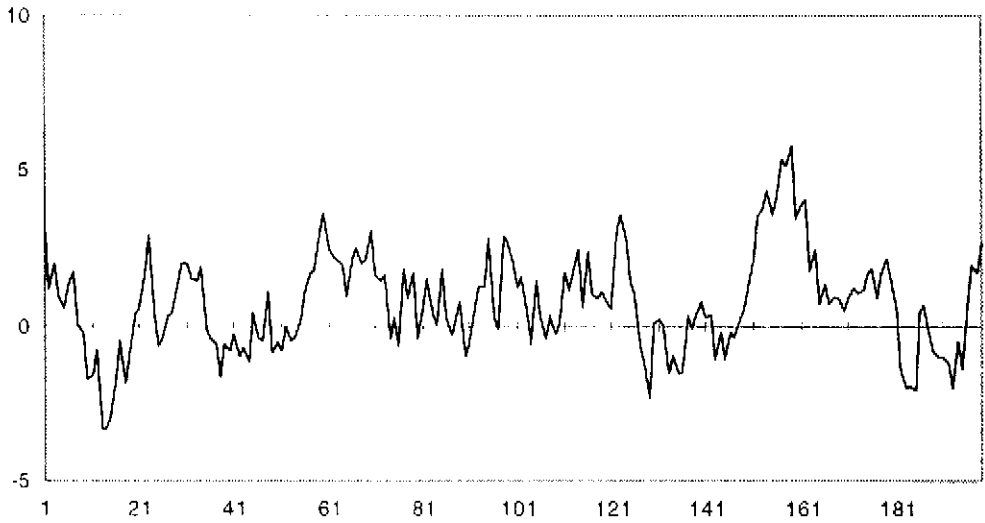
con  $z_t$  y  $\psi_j(L)$  definidos como en (3.4), e indicando la variable impulso  $\xi_{jt}$  la ocurrencia en el período  $t_j$  del IO  $j$ -ésimo.

Comenzaremos el ejercicio de simulación<sup>1</sup> obteniendo una serie temporal  $\{z_t\}$  de diferentes tamaños muestrales ( $T=100, 200, 900$ ), generada a partir de un proceso AR(1), expresión (3.1), considerando los siguientes valores de los parámetros del modelo:  $\phi_1 = \{0.5, 0.8\}$  y  $\sigma_{\epsilon_1} = 1$ . Una representación de una serie temporal generada por un proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$  y  $T = 200$  se muestra en la figura 1.

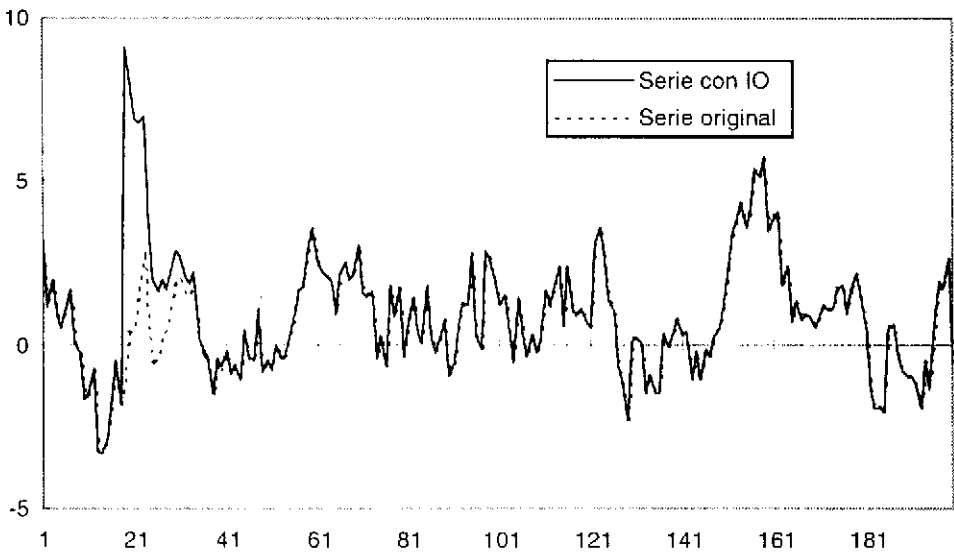
A continuación, se ha simulado la serie temporal con un outlier innovacional,  $\{y_t\}$ , para los mismos tamaños muestrales y valores de los parámetros del modelo AR(1) enunciados más arriba, y suponiendo los siguientes tamaños (magnitudes) de los outliers  $\omega = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$ .<sup>2</sup> Para comprobar si el efecto del outlier depende del instante temporal (más o menos próximo al inicio o final de la serie) en que tiene lugar, se ha repetido el ejercicio comentado considerando  $t_0 = \{0.1T, 0.5T, 0.95T\}$ . En la figura 2, en la que se recoge una serie temporal simulada para los mismos valores de los parámetros que la serie de la figura 1, pero con un outlier innovacional de magnitud  $\omega = 10\sigma_{\epsilon_1}$  y  $t_0 = 0.1T = 20$ , se comprueba cómo se cumple el efecto del IO enunciado en (3.5).

<sup>1</sup> El programa informático utilizado ha sido el SCA (*Scientific Computing Associates*), ver Hudak et al. (1991).

<sup>2</sup> Obsérvese que como  $\sigma_{\epsilon_1} = 1$ , las magnitudes de los IO considerados están expresados directamente en términos de desviaciones típicas del término de error del proceso generador de datos.



**Figura 1.-** Serie generada por un proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\sigma_a = 1$ .  $T = 200$ .



**Figura 2.-** Serie generada por un proceso AR(1) -con  $\phi_1 = 0.8$ ,  $\sigma_a = 1$ - y un IO en  $t_0 = 20$ , de magnitud  $\omega = 10$ .  $T = 200$ .

Cuadro 1.- Valores medios de las FACM y FAPM de las series simuladas mediante un proceso AR(1) con un IO. ( $\phi_1 = 0.8$ )

$\omega$	T= 100						T= 200						T= 900						
	0	5	10	20	50	100	0	5	10	20	50	100	0	5	10	20	50	100	
$r_1 = \hat{\phi}_{11}$	0.762	0.761	0.762	0.769	0.778	0.779	0.777	0.779	0.778	0.785	0.789	0.790	0.795	0.795	0.796	0.795	0.797	0.798	0.798
		0.757	0.761	0.771	0.778	0.779		0.779	0.781	0.784	0.789	0.790		0.796	0.797	0.797	0.797	0.798	0.798
		0.754	0.751	0.755	0.757	0.758		0.778	0.780	0.782	0.787	0.789		0.795	0.797	0.796	0.797	0.798	0.798
$r_2$	0.578	0.576	0.575	0.587	0.600	0.602	0.602	0.604	0.603	0.614	0.620	0.623	0.631	0.631	0.633	0.631	0.634	0.636	0.636
		0.567	0.575	0.591	0.600	0.602		0.605	0.608	0.613	0.620	0.623		0.632	0.634	0.634	0.636	0.636	0.636
		0.562	0.557	0.555	0.556	0.558		0.603	0.606	0.609	0.618	0.620		0.632	0.635	0.634	0.636	0.636	0.636
$r_3$	0.435	0.432	0.428	0.443	0.458	0.460	0.465	0.467	0.466	0.478	0.486	0.488	0.501	0.501	0.504	0.500	0.504	0.506	0.506
		0.418	0.428	0.450	0.458	0.460		0.468	0.471	0.478	0.485	0.488		0.503	0.505	0.505	0.507	0.507	0.507
		0.408	0.401	0.391	0.388	0.390		0.464	0.468	0.473	0.482	0.485		0.502	0.506	0.504	0.506	0.506	0.507
$r_4$	0.322	0.318	0.313	0.331	0.345	0.346	0.357	0.359	0.357	0.370	0.379	0.381	0.397	0.397	0.400	0.395	0.401	0.402	0.402
		0.303	0.314	0.336	0.344	0.346		0.359	0.362	0.371	0.377	0.381		0.399	0.402	0.402	0.403	0.403	0.403
		0.290	0.272	0.255	0.245	0.245		0.355	0.359	0.365	0.373	0.375		0.399	0.403	0.400	0.403	0.403	0.403
$r_5$	0.231	0.228	0.224	0.241	0.254	0.255	0.273	0.275	0.272	0.285	0.293	0.294	0.315	0.315	0.317	0.311	0.317	0.319	0.319
		0.214	0.226	0.246	0.253	0.255		0.274	0.276	0.286	0.290	0.295		0.317	0.320	0.319	0.321	0.321	0.321
		0.194	0.164	0.137	0.118	0.116		0.269	0.272	0.279	0.286	0.287		0.316	0.321	0.317	0.320	0.321	0.321
$\hat{\phi}_{22}$	-0.016	-0.019	-0.022	-0.016	-0.013	-0.013	-0.010	-0.011	-0.009	-0.010	-0.006	-0.006	-0.003	-0.003	-0.002	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002
		-0.027	-0.016	-0.013	-0.014	-0.013		-0.009	-0.010	-0.009	-0.008	-0.005		-0.003	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.001
		-0.029	-0.026	-0.038	-0.040	-0.040		-0.011	-0.011	-0.011	-0.006	-0.008		-0.003	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	-0.001



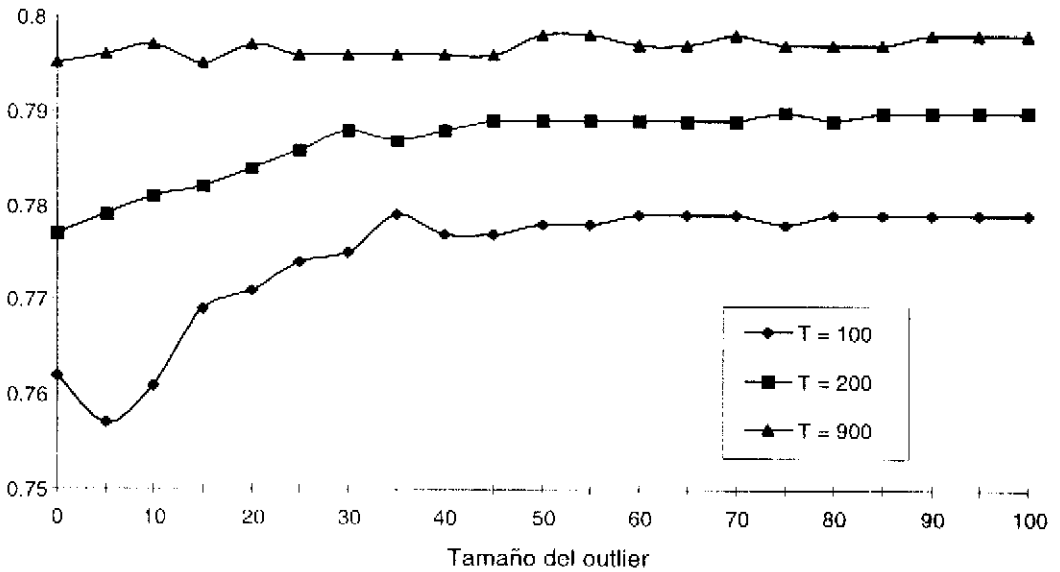
El mismo procedimiento descrito se ha replicado 1000 veces para cada una de las posibles combinaciones respecto a tamaño muestral, valor de los parámetros, magnitud del IO y período de ocurrencia del mismo, calculando para cada una de dichas combinaciones el valor medio, tanto de las cinco primeras autocorrelaciones muestrales, como de las dos primeras autocorrelaciones parciales muestrales. En el cuadro 1 se presentan los resultados obtenidos considerando que el coeficiente autorregresivo es igual a 0.8.<sup>1</sup> En este caso, según se desprende de (3.2), los coeficientes de autocorrelación, y autocorrelación parcial, teóricos son:  $\rho_1 = \phi_{11} = 0.8$ ,  $\rho_2 = 0.64$ ,  $\rho_3 = 0.512$ ,  $\rho_4 = 0.41$ ,  $\rho_5 = 0.328$ ,  $\phi_{22} = 0$ .

Los resultados que se incluyen en el cuadro 1 deben interpretarse como sigue. En la primera columna, para cada tamaño muestral (T), esto es, cuando  $\omega = 0$ , se incluyen los  $r_j$  y  $\hat{\phi}_{jj}$  correspondientes a las series simuladas a partir de un proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$  y sin observaciones atípicas; por lo que respecta a las restantes columnas, correspondientes a series simuladas a partir del mismo proceso AR(1), pero con *outliers* innovacionales de tamaño  $\omega$ , aparecen tres valores para cada coeficiente de autocorrelación, correspondientes a cada uno de los instantes temporales en que se ha supuesto que tiene lugar el IO; en concreto, los valores superiores son los correspondientes a suponer que el IO tiene lugar al principio de la muestra (en  $t_0 = 0.1T$ ), los valores centrales corresponden a un IO en mitad de la muestra ( $t_0 = 0.5T$ ) y, por último, los valores inferiores son los relativos a la ocurrencia del IO al final de la muestra (en  $t_0 = 0.95T$ ).

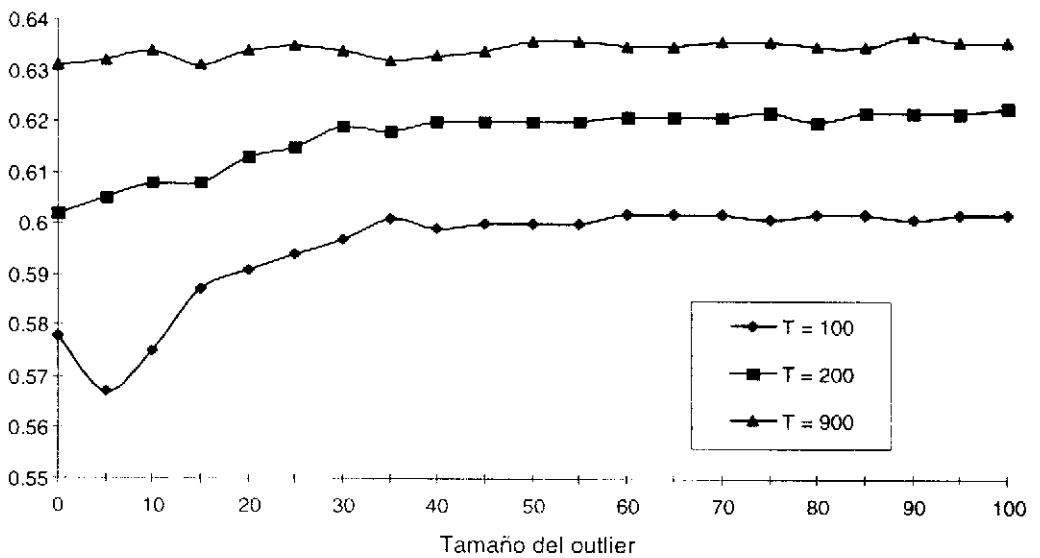
Los resultados del cuadro 1 son concluyentes en lo concerniente al cumplimiento del resultado teórico escrito en (2.6). En efecto, el *outlier* innovacional no produce sesgo significativo alguno en las estimaciones de las FACM y FAPM del proceso AR(1) generador de la serie. Tan sólo en el caso de series temporales de tamaño reducido ( $T = 100$ ), se producen algunos sesgos significativos en los coeficientes de autocorrelación, si bien con independencia de la inclusión, o no, de *outliers* innovacionales en las series.

---

<sup>1</sup> Los resultados correspondientes al caso en que  $\phi_1 = 0.5$  no se adjuntan por no aportar ninguna información adicional.



**Figura 3.-** Coeficiente de autocorrelación muestral de primer orden de series simuladas a partir de un proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$  y un IO. Efecto del tamaño del IO para varios tamaños muestrales.



**Figura 4.-** Coeficiente de autocorrelación muestral de segundo orden de series simuladas a partir de un proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$  y un IO. Efecto del tamaño del IO para varios tamaños muestrales.

Para tamaños muestrales más grandes (por ejemplo,  $T = 200$ ), los valores de los coeficientes de autocorrelación muestrales con, y sin, IO son prácticamente idénticos; en todo caso, la aparición de *outliers* innovacionales antes que producir sesgos, lo que tienden es a reducirlos, tal y como puede observarse a partir del cuadro 1 y de las figuras 3 y 4, en las que se recogen los coeficientes de autocorrelación muestrales de primer y segundo orden de series simuladas a partir del proceso AR(1) con  $\phi_1 = 0.8$  y un IO de tamaño  $\omega = 5, 10, \dots, 100$ , que acontece en el período correspondiente a la mitad del tamaño muestral considerado

### 3.2. Proceso MA(1)

En el caso del proceso MA(1), la serie libre de *outliers* se modelizará como:

$$z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1 \quad (3.7)$$

La funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial que caracterizan a este proceso difieren de las anteriores, ya que los coeficientes que ahora se anulan a partir del orden del proceso son los  $r_j$ . En concreto, dichas funciones de autocorrelación son iguales a:

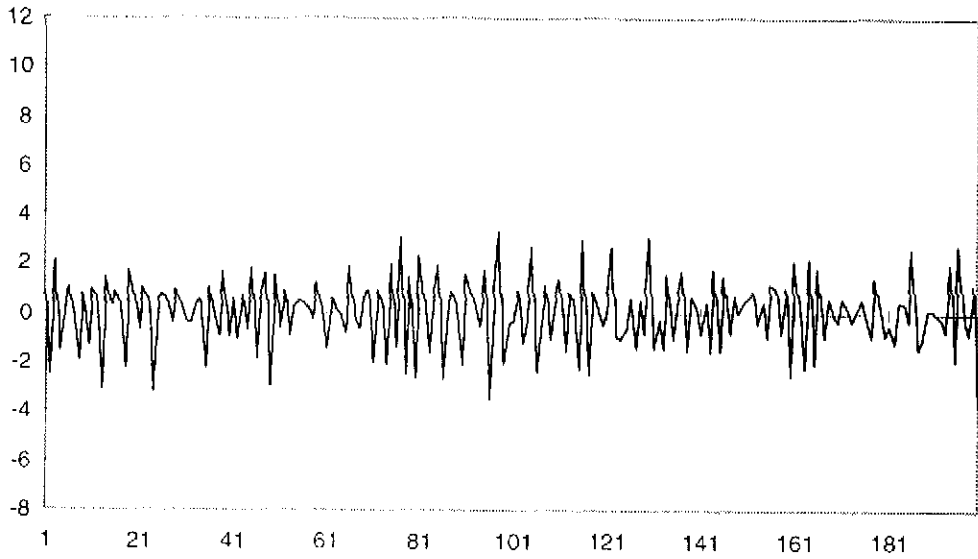
$$\rho_j = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & \text{para } j = 1 \\ 0, & \text{para } j > 1 \end{cases} \quad \phi_{jj} = \frac{-\theta_1^j (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(j+1)}}, \quad \text{para } j \geq 1 \quad (3.8)$$

La serie con un IO se escribirá, nuevamente, como en (2.4), pero teniendo en cuenta que ahora  $z_t$  y  $\psi(L)$  serán iguales a:

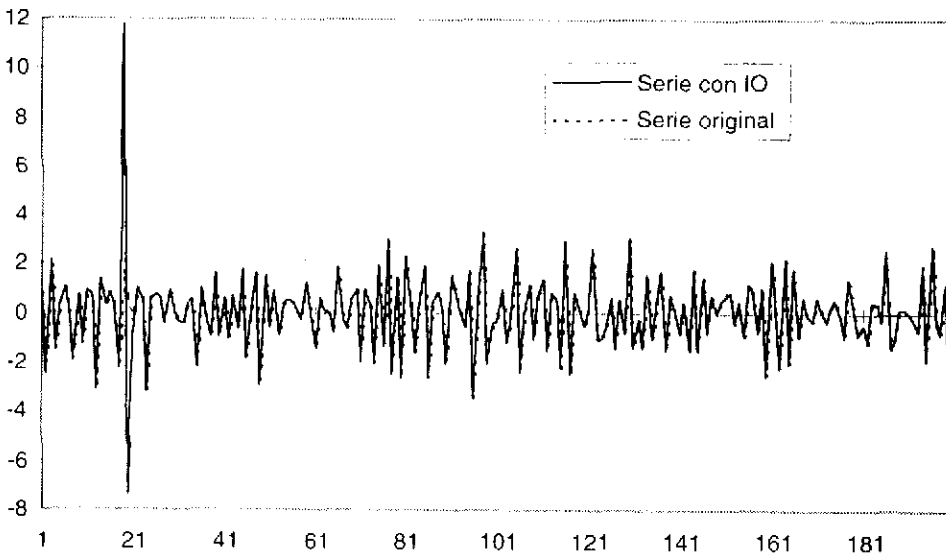
$$z_t = (1 - \theta_1 L)a_t \quad ; \quad \psi(L) = \theta(L) = (1 - \theta_1 L) \quad (3.9)$$

Desde (2.4) y (3.9) se deduce que, a diferencia de lo que ocurría en el caso de un proceso AR(1), en el caso de un MA(1), el IO causa un efecto en la serie observada en el período de ocurrencia del mismo ( $t_0$ ) y en el período siguiente. Esto es, sustituyendo (3.9) en (2.4), se obtiene:

$$y_t = z_t + \omega(1 - \theta_1 L)\xi_t = z_t + \omega\xi_t - \omega\theta_1\xi_{t-1} \quad (3.10)$$



**Figura 5.-** Serie generada por un proceso MA(1) con  $\theta_1 = 0.8$ ,  $\sigma_a = 1$ .  $T = 200$ .



**Figura 6.-** Serie generada por un proceso MA(1) -con  $\theta_1 = 0.8$ ,  $\sigma_a = 1$ - y un IO en  $t_0 = 20$ , de magnitud  $\omega = 10$ .  $T = 200$ .

Y, en consecuencia, el efecto del IO sobre la serie se concreta en:

$$y_t = \begin{cases} z_t, & \text{para } t < t_0 \\ z_t + \omega, & \text{para } t = t_0 \\ z_t - \omega\theta_1, & \text{para } t = t_{0+1} \\ z_t, & \text{para } t > t_{0+1} \end{cases} \quad (3.11)$$

En las figuras 5 y 6 se representan, respectivamente, una serie temporal generada por un proceso MA(1) con  $\theta_1 = 0.8$  y  $T = 200$  sin ningún *outlier*, y con un IO de magnitud  $\omega = 10\sigma_a$  que acontece en el período 20 de la serie ( $t_0 = 20$ ).

El ejercicio de simulación que hemos llevado a cabo para series generadas a partir de procesos MA(1) con IO es idéntico al expuesto en el apartado 3.1. La única diferencia entre ambos ejercicios de simulación reside en que, como consecuencia de (3.8), hemos obtenido sólo la media de las dos primeras autocorrelaciones muestrales, frente a las cinco del caso AR(1); aunque, por contra, se han calculado siempre las medias de las cinco primeras autocorrelaciones parciales muestrales, frente a las dos que se calculaban en el apartado 3.1.

En el cuadro 2 se presentan los resultados obtenidos considerando que  $\theta_1 = 0.8$ . En este caso, los coeficientes de autocorrelación, y autocorrelación parcial, teóricos, que se obtienen a partir de (3.8), son:  $\phi_{11} = \rho_1 = -0.488$ ,  $\phi_{22} = -0.311$ ,  $\phi_{33} = -0.221$ ,  $\phi_{44} = -0.166$ ,  $\phi_{55} = -0.126$ ,  $\rho_2 = 0$ .

A partir de los resultados incluidos en el cuadro 2 se observa el cumplimiento del resultado teórico escrito en (2.6), confirmándose que, al menos en los modelos analizados, la presencia de atípicos innovacionales (de cualquier tamaño) no produce efecto negativo alguno en la estimación de las funciones de autocorrelación.

Cuadro 2.- Valores medios de las FACM y FAPM de las series simuladas mediante un proceso MA(1) con un IO ( $\theta_1 = 0.8$ )

$\omega$	T= 100						T = 200						T = 900						
	0	5	10	20	50	100	0	5	10	20	50	100	0	5	10	20	50	100	
$\hat{\tau}_1 = \hat{\phi}_{11}$	-0.481	-0.479	-0.483	-0.485	-0.488	-0.488	-0.482	-0.485	-0.484	-0.486	-0.487	-0.488	-0.487	-0.486	-0.487	-0.486	-0.487	-0.487	-0.487
		-0.478	-0.486	-0.485	-0.487	-0.488		-0.485	-0.484	-0.484	-0.486	-0.488		-0.486	-0.487	-0.486	-0.487	-0.487	0.488
		-0.480	-0.487	-0.484	-0.487	-0.488		-0.484	-0.483	-0.484	-0.488	-0.488		-0.486	-0.487	-0.487	-0.488	-0.488	-0.487
$\hat{\phi}_{22}$	-0.313	-0.309	-0.315	-0.315	-0.313	-0.314	-0.312	-0.313	-0.313	-0.313	-0.313	-0.313	-0.311	-0.313	-0.312	-0.312	-0.313	-0.313	-0.312
		-0.309	-0.312	-0.319	-0.313	-0.313		-0.313	-0.312	-0.312	-0.313	-0.313		-0.313	-0.311	-0.313	-0.312	-0.312	-0.312
		-0.305	-0.317	-0.313	-0.313	-0.313		-0.311	-0.314	-0.314	-0.312	-0.312		-0.313	-0.312	-0.313	-0.313	-0.313	-0.313
$\hat{\phi}_{33}$	-0.210	-0.211	-0.216	-0.219	-0.223	-0.223	-0.216	-0.214	-0.216	-0.220	-0.222	-0.222	-0.220	-0.220	-0.220	-0.221	-0.219	-0.219	-0.222
		-0.211	-0.215	-0.217	-0.222	-0.223		-0.214	-0.215	-0.222	-0.222	-0.222		-0.221	-0.220	-0.220	-0.221	-0.221	-0.221
		-0.215	-0.213	-0.221	-0.224	-0.222		-0.214	-0.217	-0.221	-0.223	-0.222		-0.220	-0.221	-0.219	-0.220	-0.221	-0.221
$\hat{\phi}_{44}$	-0.154	-0.163	-0.165	-0.169	-0.169	-0.168	-0.165	-0.166	-0.164	-0.167	-0.167	-0.167	-0.167	-0.164	-0.165	-0.164	-0.165	-0.165	-0.166
		-0.161	-0.163	-0.169	-0.169	-0.167		-0.166	-0.162	-0.165	-0.165	-0.166		-0.164	-0.166	-0.164	-0.166	-0.166	-0.166
		-0.164	-0.163	-0.169	-0.167	-0.168		-0.164	-0.161	-0.166	-0.167	-0.167		-0.165	-0.165	-0.164	-0.165	-0.165	-0.166
$\hat{\phi}_{55}$	-0.112	-0.121	-0.119	-0.125	-0.127	-0.130	-0.119	-0.119	-0.125	-0.128	-0.127	-0.128	-0.124	-0.127	-0.125	-0.126	-0.126	-0.126	-0.127
		-0.121	-0.127	-0.124	-0.129	-0.130		-0.118	-0.122	-0.127	-0.128	-0.128		-0.128	-0.124	-0.127	-0.127	-0.127	-0.127
		0.120	-0.124	-0.130	-0.132	-0.132		-0.120	-0.126	-0.129	-0.127	-0.128		-0.127	-0.125	-0.126	-0.127	-0.127	-0.128
$\tau_2$	-0.004	-0.003	-0.005	-0.004	-0.001	-0.001	-0.003	-0.002	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.000	-0.002	0.001	-0.001	-0.002	-0.002	0.000
		-0.004	0.003	-0.006	-0.001	-0.001		-0.002	-0.002	-0.003	-0.002	0.001		-0.003	0.000	-0.002	-0.001	-0.001	0.001
		0.000	-0.001	-0.004	-0.001	0.000		-0.001	-0.004	-0.004	0.001	0.000		-0.003	0.000	-0.001	0.000	0.000	-0.001

## Bibliografía

- AZNAR, A. (1989): *Econometric Model Selection: A New Approach*. Dordrecht, Kluwer Academic Press.
- AZNAR, A. y TRIVEZ, F.J. (1993): *Métodos de predicción en economía* (2 vols.). Ed Ariel. Barcelona.
- BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M. (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. (Second edition). San Francisco: Holden-Day.
- CHAN, W.S. (1995): "Understanding the Effect of Time Series Outliers on Sample Autocorrelation". *Test*, 4, 179-186.
- CHEN, C. y LIU, L.M. (1993): "Joint Estimation of Model Parameters and Outlier Effects in Time Series". *Journal of The American Statistical Association*, 88, 284-297.
- CHEN, C. y TIAO, G.C. (1990): "Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations, and Level-Shift Detection". *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 83-97.
- HILLMER, S.C., BELL, W.R. y TIAO, G.C. (1983): "Modeling Considerations in the Seasonal Adjustment of Economic Time Series". En A. Zellner (ed.): *Applied Time Series Analysis of Economic Data*. Washington D.C.: U.S. Department of Commerce. Bureau of the Census, 74-100.
- HUDAK, G.B., LIU, L.M., BOX, G.E.P., MULLER, M.E. y TIAO, G.C. (1991): *The SCA Statistical System. Reference Manual for General Statistical Analysis*. Scientific Computing Associates. Dekalb, Illinois.
- TRIVEZ, F.J. (1992): "Evaluación de las predicciones en modelos ARIMA". *Cuadernos Aragoneses de Economía*, 2, 101-110.
- TRIVEZ, F.J. (1993): "Outliers and ARIMA Models". *Econométrie du temps réel: séries temporelles inframensuelles. Actes du Colloque International A.E.A.* Luxembourg: Applied Econometric Association.
- TRIVEZ, F.J. (1994a): "Efectos de los distintos tipos de outliers en las predicciones de modelos ARIMA". *Estadística Española*, 135, 21-58.
- TRIVEZ, F.J. (1994b): "Efectos de los outliers innovacionales en las predicciones puntuales y por intervalo de los modelos ARIMA". *Revista Española de Economía*, Segunda época, 11, 311-321.
- TRIVEZ, F. J. (1995): "Level Shifts, Temporary Changes and Forecasting". *Journal of Forecasting*, 14, 543-550.