Estudios de Economía Aplicada
Nº 5, 1996. Págs.81 a 103

Incorporación de información adicional sobre las preferencias en un problema de transporte multiobjetivo

AMPARO MARÍA MÁRMOL CONDE
JUSTO PUERTO ALBANDOZ
Universidad de Sevilla

Esta nueva versión incluye todas las correcciones sugeridas por el censor, las cuales me han parecido oportunas y por las que le quedo muy agradecidos.

RESUMEN

La necesidad de incorporar multiplicidad de objetivos en la planificación del transporte suele dar lugar a conflictos. A menudo resulta imposible combinar los objetivos en una función de valor global, lo que hace necesario el tratamiento de estos problemas desde la óptica de la Programación Multiobjetivo.

Si no se dispone de información adicional, el tratamiento de un problema multiobjetivo consiste en la obtención del conjunto de puntos no dominados, pero aún en los casos en que se puede determinar dicho conjunto, este procedimiento proporciona demasiadas alternativas y suele ser de difícil interpretación para el decisor.

En este trabajo analizamos la aplicación de un procedimiento para la reducción del conjunto de soluciones no dominadas en un problema de transporte donde se han establecido tres objetivos. El procedimiento está basado en la inclusión en el modelo de información adicional sobre la importancia que el decisor asigna a los diferentes objetivos, y permite la incorporación de nueva información de manera secuencial.

Palabras clave: Programación Multiobjetivo. Problema de Transporte. Información adicional.
Clasificación AMS: 90C29, 90B06.

Artículo recibido en noviembre de 1995. Revisado en enero de 1996.

ABSTRACT

The multiplicity of objectives in transportation planning often leads to conflicts among them. Further, frequently it is impractical or impossible for the decision maker to combine the objectives into one overall value function.

With no additional information, solving a multiobjective problem means finding the set of nondominated alternatives, but even when it is possible to obtain this set, the procedure generates too many alternatives and it is often not very useful for the decision maker.

In this paper we analyze a procedure to reduce the size of the set of nondominated solutions for a transportation problem where three objectives have been established. The procedure is based on the inclusion in the model of additional information about the importance of the different objectives, and permits sequential incorporation of new information.

Key words: Multiobjective Programming. Transportation Problem. Additional Information.

AMS Clasification: 90C29, 90B06.

1. Introducción

Desde sus primeras formulaciones, debidas a Hitchcok (1941) y Kantorovich (1942), el Problema de Transporte ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Gran parte de las aplicaciones industriales y militares de la Programación Lineal están relacionados con este modelo y frecuentemente aparecen problemas de transporte como subproblemas de otros más extensos, como el problema del viajante, o el de localización de artículos en un almacén. Además muchos problemas lineales que a primera vista no parecen relacionados con este modelo admiten una formulación como Problema de Transporte (modelos de asignación de préstamos, problemas de inventario, etc.).

Los primeros estudios sobre planificación y diseño de redes de transporte estuvieron basados en la minimización de un solo objetivo (distancia total, tiempo de viaje, o costes de construcción), pero no cabe duda de que, en la mayoría de los casos, el problema tiene naturaleza multiobjetivo. Un primer reconocimiento de esta naturaleza multiobjetivo puede verse en Dantzing(1966), donde se formula el modelo con el objetivo de minimizar la razón coste-tiempo.

Podemos citar como trabajos iniciales en la aplicación de técnicas multiobjetivo al Problema de Transporte, los de Ferguson(1966), y Kapur(1970), que discuten la potencialidad de varias técnicas multiobjetivo para generar soluciones del problema. Aneja y Nair(1979) proponen un algoritmo para resolver el caso particular del

Problema de Transporte con dos objetivos, que permite además la incorporación de un objetivo adicional para controlar el tiempo máximo empleado en el proceso de Transporte.

En 1979, Díaz e Isermann, independientemente, desarrollaron algoritmos para la identificación de todo el conjunto de soluciones no dominadas del Problema de Transporte Multiobjetivo, y recientemente, Gallagher y Saleh(1994) han desarrollado un procedimiento para la obtención de los valores objetivo eficientes basado en el análisis del espacio de objetivos. Estos procedimientos de generación de todo el conjunto de soluciones no dominadas conllevan una carga computacional considerable, y en muchos casos generan un número demasiado grande de alternativas, dificultando el proceso de decisión. Es necesario por tanto, construir procedimientos que precisen más la estructura de preferencias del decisor. Esto puede hacerse mediante la construcción de funciones de compromiso (Díaz, 1978), de forma que se calcule una solución no dominada. La adecuación de esta solución a los deseos del decisor depende del ajuste con que la función de compromiso sustituya a la función de utilidad subyacente del decisor.

Otra alternativa es la inclusión en el modelo de información adicional sobre las preferencias del decisor con objeto de reducir el conjunto de alternativas que tiene que considerar. La inclusión de información adicional en problemas de decisión multiobjetivo ha sido tratada en la literatura por diversos autores (Hannan 1981, Hazen 1986, Kirkwood y Sarin 1985, Weber 1985 y 1987, entre otros). Los procedimientos que proponen generalmente están basados en la valoración que el decisor hace de unas alternativas frente a otras.

En este trabajo analizamos un problema de transporte multiobjetivo, mediante un procedimiento basado en la mejora del conocimiento de la estructura de preferencias del decisor, si éste es capaz de proporcionar información sobre sus preferencias en términos de la importancia de los distintos objetivos. Este tipo de procedimientos es particularmente apropiado cuando la información que el decisor puede proporcionar viene dada por relaciones lineales sobre los pesos de los objetivos. Además, dado que está basado en la utilización de información a priori, puede incorporarse a cualquier método interactivo de obtención de soluciones, mejorando considerablemente la eficacia de éstos. Algunos casos particulares han sido ya tratados en la literatura, Steuer (1986) propone establecer intervalos de variación para los pesos de importancia de los objetivos, Carrizosa y otros (1995) estudian el caso en que la información viene dada mediante relaciones lineales sobre los pesos, este planteamiento incluye como caso particular el caso de información ordinal, al que hacen referencia diversos autores (Hannan 1981, Kirkwood y Sarin 1985, entre otros). En Mármol (1994), se aborda el caso general, que incluye a los anteriores, en que pueden establecerse niveles inferiores y superiores en las relaciones lineales sobre los pesos de importancia de los objetivos, además se proporcionan procedimientos para la incorporación de nueva información al problema de forma secuencial.

El objeto de este trabajo es ilustrar la utilización de los procedimientos propuestos en Mármol(1994), aplicándolos al proceso de obtención de las soluciones que son acordes con las preferencias del decisor en un problema de Transporte Multiobjetivo. Hay que hacer notar que en la aplicación de estos procedimientos se conserva la estructura especial de la matriz del Problema de Transporte, por lo que siguen siendo válidos los métodos específicos de obtención de soluciones de este tipo de problemas.

En la sección 2, por completitud, se presentan los resultados en que se apoyan los procedimientos que proponemos. En la sección 3 se formula un problema de transporte de maquinaria donde se han establecido tres objetivos, y se analiza la influencia de la incorporación de información sobre la importancia de los objetivos en la obtención de las soluciones de interés. La sección 4 está dedicada a las conclusiones.

2. Incorporación de información adicional sobre la importancia de los objetivos[1]

Aunque el principal objetivo de este trabajo es presentar una aplicación del uso de información adicional en el Problema de Transporte Multiobjetivo, para facilitar la comprensión del mismo, en esta sección se incluyen los resultados teóricos sobre los que se apoyan los procedimientos que utilizamos.

Consideremos el Problema Lineal Multiobjetivo Min $\{Cx, x \in S\}$, donde $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ es la matriz de objetivos, por tanto $C^i x$, $i = 1,\dots,k$ representa la evaluación del objetivo i-ésimo en cada alternativa del conjunto factible S.

Con esta formulación, y sin información adicional sobre la estructura de preferencias del decisor, el tratamiento de los problemas multiobjetivo se basa en

[1] Los resultados incluidos en esta sección pueden encontrarse en la tesis doctoral ya citada (Mármol, 1994), y además forman parte del trabajo *The use of partial information on weights in multicriteria decision problems*, que en la actualidad está en proceso de revisión para su publicación.

la obtención de soluciones que no sean mejorables con respecto a los objetivos establecidos. En este trabajo, por simplicidad en la presentación, utilizaremos el concepto de solución no dominada en sentido débil: diremos que una solución factible, x, es no dominada en sentido débil, si no existe otra solución factible, y, tal que $c^i y < c^i x$, $\forall i = 1,\ldots,k$.

En lo que sigue, y cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos solución no dominada por solución no dominada en sentido débil.

Haremos la hipótesis de que la función de valoración subyacente del decisor es aditiva, es decir, suponemos que existe un vector $\omega \in \mathbb{R}^k$ tal que la función de utilidad es

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i c^i x$$

El vector ω representa el peso de importancia relativa de cada objetivo, por tanto, si el decisor puede establecer exactamente estos pesos, la función de utilidad está perfectamente definida, y el problema puede analizarse como un problema escalar. Pero a menudo el decisor no es capaz de determinar los pesos, aunque sí puede proporcionar información sobre sus valores. Esto permite, como veremos, reducir el conjunto de soluciones no dominadas que tiene que considerar en el proceso de decisión.

Sin información adicional sobre la importancia de los objetivos, el conjunto de pesos admisibles para el decisor (a partir del que se generarían todas las soluciones no dominadas del problema) viene dado por $\Omega = \{ \omega \in \mathbb{R}^k, e^t\omega = 1, \omega \geq 0 \}$. Los procedimientos que utilizaremos para la incorporación de información adicional consistirán en la reducción del conjunto de pesos admisibles, de forma que, la obtención de los puntos no dominados acordes con la información proporcionada se reduce a la obtención de las soluciones no dominadas de un nuevo problema multiobjetivo transformado, en virtud del siguiente resultado:

TEOREMA 1: *Si la información sobre los pesos de importancia de los objetivos viene dada por el poliedro $P \subseteq \Omega$, entonces los puntos no dominados del problema acordes con la información proporcionada, son los puntos no dominados del problema Min $\{ LCx, x \in S \}$, donde L es la matriz cuyas filas son los puntos extremos del poliedro P.*

Es evidente que el conjunto de soluciones a que da lugar este procedimiento se ajustará más a los deseos del decisor cuanto más información haya proporcionado sobre sus preferencias. A continuación consideraremos distintas formas de incorporar información, que se traducen en distintos tipos de reducción del conjunto de pesos:

a) Relaciones intervalares sobre los pesos.

Aunque el decisor no pueda establecer exactamente los pesos de importancia de los objetivos, en muchas ocasiones sí es capaz de proporcionar intervalos de variación de estos valores. Se tiene así un subconjunto del conjunto de pesos admisibles, que es de la forma

$$P_{\alpha,\beta} = \{ \omega \in \mathbb{R}^k,\ \omega_i \in [\alpha_i, \beta_i],\ i=1,\ldots,k,\ e^t\omega = 1 \}$$

Para la obtención de los puntos extremos de estos poliedros de pesos Steuer(1986) propone un procedimiento consistente en la consideración de todas las posibles combinaciones de extremos de los intervalos. En Mármol(1994) se presenta un algoritmo que permite obtener los puntos extremos de poliedros más generales,

$$P_{\alpha,\beta}(p) = \{ \omega \in \mathbb{R}^k,\ \omega_i \in [\alpha_i, \beta_i],\ i=1,\ldots,k,\ p^t\omega = 1 \},\quad p \in \mathbb{R}^k$$

y que supone una mejora considerable en cuanto al número de evaluaciones que realiza.

b)Relaciones lineales sobre los pesos.

Otra forma de incorporar información sobre la importancia de los objetivos, consiste en la especificación de relaciones lineales sobre los pesos. En determinadas condiciones, que son interpretables en términos de tasas mínimas de sustitución de un objetivo frente a los demás (Carrizosa y otros, 1995, Mármol, 1994), la matriz que representa las relaciones es una matriz con inversa no negativa. Esta propiedad es de especial importancia para la obtención de los puntos extremos del poliedro de pesos.

b1)Relaciones lineales homogéneas.

Se tiene en estos casos que el nuevo poliedro de pesos es de la forma

$$P_M = \{ \omega \in \mathbb{R}^k,\ \omega \geq 0,\ M\omega \geq 0,\ e^t\omega = 1 \}$$

El siguiente resultado (Carrizosa y otros, 1995) caracteriza los puntos extremos de estos conjuntos de pesos cuando la matriz que relaciona los pesos tiene inversa no negativa:

TEOREMA 2: *Si $M^{-1} \geq 0$, entonces los puntos extremos de P_M son las columnas de M^{-1} normalizadas de forma que sumen la unidad.*

Obsérvese que no es necesario que el decisor haya podido establecer k relaciones lineales, si se tienen s, (s<k), siempre es posible completarlas con las relaciones naturales $\omega_i > 0$, que sean independientes con las dadas, para obtener una matriz kxk.

Los siguientes resultados (Mármol, 1994) permiten evaluar el efecto que causa la incorporación de nuevas relaciones sobre el conjunto de pesos, y obtener de forma inmediata el nuevo conjunto de puntos extremos en algunos casos especialmente interesantes:

Sea $M\omega > 0$, $\omega > 0$ un conjunto de restricciones sobre los pesos admisibles para el decisor de tal forma que $M^{-1} > 0$. Consideremos la nueva restricción $a\omega \geq 0$, $\omega \geq 0$.

TEOREMA 3: *Sea $v = aM^{-1}$, entonces se verifica:*

a) $v \geq 0$ si y sólo si la nueva relación es redundante.
b) $v < 0$ si y sólo si la nueva relación es incompatible con las anteriores.
c) En otro caso se produce una reducción estricta en el conjunto de pesos.

TEOREMA 4: *Sea $v = aM^{-1}$, entonces:*

a) Si $v_i \geq 0$, $\forall i = 1,\dots,k$, y existe j tal que $v_j = 0$, entonces los puntos extremos del nuevo poliedro de pesos son las columnas de M^{-1} correspondientes a los v_j nulos, normalizadas para sumar la unidad.

b) Si $v_i > 0$, $v_j < 0$, $j \neq i$, los puntos extremos del nuevo poliedro de pesos vienen dados por los siguientes vectores normalizados de forma que sumen la unidad.

$$M^{-1}e_i, \qquad M^{-1}(\underset{}{0,\dots}, \underset{i)}{-v_r/v_i}, 0,\dots,0, \underset{r)}{1}, 0,\dots,0)', \; r \neq i$$

b) Si $v_i < 0$, $v_j \geq 0$, $j \neq i$, los puntos extremos del nuevo poliedro de pesos vienen dados por los siguientes vectores normalizados de forma que sumen la unidad:

$$M^{-1}e_r, \; r \neq i, \qquad M^{-1}(0,\dots, \underset{i)}{-v_r/v_i}, 0,\dots,0, \underset{r)}{1}, 0,\dots,0)', \; r \neq i.$$

b2) Relaciones lineales no homogéneas.

Si además de las relaciones lineales sobre los pesos de importancia de los objetivos, es posible establecer niveles superiores e inferiores sobre estas relaciones, el nuevo conjunto de pesos admisibles tiene la forma:

$$P_{M,\alpha,\beta} = \{ \omega \in \mathbb{R}^k, \; \omega \geq 0, \; \alpha \leq M\omega \leq \beta, \; e^t\omega = 1 \}, \; \alpha, \beta \geq 0$$

Si $M^{-1} \geq 0$ los puntos extremos de estos poliedros se obtienen de la siguiente manera:

i) Mediante el cambio de variables $M\tilde{\omega}=\lambda$, transformar el poliedro $P_{M,\alpha,\beta}$ en

$$\{ \lambda \in \mathbb{R}^k, \ \alpha < \lambda \leq \beta, \ e^{\,t} M^{-1} \lambda - 1 \}$$

ii) Utilizar el procedimiento referenciado en el apartado a) para el cálculo de los puntos extremos de este último poliedro, y deshacer la transformación.

3. El problema de transporte con información adicional

Consideremos un problema de transporte de maquinaria pesada, en el que hay dos puntos de suministro y trece puntos de destino, que coinciden con distintas ciudades españolas. Las rutas de los puntos de suministro a los puntos de destino están previamente establecidas, y son bien ruta de carretera, o bien ruta de ferrocarril. Debido a las grandes dimensiones de la maquinaria, cada unidad ha de transportarse de forma independiente. El plan de transporte ha de realizarse teniendo en cuenta las circunstancias siguientes:

Es necesario cubrir exactamente la demanda de los puntos de destino.

La empresa desea minimizar el coste total de transporte de la maquinaria, aunque se ha comprometido con la Administración a tener en cuenta el deterioro en la fluidez del tráfico que supone el transporte por carretera de la maquinaria, por lo que uno de los objetivos será la minimización de la distancia total recorrida por carretera.

Por otra parte, se desea que el tiempo total invertido en el proceso de transporte sea mínimo.

En la siguiente tabla se representan la disponibilidad de los puntos de suministro, las demandas de los puntos de destino, las distancias entre las distintas ciudades, y si cada ruta es de ferrocarril o de carretera.

	demanda	HUELVA disponible 2018	TARRAGONA disponible 1176
VITORIA	12	914C	496 C
OVIEDO	43	880 F	811 F
BADAJOZ	806	270 C	965 C
BARCELONA	402	1112 F	97 C
BURGOS	941	879 F	534 C
CORDOBA	4	232 C	783 F
S.SEBASTIAN	22	1095 C	469 C
MADRID	347	624 C	561 C
MURCIA	10	625 C	513 F
SALAMANCA	26	564 F	720 C
SEVILLA	34	95 C	920 F
VALENCIA	233	755 F	260 F
BILBAO	35	1035 C	537 F

Con el fin de encontrar soluciones satisfactorias se establecen tres objetivos:
Objetivo 1: Minimización del coste total de transporte.
Objetivo 2: Minimización de la distancia total recorrida por carretera.
Objetivo 3: Minimización del tiempo total del proceso.

Se definen las variables x_{ij}, $i=1,2$; $j=1,...,14$, que representan el número de unidades transportadas del origen i al destino j, y en función de éstas, se establecen las funciones a optimizar de acuerdo con los objetivos. El destino número 14 es un destino ficticio creado para nivelar la diferencia entre la disponibilidad total y la demanda total. Las unidades enviadas desde cada uno de los orígenes a este destino representan los excedentes almacenadas en los orígenes.

El coste de transporte se obtiene de la siguiente forma: si la ruta es de carretera, el coste inicial de transportar una unidad será un número de unidades monetarias igual a la distancia en Kms. Si la ruta es de ferrocarril, el coste inicial de transportar una unidad será igual a la distancia en Kms. multiplicada por 1.5. En ambos casos, si la distancia excede los 1000 Kms., el coste de transportar una unidad será el coste calculado anteriormente multiplicado por 1.5. Por otra parte, el almacenamiento de excedentes supone un coste por unidad de 1000 u.m. en Huelva y de 500 u.m en Tarragona.

Para el cálculo del tiempo, ha de tenerse en cuenta que el transporte por carretera se hace a una velocidad media de 70 Kms./h., el transporte por ferrocarril se hace a una velocidad de 100 Kms./h., pero las unidades transportadas en tren necesitan un tiempo adicional de carga y descarga que se estima en 1 hora por unidad transportada.

Denotaremos por C y F a los conjuntos de índices (i,j) correspondientes a rutas de carretera y ferrocarril respectivamente.

Las funciones objetivo se establecen como:

1) Función de coste total (medida en miles de u.m.):

$$c^1(x) = C_c\left(\sum_{(i,j)\in C} d_{ij}x_{ij}\right) + C_F\left(\sum_{(i,j)\in F} d_{ij}x_{ij}\right) +$$

$$p\left(\sum_{d_{ij}>1000} d_{ij}x_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{m} s_i x_{in}$$

donde d_{ij} es la distancia del origen i al destino j, c_c el coste normal de transportar una unidad por carretera, c_f el coste normal de transportar una unidad por ferrocarril, s_i el coste de almacenar una unidad en el origen i, y p la penalización por distancias largas.

2)Función distancia recorrida por carretera (medida en Kms.):

$$c^2(x) = \sum_{(i,j)\in C} d_{ij}x_{ij}$$

3)Función tiempo total del proceso (medido en horas):

$$c^3(x) = \sum_{(i,j)\in F} d_{ij}x_{ij}/v_F + t_a \sum_{(i,j)\in F} x_{ij} + \sum_{(i,j)\in C} d_{ij}x_{ij}/v_C$$

donde v_f es la velocidad del transporte por ferrocarril, v_c la velocidad del transporte por carretera, y t_a el tiempo de carga y descarga de las unidades transportadas por ferrocarril.

Planteamos, pues, un Problema de Transporte con 2 orígenes y 14 destinos:

$$
\begin{aligned}
MIN \quad & \{ C^1x,\ C^2x,\ C^3x \} \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, \quad i=1,\dots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=1,\dots,n \\
& x_{ij}\geq 0, \quad i=1,\dots,m \\
& \qquad\qquad j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

donde $m = 2$, $n = 14$.

C^1 = (914, 1320, 270, 2502, 1319, 232, 1643, 624, 625, 846, 95, 1133, 1553, 1000, 496, 1217, 965, 97, 543, 1175, 469, 561, 770, 720, 1380, 390, 806, 500)

C^2 = (914, 0, 270, 0, 0, 232, 1095, 624, 625, 0, 95, 0, 1035, 0, 496, 0, 965, 97, 534, 0, 469, 561, 0, 720, 0, 0, 0, 0)

C^3 =(13.05, 9.8, 3.85, 13.12, 9.79, 3.31, 15.64, 8.9, 8.92, 6.64, 1.35, 8.55, 4.78, 0, 7.08, 9.11, 13.7, 1.38, 7.63, 8.83, 6.7, 8, 6.13, 10.28, 10.2, 3.6, 6.37, 0)

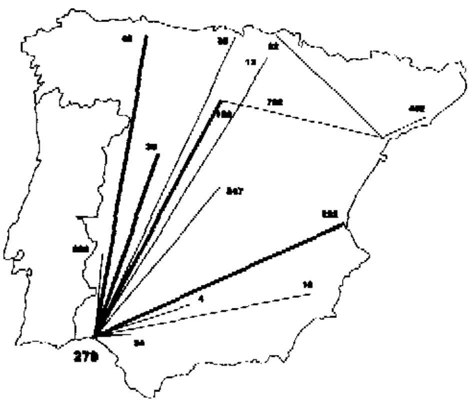
a = (2018,1176)

b = (12,43,806,402,941,4,22,347,10,26,34,233,35,279).

Dado que por hipótesis la función de utilidad subyacente del decisor es aditiva, nos centraremos en la obtención de soluciones no dominadas que sean extremos del conjunto factible (soluciones básicas factibles). Como consecuencia de la estructura especial del modelo de transporte, las soluciones básicas tienen componentes enteras, y contienen como máximo n+m-1 variables con valores estrictamente positivos. En nuestro caso, en cada solución extrema se utilizan como máximo 15 rutas, y dado que hay 14 destinos (incluyendo el almacenaje), en cada solución extrema como máximo uno de los destinos recibe la mercancía desde los dos orígenes.

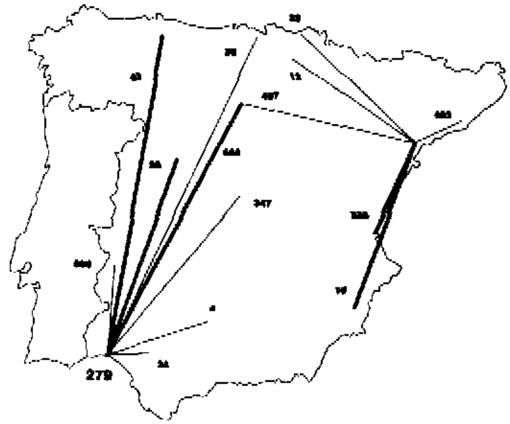
Se han obtenido los puntos extremos no dominados del problema de transporte objeto de estudio con el programa ADBASE (Steuer, 1983). En el apéndice aparecen los valores que toman las variables y la valoración de los objetivos en cada uno de los 23 puntos extremos no dominados. Resulta evidente que este tipo de información, aún en los casos en que sea posible obtenerla, no es útil para el decisor, debido a la gran cantidad de soluciones presentadas, y a la similitud de muchas de ellas. No obstante, en este caso puede observarse que el flujo de algunas rutas es constante en todas las soluciones no dominadas (Badajoz y Salamanca se suministran desde Huelva, y S.Sebastián desde Tarragona).

Quizás una manera más práctica de abordar el problema, en una primera fase, consiste en la resolución de cada uno de los tres problemas uniobjetivo. Se obtienen así, al menos tres soluciones no dominadas del problema multiobjetivo, que son representativas de cada uno de los criterios individuales, y que aparecen en las siguientes gráficas. Las líneas gruesas representan las rutas de ferrocarril y las finas las rutas de carretera.



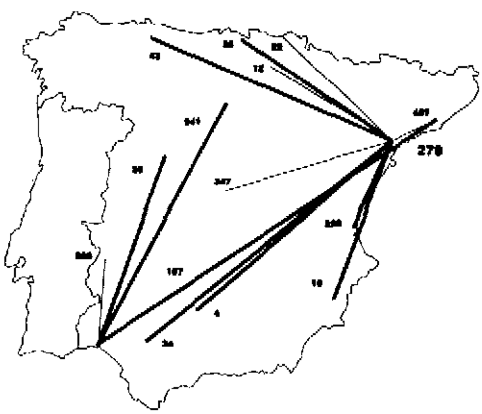
Solución que minimiza el coste total de transporte

(1)



Solución que minimiza el tiempo total

(6)



Solución que minimiza la distacia recorrida por carretera

(23)

En cada una de las soluciones óptimas de estos problemas pueden evaluarse también los otros dos objetivos, obteniéndose una tabla de costes que da una idea al decisor sobre los rangos de variación de los tres objetivos en el conjunto de soluciones no dominadas.

	x^1	x^{23}	x^6
Coste Transporte	1831795	2690182	1859758
Distancia Carretera	942629	443786	795193
Tiempo Total	17540.06	20824.45	16837.97

Si el decisor acepta una de estas soluciones, el proceso de decisión ha terminado. En otro caso, es posible que desee proporcionar información sobre sus preferencias con el fin de obtener un conjunto de soluciones más acordes con sus preferencias. En lo que sigue, consideraremos los coeficientes de las funciones objetivo multiplicados por un factor de equiparación de rangos (Steuer, 1986):

$$\mu_i = (1/R_i)\left(\sum_{j=1}^{k} 1/R_j\right)^{-1} \qquad i=1,\ldots,k$$

donde R_i es la amplitud del rango de valores del i-ésimo objetivo sobre el conjunto de puntos no dominados.

a) Relaciones intervalares sobre los pesos.

Supongamos que en la resolución del problema de Transporte Múltiple que nos ocupa, el decisor ha podido proporcionar los siguientes intervalos de variación de los pesos de los objetivos:

$\omega_1 \in [0.2, 0.7]$, $\omega_2 \in [0.2, 0.5]$, $\omega_3 \in [0.1, 0.8]$.

En este caso, los puntos extremos de $P_{\alpha,\beta}$ son:

(0.7,0.2,0.1), (0.2,0.2,0.6), (0.4,0.5,0.1), (0.2,0.5,0.3).

Resolviendo el problema con cuatro objetivos Min { LCx, x∈S }, donde L es la matriz cuyas filas son los puntos extremos del poliedro de pesos, se obtienen los cuatro puntos extremos no dominados del problema (numerados 7,9,10,11 en la tabla del apéndice), que son acordes con la información proporcionada. Obsérvese que en estas cuatro soluciones es constante el flujo en todas las rutas salvo las que abastecen Burgos, Madrid, Murcia, y el almacenamiento en los orígenes. Así pues, a partir de esta información, la decisión se ha reducido a estas rutas.

b)Relaciones lineales sobre los pesos.

CASO 1: Es frecuente que el decisor pueda establecer un orden de importancia entre los objetivos (información ordinal). Supongamos que el decisor informa que minimizar el coste total de transporte es más importante o igual que minimizar la distancia recorrida por carretera, y que esto último no es menos importante que minimizar el tiempo total invertido en la operación. Los pesos de los objetivos serán entonces: $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$.

Matricialmente, estas relaciones pueden expresarse como $M\omega \geq 0$, donde M es la matriz.

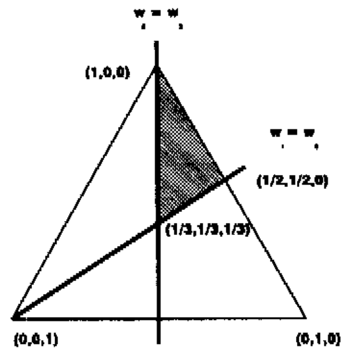
$$M=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz M tiene inversa no negativa, por lo que el conjunto de puntos extremos que determinan las relaciones viene dado por las columnas de L_1, que son las columnas M^{-1}, normalizadas para sumar la unidad.

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

En la gráfica de la página siguiente, se representa la reducción del conjunto de pesos, sobre el hiperplano $e^t\omega=1$, cuando se proporciona esta ordenación.

El problema a resolver para obtener los puntos eficientes del Problema de Transporte acordes con la información proporcionada, será el problema con tres objetivos Min { L_1^tCx, $x \in S$ }. Este problema tiene 8 puntos extremos no dominados (numerados 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12,15, en el apéndice). Obsérvese que en estas soluciones la valoración del objetivo que el decisor considera más importante es buena, no obstante, debido a que se está considerando también la importancia relativa de los otros dos objetivos, hay soluciones no dominadas que no están en

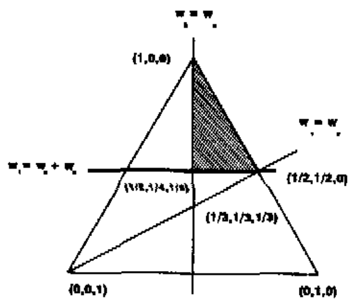


este grupo, y donde la valoración del primer objetivo es mejor que en algunas de éstas (véase, por ejemplo x^2, $c^1x^2<c^1x^5$). De todas formas, es posible que aún sean demasiadas soluciones a efectos de elección, por lo que se le requerirá al decisor más información, si es posible.

CASO 2: El decisor informa que la importancia del primer objetivo es al menos la de la suma de los otros dos: $\omega_1 \geq \omega_2 + \omega_3$. Esta relación puede escribirse como $(1,-1,-1)\omega \geq 0$. Sea $a_1=(1,-1,-1)$. En virtud de los Teoremas 3 y 4, la incorporación de esta nueva relación al conjunto de pesos se hace de la siguiente forma:
$v = a_1L_1 = (1,-1,-1)\ L_1 = (1,\ 0,\ -1/3)$.
Por tanto, el nuevo poliedro de pesos tiene 3 puntos extremos, que vienen dados por las columnas de L_2:

$$L_2=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Gráficamente, la reducción del conjunto de pesos es ahora:



El problema resolver para obtener las soluciones del problema de Transporte acordes con la información proporcionada es Min { L_2'Cx, x∈S }, cuyas soluciones no dominadas son
(1,3,5,7,10,12). Obsérvese que a la vista de esta información, el decisor sólo tiene que decidir sobre el abastecimiento de Valencia, Murcia, Burgos y Vitoria.

CASO 3: Si a partir de las relaciones del caso 2, el decisor desea incorporar la información: $\omega_3 > 0.5\omega_1 + 0.25\omega_2$

se tiene $v = a_2 L_2 = (-1/2, -1/4, 1)L_2 = (-1/2, -3/8, -1/16)$.

Esta relación es incompatible con las anteriores (Teorema 3). El decisor debe volver a considerar la información proporcionada.

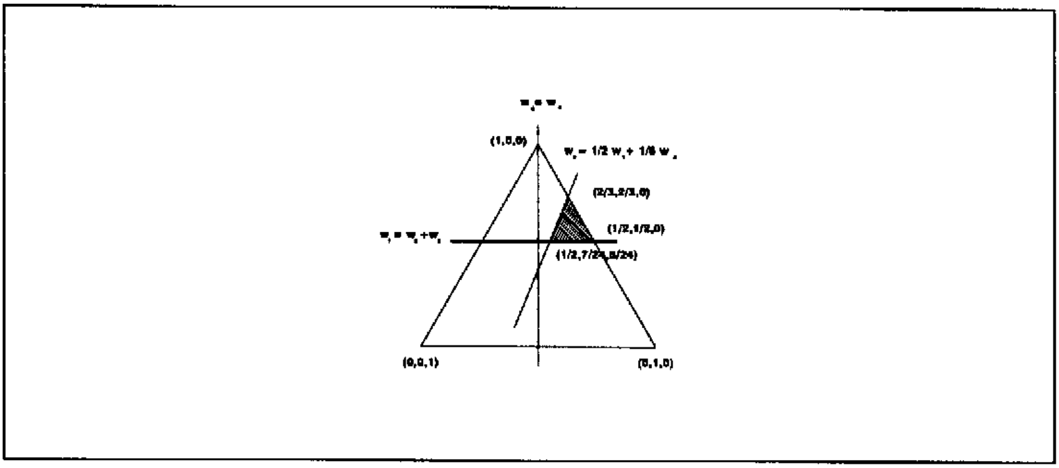
CASO 4: A partir de la información ordinal (caso 1), y las relaciones del caso 2, se quieren incorporar las relaciones $2\omega_2 \geq \omega_1 + \omega_3$, $\omega_1 < 3\omega_2 + \omega_3$, y $\omega_1 \geq 2\omega_2 + 2\omega_3$.

$v = a_3 L_2 = (-1/2, 1, -1/2)\, L_2 = (-1/2, 1/4, -1/8)$.

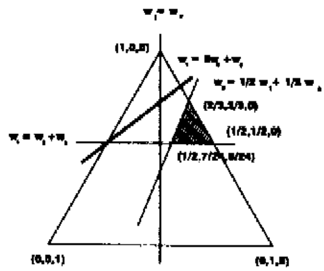
La nueva relación reduce el conjunto de pesos, dando lugar a un nuevo poliedro con tres puntos extremos dados por las columnas de la matriz

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 7/24 \\ 0 & 0 & 5/24 \end{bmatrix}$$

Gráficamente, la reducción del conjunto de pesos:



A continuación calculamos v = a_4L_3= (1/3,1,14/24). Esta información es redundante (Teorema 3), y no habrá que considerarla. Gráficamente:



Obsérvese, que si se elimina la relación a_3, esta nueva relación sí supondría una reducción del conjunto de pesos.

Por último: $v = (1,-2,-2)L_3 = (0,-1/2,-1/2)$.

El nuevo conjunto de pesos, tiene un sólo punto extremo $\bar{\omega}^0=(2/3,1/3,0)$. El problema de obtener los puntos eficientes acordes con la información se reduce a resolver el problema uniobjetivo Min{$\bar{\omega}^0 Cx$, $x \in S$ }, cuya solución es el punto extremo eficiente (12), que será en este caso, la solución óptima para el decisor.

CASO 5: Supongamos que en nuestro caso el decisor establece las siguientes cotas en las diferencias entre los pesos:

$$0.5 \leq \omega_1 - \omega_2 < 0.7$$
$$0.2 \leq \omega_2 - \omega_3 \leq 0.5$$
$$\omega_3 \leq 0.2$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \omega \leq \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz M, que relaciona los pesos tiene inversa no negativa, los puntos no dominados del Problema de Transporte acordes con esta información, son los puntos no dominados del problema Min{ $(M^{-1}L)^t Cx$, $x \in S$ }, donde las columnas de la matriz

$$L=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.033 \end{bmatrix}$$

son los tres puntos extremos del conjunto:

$$P=\{\ \lambda\in\mathbb{R}^3,\ e^tM^{-1}\lambda=1,\ \alpha\le\lambda\le\beta\ \}$$

4. Conclusiones

En el entorno económico y empresarial muchos problemas tienen carácter multiobjetivo, al ser muchas las circunstancias y factores que normalmente inciden en el proceso de obtención de soluciones satisfactorias.

En este trabajo se hace patente la utilidad de la metodología propuesta para la obtención de soluciones de interés en un Problema de Transporte donde se han establecido tres objetivos. El procedimiento permite la incorporación de información adicional sobre la importancia de los objetivos y la reducción del conjunto de soluciones a considerar, lo que es fundamental para el proceso de decisión.

Si el conjunto de soluciones obtenidas a partir de la información proporcionada no es satisfactorio, es posible que el decisor desee ofrecer más información. En este caso se utilizan procedimientos para evaluar el efecto de la nueva información sobre el conjunto de soluciones.

Es importante hacer notar que estos métodos de refinamiento de la información pueden incorporarse en cualquier procedimiento interactivo que busque soluciones no dominadas en problemas Multiobjetivo.

Bibliografía

Aneja,Y.P.,Nair,K.P.(1979):"Bicriteria Transportation Problem". *Management Science* 25, 73-78.

Carrizosa,E.,Conde,E.,Fernández,F.R.,Puerto,J.(1995):"Multicriteria Analysis with Partial Information about weighting Coefficients", *European Journal of Operational Research* 81, 291-301.

Kantorovich,L.V.(1942): "On the Translocation of Masses". *C.R..Acd.Sci. URSS 37,199-201.*

Dantzing G.,et al.(1966): "Finding a Cycle in a Graph with Minimun Cost to Time Ratio with Application to a Ship Routing Problem". Theory of Graph International Symposium,Gordon and Breach, New York, 77-84.

Diaz,J.A.(1978): "Solving Multiobjective Transportation Problems". *Ekonomicko-matematicky Obzor* 14, 267-274.

Díaz,J.A.(1979):"Finding a Complete Description of all Efficient Solutions to a Multiobjective Transportation Problem". *Ekonomicko-matematicky Obzor* 15, 62-73.

Ferguson,G.A.(1966): "Development of Transportation Systems Alternatives". *Highway Research Records* 148,1-8.

Gallagher,R.J. and Saleh,O.A.(1994):"Constructing the Set of Efficient Objectives Values in Linear Multiple Objective Transportation Problems", *European Journal of Operational Research* 73, 150-173.

Hannan,E.L.(1981):"Obtaining Nondominated Priority Vectors for Multiple Objective Decisionmaking Problems with Different Combinations of Cardinal and Ordinal Information". *IEEE Transactions on Systems, Man. and Cybernetics* SMC-11, No.8, 538-543.

Hazen,G.B.(1986):"Partial Information, Dominance, and Potential Optimality in Multiattribute Utility Theory". *Operations Research* 34, 296-310.

Hitchcok,F.L.(1941):"Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities". *Journal of Mathematical Physics* 20, 224-230.

Isermann,H.(1979):"The Enumeration of a Set of all Efficient Solutions for a Linear Multiple Objective Program". *Operational Research Quarterly* 26, 123-139.

Kapur,K.(1970): "Mathematical Methods of Optimization for Multiobjective Transportation Systems". *Socio-Economic Planning Sciences* 4, 451-467.

Kirkwood,C.W.,Sarin,R.K.(1985): "Ranking with Partial Information: A Method and an Application", *Operations Research* 33, 38-48.

Mármol,A.(1994): "El Problema de Transporte Multiobjetivo con Información Adicional". Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Steuer,R.E.(1983): *Operating Manual for the ADBASE Multiple Objective Linear Programming Package*. College of Business Administration, University of Georgia, Athens, Georgia.

Steuer,R.E.(1986): "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application". Wiley, New York.

Weber,M.(1985): "A Method of Multiattribute Decision Making with Incomplete Information".- *Management Science* 31, 1365-1371.

Weber,M.(1987): "Decision Making with Incomplete Information", *European Journal Operational Research* 28, 44-57.

APENDICE: En la siguiente tabla se presentan los puntos extremos no dominados del Problema de Transporte analizado en la sección 3.

	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
H-Vitoria	12	12	12		12			
H-Oviedo	43	43	43	43	43	43	43	43
H-Badajoz	806	806	806	806	806	806	806	806
H-Barcelon								
H-Burgos	189	422	274	434	457	457	469	791
H-Córdoba	4	4	4	4	4	4	4	4
H-S.Sebast								
H-Madrid	347	347	347	347	347	347	347	
H-Murcia	10	10	10	10	10	10	10	
H-Salaman	26	26	26	26	26	26	26	26
H-Sevilla	34	34	34	34	34	34	34	34
H-Valencia	233		233					
H-Bilbao	35	35		35				35
Alm. Huel	279	279	279	279	279	279	279	279
T-Vitoria				12			12	12
T-Oviedo								
T-Badajoz								
T-Barcelon	402	402	402	402	402	402	402	402
T-Burgos	752	519	717	507	484	484	472	150
T-Córdoba								
T-S.Sebast	22	22	22	22	22	22	22	22
T-Madrid								347
T-Murcia								10
T-Salaman								
T-Sevilla								
T-Valencia		233		233	233	233	233	233
T-Bilbao			35		35	35	35	
Alm.Torra								
C^1	1838563	1846252	1839578	1850548	1847267	1859758	1851563	2107169
C^2	942629	818207	887714	806783	763292	795193	751868	588034
C^3	17540.06	16889.99	17671.31	16844.27	17021.24	16837.97	16975.52	17275.19

	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	x^{15}	744 x^{16}
H-Vitoria								
H-Oviedo	43	43	43	43		43	43	
H-Badajoz	806	806	806	806	806	806	806	806
H-Barcelon								
H-Burgos	479	748	826	758	869	941	941	941
H-Córdoba	4	4	4	4	4	4	4	4
H-S.Sebast								
H-Madrid	347	347		347			164	
H-Murcia		10						
H-Salaman	26	26	26	26	26	26	26	26
H-Sevilla	34	34	34	34	34	34	34	34
H-Valencia								
H-Bilbao								
Alm. Huel	279		279		279	164		207
T-Vitoria	12	12	12	12	12	12	12	12
T-Oviedo					43			43
T-Badajoz								
T-Barcelon	402	402	402	402	402	402	402	402
T-Burgos	462	193	115	183	72			
T-Córdoba								
T-S.Sebast	22	22	22	22	22	22	22	22
T-Madrid			347		347	347	183	347
T-Murcia	10		10	10	10	10	10	10
T-Salaman								
T-Sevilla								
T-Valencia	233	233	233	233	233	233	233	233
T-Bilbao	35	35	35	35	35	35	35	35
Alm.Tarra		279		279		115	279	72
C^1	1860773	1928567	2108184	1937777	2137123	2139924	2068256	2156995
C^2	740278	602882	533119	591292	510157	471709	482041	471709
C^3	16969.22	17578.16	17406.44	17571.86	17469.65	17654.84	17802.44	17625.17

ÍNDICE

	x^{17}	x^{18}	x^{19}	x^{20}	x^{21}	x^{22}	x^{23}
H-Vitoria							
H-Oviedo	43	43		43		43	
H-Badajoz	806	806	806	806	806	806	806
H-Barcelon						202	245
H-Burgos	941	941	941	941	941	941	941
H-Córdoba							
H-S.Sebast							
H-Madrid		168					
H-Murcia							
H-Salaman	26	26	26	26	26	26	26
H-Sevilla	34	34	34				
H-Valencia							
H-Bilbao							
Alm. Huel	168		211	202	245		
T-Vitoria	12	12	12	12	12	12	12
T-Oviedo			43		43		43
T-Badajoz							
T-Barcelon	402	402	402	402	402	200	157
T-Burgos							
T-Córdoba	4	4	4	4	4	4	4
T-S.Sebast	22	22	22	22	22	22	22
T-Madrid	347	179	347	347	347	347	347
T-Murcia	10	10	10	10	10	10	10
T-Salaman							
T-Sevilla				34	34	34	34
T-Valencia	233	233	233	233	233	233	233
T-Bilbao	35	35	35	35	35	35	35
Alm.Tarra	111	229	68	77	34	279	279
C^1	2145696	2072280	2162767	2206386	2223457	2591196	2690182
C^2	470781	481365	470781	467551	467551	447957	443786
C^3	17676.92	17828.12	17647.25	17977.82	17948.15	20349.3	20824.45