ÍNDICE

Estudios de Economía Aplicada (1996)
No. 5, pp. 59-80

Alternativas para el Cálculo del Tanto Efectivo Anual en Operaciones a Corto Plazo

JOSÉ VICENTE MARCO HERRERO
LUIS FERRUZ AGUDO
JOSÉ LUIS SARTO MARZAL
Universidad de Zaragoza

Esta nueva versión incluye todas las correcciones sugeridas por el censor, las cuales me han parecido oportunas y por las que les quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

Este trabajo pretende establecer un modelo que posibilite la obtención del tanto efectivo que implícitamente rige las operaciones a corto plazo, de tal modo que sea posible la comparación de diferentes alternativas, aun cuando éstas tengan diferente duración y considerando que se hallan regidas por leyes financieras simples.

En relación con lo anterior, también se analizará la incidencia del punto de valoración utilizado y de determinadas aproximaciones empleadas en la práctica, como es el caso de la solución media, en el cálculo del citado tanto efectivo

ABSTRACT

The objective of this paper is to establish a model making possible the obtaining of the effective rate of return/cost, which implicitly rules the short-term financial operations, in such a way that being possible comparing among different alternatives, although even these ones suppose different duration and also considering initial financial regulation by means of simple financial law.

In relation with the above mentioned, another objective is to analyze the used valuation moment incidence and other approaches used in practice, as for instance the mean solution in order to calculate the effective rate or return/cost.

Artículo recibido en enero de 1996. Revisado en marzo de 1996.

ÍNDICE

1.- Introducción y Objetivos

Analizando las obras que nos son conocidas de entre la muy diversa y relevante bibliografía de Finanzas y Matemática Financiera existente en España se detecta que, como consecuencia del vertiginoso proceso de innovación financiera que está teniendo lugar y que impone el estudio de nuevas operaciones e instrumentos financieros, cada vez se presta menor atención a las operaciones más tradicionales. Precisamente en este bloque de operaciones surgen algunos aspectos troncales en los que, en ocasiones, parecen existir enfoques alternativos entre los diversos autores.

Con este artículo se pretende rescatar uno de esos aspectos básicos para realizar, en la medida de lo posible, un análisis ecléctico e integrador intentando derivar algunas conclusiones que en el peor de los casos contribuyan a reavivar cierta discusión, lo cual ya justificaría su propia realización.

Tal y como se deduce del título de este trabajo, el objetivo es analizar el proceso de cálculo del tanto efectivo anual ('i') para operaciones a corto plazo, fundamentalmente con duración inferior al año, y regidas por ley financiera simple.

2.- Planteamiento del Problema

Actualmente, muy diversas e importantes operaciones financieras están regidas por ley financiera de capitalización-descuento compuesto y ello puede desembocar en el intento de aplicar la mecánica de aquella incluso cuando se analizan operaciones reguladas por ley financiera simple. Por ello y simultaneamente al planteamiento del problema, conviene recordar algunos aspectos diferenciales entre ambos tipos de leyes financieras:

1) Si se establece una equivalencia financiera entre los valores actual y final de una renta regulada por ley financiera simple, se observa que el tanto que hace cierta esa igualdad difiere del tanto de valoración empleado para el cálculo de los citados valores actual y final. Dicho de otro modo, no se cumple que

$$V_n = V_o\ [1 + i\,(t_n - t_o)] \qquad \#\ \text{¡Falso!}$$

siendo (V_o, t_o) y (V_n, t_n) los capitales financieros representativos de los valores actual y final de la renta en cuestión, respectivamente.

Esto es debido a que, en capitalización simple y utilizando unos mismos tanto 'j' de valoración y punto 'p' de aplicación de la ley financiera, no es posible calcular un capital financiero (Z, z) equivalente de otro (X,x) a partir de un tercer capital financiero (Y,y) equivalente de (X, x) y que ha sido calculado previamente. Gráficamente,

(X, x) ---------------------------> (Z', z)

(X, x) --------> (Y, y) ----------->(Z, z)

** (Z', z) es equivalente de (X, x) al tanto 'j'.
** (Y, y) es equivalente de (X, x) al tanto 'j'.
** (Z, z) es equivalente de (Y, y) al tanto 'j'.
** (Z, z) no es equivalente de (X, x) al tanto 'j'.

2) Dado que las leyes financieras de descuento comercial simple y de capitalización simple no son sistemas financieros conjugados, un determinado tanto de descuento (d) unicamente será equivalente a otro tanto de interés ('j') para aquel plazo de tiempo en el que se haya planteado la correspondiente ecuación de equivalencia financiera.

$$[1 - d(t_2 - t_1)] = \frac{1}{[1 + j(t_2 - t_1)]}$$

$$\boxed{j = \frac{d}{[1 - d(t_2 - t_1)]} = f(d, \underline{\text{plazo}})}$$

3) Cuando se plantea una ecuación de equivalencia financiera empleando ley financiera simple y computando el tiempo en años, el tanto obtenido se puede interpretar como si se tratara de un tanto de interés nominal anual [j(m)] calculado con ley financiera compuesta. Por lo tanto, para realizar comparaciones con otras alternativas de distinta duración será necesario obtener el tanto efectivo anual (i) a través de la expresión de los tantos equivalentes o, lo que es lo mismo, sometiendo al tanto j(m) a un proceso financiero estacionario, discreto y uniforme.

En el caso de una operación simple - aquella que tiene un sólo capital en la prestación (C_o, t_o) y otro en la contraprestación (C_n, t_n) - se tiene que:

$$C_o \, [1 + j(m) \, t_{años}] = C_n \quad \text{---------->} \quad \boxed{j(m) = \frac{C_n - C_o}{C_o} \, \frac{1}{t_{años}}}$$

$$\boxed{i = [1 + \frac{j(m)}{m}]^m - 1}$$

donde m= fraccionamiento o frecuencia de capitalización de los intereses, que en este caso coincide exactamente con la inversa de la duración de la operación. De este modo, únicamente se obtendrá 'i' de forma directa cuando m=1, es decir, cuando t=1 año.

4) Las leyes financieras simples no respetan la misma equivalencia de tantos mientras que las leyes financieras compuestas. Este aspecto incide de una forma muy importante en el cálculo de tantos efectivos como se verá posteriormente. Por el momento es suficiente observar que, dadas las dos situaciones siguientes donde se opera con un mismo 'j' a distintos plazos y donde el tiempo se expresa en años

E $\qquad$ C_1 $\quad$ .... $\qquad$ $E\,(1 + j t_1) = C_1$

|__________|________

$t_o = 0$ $\qquad$ t_1 $\quad$ .... $\qquad$ $E\,(1 + i_1)^{t_1} = C_1$

E $\qquad\qquad$ C_2 $\quad$ .... $\qquad$ $E\,(1 + j t_2) = C_2$

|__________|__________|__

$t_o = 0$ $\qquad$ t_1 $\qquad$ t_2 $\quad$ .... $\qquad$ $E\,(1 + i_2)^{t_2} = C_2$

los valores de i_1 y de i_2 que se obtienen en ambos casos difieren entre sí, verificándose además que $i_1 > i_2$.

Teniendo en cuenta fundamentalmente estas limitaciones, se plantea ahora el interrogante principal de este trabajo: "*para calcular un verdadero tanto efectivo que recoja la rentabilidad/coste real de la operación ¿se debe utilizar ley financiera simple puesto que es la que realmente rige la operación o por el contrario se debe aplicar siempre capitalización compuesta siguiendo las orientaciones que el Banco de España da en la circular 8/1.990 y que en todo caso entiende la rentabilidad/coste como una T.I.R. (Tasa Interna de Retorno)?*".

3.- Operaciones simples

Dada una operación pura de descuento de un único efecto comercial según se representa en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{lcl} C_o & & C_n \\ | & \rule{6cm}{0.4pt} & | \\ t_o = 0 & & t_n \text{(en años)} \end{array}$$

$$C_o = C_n \; [\, 1 - d\,(t_n)\,] = C_n \; [\, 1 - d\, t\,]$$

se plantea el cálculo de la rentabilidad efectiva para el banco, la cual coincidirá con el coste efectivo para el cliente por tratarse de una operación pura. Para ello existen las dos posibilidades siguientes:

3.1.- Solución en Capitalización Simple

La correspondiente ecuación de equivalencia financiera se escribe de la siguiente forma

$$C_o \, (1 + j(m)\, t) = C_n$$

de donde fácilmente se puede despejar j(m)

$$j(m) = \frac{C_n - C_o}{C_o} \times \frac{1}{t} = i(m) \times m$$

Finalmente, se obtiene el tanto efectivo anual ('i') aplicando la expresión de los tantos equivalentes en capitalización compuesta:

$$1 + i = [1 + \frac{i(m)}{m}]^{m}$$

$$i = [1 + \frac{i(m)}{m}]^{m} - 1 = [1 + i(m)]^{m} - 1 \quad [1 + \frac{C_n}{C_o} - 1]^{m} - 1$$

$$\boxed{i = [\frac{C_n}{C_o}]^{m} - 1}$$

siendo precisamente este tanto ('i') el que permite una comparación homogenea entre las diversas alternativas de financiación que se le pudieran presentar a la empresa.

3.2.- Solución en Capitalización Compuesta

Por su propia definición, este sistema financiero considera implícitamente los efectos de la reinversión en períodos posteriores de los intereses obtenidos en períodos anteriores, con lo que bastará plantear la equivalencia financiera computando el tiempo en años para obtener el tanto efectivo anual 'i':

$$C_o \, (1 + i)^{t} = C_n$$

$$\boxed{i = [\frac{C_n}{C_o}]^{1/t} - 1 = [\frac{C_n}{C_o}]^{m} - 1}$$

donde m = frecuencia de capitalización de los intereses o, según otros autores, fraccionamiento.

Como se observa la rentabilidad-coste efectivo es idéntica en ambos planteamientos. Esto es debido a que el planteamiento de una equivalencia financiera en capitalización simple conduce a la obtención de un tanto i(m) (si el computo del tiempo se ha realizado en periodos m-ésimos) o un tanto j(m) (si el computo del tiempo se ha realizado en años) que, mediante la utilización de la relación básica entre tantos nominales y efectivos, es facilmente convertible en tanto efectivo anual.

Hasta aquí se ha observado que en el marco de las operaciones simples ambos tipos de planteamientos conducen al mismo resultado y son, por lo tanto, compatibles e incluso complementarios en cierta medida. Veamos a continuación que ocurre cuando se trata de operaciones con varios capitales al menos en una de las dos partes intervinientes, prestación y contraprestación.

4.- Operaciones Compuestas: el caso de la Factura de Descuento

En este apartado se va a seguir trabajando con una operación financiera a corto plazo y regida por ley financiera simple con la única salvedad de que ahora se introducen varios capitales en la contraprestación. El esquema sería el siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} C_o = \sum\limits_{s=1}^{n} E_s & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ |\_\_\_\_\_\_ & |\_\_\_\_\_\_ & |\_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & | \\ t_o & t_1 & t_2 & & t_n \end{array}$$

donde $E_s = C_s (1 - d\, t_s)$ si lo que se analiza es una operación de descuento, o donde $C_s = E_s (1 + i\, t_s)$ si se trata de una operación de capitalización. Nosotros nos vamos a limitar al estudio del primer caso si bien ello no elimina la posibilidad, cuando menos teórica, de plantear la equivalencia financiera entre los capitales financieros intervinientes haciendo uso de ley financiera de capitalización. De hecho, el cálculo de la rentabilidad/coste de las operaciones se realiza de forma habitual haciendo uso de éste último sistema financiero y ello incluso en el caso de las más típicas operaciones de descuento.

Centrándonos en las propuestas de los diversos autores para el cálculo de la rentabilidad-coste efectivo de una factura de descuento, que va a ser el caso concreto que nos ocupe en este apartado, se observa que no existe unanimidad de criterio. En este sentido se podrían diferenciar, en primer lugar,

ÍNDICE

aquellos autores que haciendo uso de la capitalización compuesta, se muestran a favor de un planteamiento próximo a la propuesta del Banco de España. En segundo lugar, están aquellos otros que prefieren hacer uso de ley financiera simple pero que no se ponen de acuerdo en cuestiones tales como si el empleo de la solución media es una aproximación al verdadero resultado o por el contrario es el resultado correcto. Finalmente, existe un tercer bloque de autores que prefieren obviar el problema y ni siquiera hacen referencia al mismo.

A nuestros efectos seguiremos una orientación similar a la del epígrafe anterior, es decir, trataremos de encontrar un planteamiento ecléctico e integrador que sea capaz de dar respuesta a las siguientes cuestiones:

1) ¿Tiene sentido plantear la diferenciación entre ley financiera simple o compuesta? Tal y como ocurre en las operaciones simples, ¿conducen integradamente al mismo resultado?.

2) ¿Cuál debe ser el significado de un tanto efectivo?

3) Teniendo en cuenta lo anterior, ¿existe algún planteamiento mejor que el resto?.

4.1.- Solución en Capitalización Simple

Para intentar responder al primer interrogante puede plantearse el problema utilizando capitalización simple en unos términos parecidos a los que se han empleado para las operaciones simples, es decir, unificar todos los capitales financieros $\{(C_s , t_s)\}$, s = 1,2,.....n en uno solo, de tal modo que se pueda operar con $(C_o , t_o = 0)$ y la solución unificada de los anteriores.

En este sentido, se podría escribir:

$$E_1 \; [1 + i(m)\, t_n \,] = C_1 \; [1 + i(m)\,(t_n - t_1)]$$
$$E_2 \; [1 + i(m)\, t_n \,] = C_2 \; [1 + i(m)\,(t_n - t_2)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_n \; [1 + i(m)\, t_n \,] = C_n \; [1 + i(m)\,(t_n - t_n)]$$

$$\left[\sum_{s=1}^{n} E_s\right][1 + i(m)\, t_n] = \left[\sum_{s=1}^{n} C_s\, [1 + i(m)\,(t_n - t_s)]\right]$$

Operando se llega a concluir que:

$$\left[\sum_{s=1}^{n} E_s\right][1 + i(m)\, t_n] = \left[\sum_{s=1}^{n} C_s\right][1 + i(m)(t_n - t_{med})]$$

$$\boxed{i(m) = \frac{\sum C_s - \sum E_s}{t_n \sum E_s - (t_n - t_{med}) \sum C_s}}$$

donde $t_{med} = \dfrac{\sum C_s\, t_s}{\sum C_s}$, $m = \dfrac{1}{t_{med}}$ y t_n se toma como punto 'p' de aplicación de la ley financiera.

Lo visto hasta aquí permite decir que, a efectos de calcular i(m), se puede proceder de dos formas: 1) considerando el conjunto de los capitales financieros intervinientes y 2) operando únicamente con el capital efectivamente entregado a la empresa al principio de la operación y una solución de capital unificado representativo del conjunto de efectos que la empresa lleva a descontar:

$$\left(C_o = \sum_{s=1}^{n} E_s\,,\ t_o\right) \qquad\qquad \left(\sum_{s=1}^{n} C_s\,,\ t_{med}\right)$$

$$t_o \;|\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!| \; t_{med}$$

Una segunda forma diferente de calcular i(m) consiste en establecer la equivalencia financiera de los capitales representados en la gráfica superior en el momento t_o . Este criterio tiene una ventaja y un inconveniente. La ventaja radica en que se establece la equivalencia financiera en el origen, lo cual estaría más acorde con el criterio de aquellos autores que defienden que la

ÍNDICE

solución más rigurosa para este tipo de problemas es aquella que valora los distintos capitales refiriéndolos al momento en que por razón de un pago desaparecen todos los derechos y obligaciones de la situación planteada. El inconveniente es que, a pesar de realizar la equivalencia en el origen, los dos capitales con los que se opera se han obtenido a partir de una equivalencia financiera planteada en t_n . No obstante, se podrá comprobar unas lineas más adelante que este inconveniente no es tal como consecuencia de que la solución de capital unificado que se está utilizando, conocida más habitualmente como solución media, no depende del punto en el que se plantea la ecuación de equivalencia financiera.

Analíticamente, esta segunda posibilidad se puede reflejar como sigue:

$$C_o \; [1+i(m)\, t_{med}] = \sum_{s=1}^{n} C_s \qquad \text{, donde} \quad p = t_{med}$$

$$C_o = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s}{[1+i(m)\, t_{med}]} \qquad \text{, donde} \quad p = t_0$$

obteniéndose en ambos casos el mismo resultado

$$\boxed{i(m) = \frac{\sum C_s - C_o}{C_o} \, \frac{1}{t_{med}}.}$$

Como se observa en la expresión obtenida, este i(m) no coincide con el obtenido en el primer planteamiento y ello se debe precisamente a que la ecuación de equivalencia financiera no se está planteando en t_n , tal y como se hacía en el primer caso, sino en t_0.

La tercera y última posibilidad sería plantear la equivalencia en el origen desde el primer momento, pero haciendo uso de ley financiera de descuento simple comercial para que sea posible despejar la incognita. Posteriormente se hallaría el tanto de interés equivalente en capitalización simple. Analíticamente:

$$C_o = [\sum_{s=1}^{n} C_s [1 - d\, t_s]]$$

de donde se obtiene que:

$$C_o = [\sum_{s=1}^{n} C_s] [1 - d\, t_{med}] \; ; \text{ siendo } t_{med} = \frac{\sum C_s\, t_s}{\sum C_s}$$

y despejando:

$$\boxed{d = \frac{\sum C_s - C_o}{\sum C_s} \frac{1}{t_{med}}}$$

Por último sabiendo que

$$j(m) = \frac{d}{1 + d\, t_{med}}$$

y sustituyendo 'd' por su expresión se obtiene tras simplificar la expresión resultante que:

$$\boxed{j(m) = \frac{\sum C_s - C_o}{C_o} \frac{1}{t_{med}}}$$

A posteriori, resulta lógico que esta expresión coincida exactamente con la obtenida en la segunda alternativa ya que ambas se obtienen a partir de una ecuación de equivalencia financiera planteada en el origen.

Finalmente, en cualquiera de las tres alternativas se podría obtener el tanto efectivo anual aplicando una metodología idéntica a la empleada para operaciones simples, es decir, mediante un proceso financiero estacionario uniforme discreto con frecuencia de fraccionamiento m:

$$\boxed{i = \left[1 + \frac{j(m)}{m}\right]^{m} - 1} \quad ; \text{ siendo } t_{med} = \frac{\sum C_s\, t_s}{\sum C_s} \text{ y } m = 1/(t_{med})$$

4.2.- Solución en Capitalización Compuesta

Una vez analizado lo que ocurre al trabajar con capitalización simple, se podría plantear la solución con capitalización compuesta partiendo de los dos capitales con los que se viene operando hasta el momento. De este modo, se habría reconvertido la operación compuesta en una operación simple con un único capital en la prestación y otro único capital en la contraprestación y, por lo tanto, sería extrapolable la conclusión obtenida en el punto 2 de este trabajo.

Sin embargo, ello no parece posible en principio puesto que partiendo de la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta

$$C_o = \sum_{s=1}^{s=n} C_s\,(1+i)^{-t_s}$$

no hemos conseguido llegar a ninguna de las ecuaciones de equivalencia financiera obtenidas a partir del planteamiento con capitalización simple.

Por tanto, como conclusión al primer interrogante hay que indicar que la capitalización simple y la capitalización compuesta, tal y como se han planteado hasta el momento, no llevan a la misma solución. A partir de aquí parece adecuado marcar un criterio que contribuya a clarificar cual de las dos propuestas es la más acertada.

4.3.- ¿Cuál debe ser el significado de un tanto efectivo anual?

El tanto efectivo anual debe ser, bajo nuestro punto de vista, aquel tanto que permita obtener directamente a partir del capital inicial y supuesto que los capitales que se generen son reinvertidos en las mismas condiciones, el capital disponible al cabo de un año.

C_o $\qquad\qquad\qquad\qquad$ C_n

|_______ _______________ _______|

<------------- (1 año) -------------->

$$C_o\,(1 + i) = C_n$$

donde 'i' = tanto anual efectivo de la operación, es decir, rentabilidad o coste de la operación suponiendo que <u>cada uno de los capitales</u> que intervienen en la misma siguen evolucionando a lo largo del año en idénticas condiciones a las existentes al principio.

A nuestro juicio, es importante insistir en que se deben mantener las condiciones para cada uno de los capitales y no para la operación en su conjunto puesto que éste ha de ser el factor decisivo a la hora de discriminar entre los planteamientos analizados hasta el momento y el planteamiento integrador que se propone en el punto 4.4.. En este sentido, bastará con recordar que la rentabilidad-coste de descontar cada uno de los efectos con los que se está trabajando es diferente para cada uno de ellos.

Planteando la ecuación de equivalencia para un efecto cualquiera:

$$E_s\ [1 + i_s(m)\ t_s] = C_s \qquad \text{donde } m = \frac{1}{t_s}$$

y sabiendo que: $E_s = C_s\ [1 - d\ t_s]$, se puede escribir

$$C_s\ [1 - d\ t_s]\ [1 + i_s(m)\ t_s] = C_s$$

de donde se obtiene, como ya se ha visto en un apartado anterior que:

$$\boxed{i_s(m) = \frac{d}{1 + d\ t_s}}$$

es decir, $i(m)$ será distinto para cada efecto siempre que t_s también lo sea.

ÍNDICE

4.4.- Propuesta de una solución integradora.

El único modo de mantener cada capital en las mismas condiciones iniciales es operando con cada uno de ellos individualmente, es decir, en el caso de la factura de descuento se operará para calcular el capital final como si se tratara de 'n' operaciones simples. De este modo se obtendrá un tanto efectivo anual para cada uno de los efectos:

$$i_s = \left[\frac{C_s}{E_s}\right]^{m_s} - 1 = \left[\frac{C_s}{E_s}\right]^{\left[\frac{1}{t_s}\right]} - 1 \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

y la ecuación final de equivalencia considerando los 'n' efectos comerciales al cabo de un año sería:

$$C_o (1 + i) = \left[\sum_{s=1}^{s=n} E_s\right](1 + i) = \left[\sum_{s=1}^{s=n} E_s (1 + i_s)\right]$$

de donde operando se obtiene que

$$\boxed{i = \frac{\sum E_s\, i_s}{\sum E_s}}$$

A nuestro juicio éste tanto 'i' es el verdadero tanto efectivo para el conjunto de la operación porque, tal y como se ha dicho anteriormente, es el que permite obtener directamente, a partir de $[C_o = \sum_{s=1}^{s=n} E_s, t_o]$, el capital $[\sum_{s=1}^{s=n} E_s (1 + i_s)$,1 año].

Por último, queda por aclarar el porqué al trabajar tanto con capitalización simple como con capitalización compuesta el resultado obtenido difiere del

ÍNDICE

anterior y, en consecuencia, el tanto obtenido no representa la rentabilidad real. En este sentido se puede indicar, por ejemplo, que al plantear la ecuación de equivalencia en el caso concreto de la capitalización compuesta

$$C_o = C_1 [1 + i]^{-t_1} + C_2 [1 + i]^{-t_2} + \ldots\ldots + C_n [1 + i]^{-t_n} =$$

$$= C_1 [1 + i(m)]^{-mt_1} + C_2 [1 + i(m)]^{-mt_2} + \ldots\ldots + C_n [1 + i(m)]^{-mt_n}$$

implícitamente se está calculando un determinado tanto subperiodal i(m) medio que posteriormente es aplicado de forma indiscriminada para proyectar todos los capitales intervinientes al final del año. La imprecisión se comete precisamente al trabajar con este i(m) y no hacerlo de forma separada, tal y como se podrá observar en el caso práctico que se plantea en el siguiente apartado.

En caso de utilizar capitalización simple ocurre un fenómeno similar ya que se está calculando un tanto j(m) medio que posteriormente se reconvierte a tanto efectivo anual haciendo uso de un proceso financiero, lo cual es sinónimo de valorar todos esos capitales a un mismo tanto medio.

5.- Caso Práctico

Vamos a calcular el coste efectivo de financiación para la remesa de letras del gráfico según cada una de las posibilidades analizadas en esta comunicación:

C_o	83.145	123.400	97.215
0	mes 1	mes 2	mes 3

Si los efectos son descontados a un tanto de descuento anual d=12% los efectivos que la empresa recibirá por cada una de las letras serán:

$$E_1 = 83.145 \left(1 - d \frac{1}{12}\right) = 82.313$$

$$E_2 = 123.400 \left(1 - d \frac{2}{12}\right) = 120.932$$

$$E_3 = 97.215\,(1 - d\,\frac{3}{12}) = 94.299$$

$$\boxed{C_o = E_1 + E_2 + E_3 = 297.544}$$

A partir de aquí se procede al cálculo del coste de la operación para la empresa según las distintas posibilidades que se han ido analizando a lo largo de este trabajo.

A) CALCULO CON LEY FINANCIERA SIMPLE

A.1) *Empleo de capitalización simple, obtención de la solución media y equivalencia en* t_n .

$$i(m) = \frac{\sum C_s - \sum E_s}{t_n \sum E_s - (t_n - t_{med}) \sum C_s} =$$

$$= \frac{303.760 - 297.544}{(0,25)\ 297544 - (0,25 - 0,1705)\ 303.760} = 0,1237$$

$$i = [1 + \frac{i(m)}{m}]^{m} - 1 = [1 + \frac{0,1237}{5,8651}]^{5,8651} - 1 = 0,1302$$

$$\boxed{i = 13,02\%}$$

A.2) *Empleo de la solución media obtenida en A.1) y equivalencia en* t_o .

$$i(m) = \frac{\sum C_s - C_o}{C_o}\ \frac{1}{t_{med}} =$$

$$= \frac{303.760 - 297.544}{303.760}\ \frac{1}{0,1705} = 0,12$$

ÍNDICE

$$i = \left[1 + \frac{i(m)}{m}\right]^{m} - 1 = \left[1 + \frac{0{,}12}{5{,}8651}\right]^{5{,}8651} - 1 = 0{,}1261$$

$$\boxed{i = 12{,}61\%}$$

A.3) *Empleo de ley financiera de descuento comercial simple, equivalencia en t_o y posterior cálculo del correspondiente tanto en capitalización simple.*

Como se ha demostrado en el desarrollo del trabajo, el resultado de este *planteamiento coincide exactamente con el resultado de la alternativa A.2).*

$$\boxed{i = 12{,}61\%}$$

B) CALCULO CON LEY FINANCIERA COMPUESTA

Se plantea la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$C_o = 297.544 = 83.145\ [1+i(m)]^{-1} + 123.400\ [1+i(m)]^{-2} + 97.215\ [1+i(m)]^{-3}$$

de donde se obtiene $i(m) = 0{,}01017$.

Aplicando la expresión de los tantos equivalentes:

$$i = (1 + i(m))^{m} - 1 = (1{,}01017)^{12} - 1 = 0{,}1291$$

$$\boxed{i = 12{,}91\%}$$

Tal y como se ha expuesto anteriormente, este resultado se obtiene como consecuencia de que el sistema financiero de capitalización compuesta calcula un tanto 'medio' de coste (para la empresa que lleva a descontar los efectos) o de rentabilidad (para la entidad financiera) que a través de un proceso interno del propio sistema se eleva a tanto efectivo anual. El primer tanto es

ÍNDICE

precisamente el tanto efectivo mensual 'i(m)' y ese proceso al que se hace referencia valora todos los capitales precisamente a ese tanto, de tal modo que no se respeta el diferente coste de financiación que el descuento de cada uno de esos efectos supone para la empresa.

En este sentido y situándonos desde el punto de vista de la entidad financiera, el capital que la misma recuperaría al cabo de un año, suponiendo que se mantienen las condiciones de reinversión y operando con capitalización compuesta, se calcularía como sigue:

$$
\begin{aligned}
83.145\,[1 + i(m)]^{11} &= 92.934 \\
123.400[1 + i(m)]^{10} &= 136.540 \\
97.215[1 + i(m)]^{9} &= \underline{106.483} \\
& \ \boxed{335.957}
\end{aligned}
$$

Este extremo se puede comprobar haciendo financieramente equivalentes C_o y la cuantía que acabamos de obtener:

$$297.544\ (1 + i) = 335.957$$

de donde

$$i = \left(\frac{335.957}{297.544}\right) - 1 = 0{,}1291$$

$$\boxed{i = 12{,}91\%}$$

resultado que coincide con el obtenido al plantear la ecuación de equivalencia financiera con ley de capitalización-descuento compuesto directamente.

C) PROPUESTA INTEGRADORA QUE SE PROPONE

Para obtener la cuantía que la entidad financiera obtendría al cabo del año es necesario, en primer lugar, calcular el tanto efectivo asociado a cada uno de los efectos, tal y como se indica a continuación:

ÍNDICE

$$82.313{,}55\,(1+i_1)^{\frac{1}{12}} = 83.145; \quad \text{de donde } i_1 = 12{,}81\%$$

$$120.932\,(1+i_2)^{\frac{2}{12}} = 123.400; \quad \text{de donde } i_2 = 12{,}88\%$$

$$94.298{,}55\,(1+i_3)^{\frac{3}{12}} = 97.215; \quad \text{de donde } i_3 = 12{,}95\%$$

A continuación podríamos obtener la cuantía que la entidad recuperaría al cabo de un año tras una cadena de reinversiones de las cuantias iniciales a los tantos que les corresponden:

$$83.145\,(1+i_1)^{\frac{11}{12}} = 83.145\,(1{,}1281)^{\frac{11}{12}} = 92.858$$

$$123.400\,(1+i_2)^{\frac{10}{12}} = 123.400\,(1{,}1288)^{\frac{10}{12}} = 136.510$$

$$97.215\,(1+i_3)^{\frac{9}{12}} = 97.215\,(1{,}1295)^{\frac{9}{12}} = \underline{\quad 106.511}$$

$$335.879$$

y finalmente se obtiene el tanto efectivo anual 'i' planteando la correspondiente ecuación de equivalencia financiera entre C_o y la cuantía obtenida

$$297.544\,(1+i) = 335.879$$

de donde

$$i = \left[\frac{335.879}{297.544}\right] - 1 = 0{,}1288$$

ÍNDICE

$$\boxed{i = 12{,}88\%}$$

Se obtiene el mismo resultado haciendo uso de la expresión obtenida en el correspondiente desarrollo analítico:

$$i = \frac{\sum E_s\, i_s}{\sum E_s} =$$

$$= \frac{82.313 * \frac{1}{12} + 120.932 * \frac{2}{12} + 94.298 * \frac{3}{12}}{297.544} = 0{,}1288$$

$$\boxed{i = 12{,}88\%}$$

6.- Resumen y Conclusiones

1°) Como consecuencia de la aparición en los últimos años de un número importante de operaciones financieras, la mayor parte de ellas regidas por ley financiera de capitalización-descuento compuesto, se detecta una cierta tendencia general a su utilización incluso en el ámbito de las operaciones regidas por ley financiera simple.

2°) Las leyes financieras simples constituyen un instrumento de valoración financiera independiente de las leyes financieras compuestas y, en este sentido, no se deben trasladar razonamientos típicos de este segundo tipo de leyes a las primeras.

3°) En relación con el punto anterior debe considerarse que, al operar en capitalización simple con un mismo tanto a distintos plazos, en realidad se está aplicando un tanto anual efectivo diferente en cada uno de ellos. Sin embargo, esto no ocurre en la capitalización compuesta dado que se trata de un sistema financiero multiplicativo que tiene en cuenta implícitamente el efecto de la reinversión de los rendimientos de períodos anteriores.

4°) Cuando se pretende calcular la rentabilidad-coste efectivo en capitalización simple y de una operación simple a un plazo inferior al año, lo que realmente se obtiene es un tipo de interés nominal que, mediante la correspondiente aplicación de un proceso estacionario, uniforme, discreto y de fraccionamiento

ÍNDICE

o frecuencia de capitalización de los intereses igual a la inversa de la duración de la operación, se puede reconvertir facilmente a tanto efectivo anual.

5°) Para operaciones simples y teniendo en cuenta lo indicado en el punto anterior, se demuestra que tanto la capitalización simple como la compuesta conducen al mismo tanto efectivo anual.

6°) Para el caso de una factura de descuento, como caso particular de una operación con varios capitales en la contraprestación y regida por ley financiera simple, se pone de manifiesto que existen diversos planteamientos para calcular el tanto efectivo, todos basados fundamentalmente en la solución media, y que éstos no conducen siempre a un mismo resultado. Este hecho revela la dificultad de cálculo que entraña una magnitud de estas características.

7°) A continuación, se realiza una propuesta acerca del verdadero significado que debe tener un tanto efectivo: "el tanto efectivo debe ser aquel que permita obtener directamente a partir del capital inicial y supuesto que los capitales que se generen son reinvertidos en las mismas condiciones iniciales, el capital disponible al cabo de un año."

8°) En el caso de una operación con varios capitales en la contraprestación y regida por ley financiera simple, se justifica que la única posibilidad de obtener un tanto de las características señaladas en el punto anterior consiste en operar con cada uno de los capitales financieros de forma independiente, de tal modo que se mantengan como condiciones de reinversión durante un año, aquellas que existían inicialmente para cada capital y que, generalmente, son distintas entre sí según lo expuesto en la conclusión 3ª).

En resumen, se debería operar como si se tratase de la suma de 'n' operaciones simples, con lo cual se conseguiría alimentar una cierta linea de complementariedad entre los sistemas financieros simples y compuestos.

9°) De forma intuitiva y también con un ejemplo práctico se justifica que, ni los planteamientos con capitalización simple basados en la solución media, ni el planteamiento en capitalización compuesta, conducen, bajo nuestro punto de vista, a la obtención de un verdadero tanto efectivo de acuerdo con los principios que dicta la pura ortodoxia financiera. Esto se debe fundamentalmente a que estos planteamientos no respetan los diferentes

ÍNDICE

tantos de valoración asociados a cada uno de los capitales financieros, sino que utilizan un tanto medio para todos ellos.

Bibliografía

Bonilla, M; Ivars, A. (1.992): *Operaciones de financiación: enfoque teórico-práctico*. Editorial AC. Madrid.

De Pablo López, A. (1.993,1.994): *Matemática de las operaciones financieras*. Tomos Y y II. De. UNED. Madrid.

------------------ (1.995): *Valoración financiera*. Tomos I y II. Ed. UNED. Madrid.

Gil Peláez, L. (1.987): *Matemática de las operaciones financieras*. Editorial AC Madrid.

González Catalá, V. (1.991): *Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera*. Ediciones Ciencias Sociales. Madrid.

González Catalá, V. (1.993): *Operaciones Financieras Bancarias y Bursátiles*. Ediciones Ciencias Sociales. Madrid.

Ruiz Amestoy, J.M. (1.988): *Cálculo Mercantil*. Centro de Formación del Banco de España. Madrid.

Vázquez, M.J. (1.993): *Curso de Matemática Financiera*. Ediciones Pirámide, S.A. Madrid.

Vercasson, A.; Skrhak, B. (1.989): *Mathematiques financieres et coût du financement*. Les Editions d'Organisation. Paris.