Estudios de Economía Aplicada
Nº 7, 1997. Págs.17-38

Cotas para el error total de una contabilidad: Aproximaciones bayesianas basadas en la distribución multinomial

HERNÁNDEZ BASTIDA, AGUSTÍN
Universidad de Granada
MORENO CARRETERO, Mª FRANCISCA
Universidad de Almería
VÁZQUEZ POLO, FRANCISCO JOSÉ
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Esta nueva versión incluye todas las correcciones sugeridas por el evaluador, las cuales nos han parecido oportunas y por las que le quedamos muy agradecidos.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una aproximación bayesiana para calcular cotas superiores para el error total de una contabilidad. El modelo, hace uso de la distribución multinomial y está modificado para permitir la incorporación de una información a priori parcial, que engloba la información relevante que posee el auditor sobre la cantidad de error total de una contabilidad. La existencia de un software específico hace accesible y cómoda la aplicación de esta aproximación. Se incluyen dos casos prácticos para ilustrar la metodología presentada.

SUMMARY

In this paper we present a bayesian approach to calculate upper bounds on the total error of account. The model make use of the multinomial distribution and it is modifying in order to make possible the incorporation of partial prior information which comprise all the outstanding information possess by the auditor about the total error amount of account.

There is a specific software which make accessible and easy the practical application of this approach. Two practical cases are include to explain this methodology.

Artículo recibido en noviembre de 1996. Revisado en abril de 1997.

Palabras clave: Auditoría; Multinomial; Bayesiano.

Clasificación AMS:

Código UNESCO: 530204

1.- Introducción

Podemos entender la Auditoría como la verificación independiente de la calidad de los estados de cuentas de una empresa u organización. Las ventajas de la utilización del muestreo y los resultados estadísticos en la Auditoría son evidentes puesto que permiten obtener, a un coste relativamente bajo, aproximaciones fiables de las características de un grupo de apuntes contables. Concretamente, nuestro interés se centrará en utilizar las herramientas estadísticas para recopilar datos que permitan evaluar e inferir sobre el error agregado de un balance.

Los primeros intentos de utilizar el muestreo estadístico en Auditoría tuvieron que ver con los métodos clásicos de estimaciones puntuales, entendiendo por tales los basados en la distribución Normal. El problema es que existen abundantes descripciones en la literatura contable que ponen de manifiesto las anomalías de estos procedimientos debido a que generalmente las poblaciones contables no se ajustan a una distribución Normal, ni tan siquiera son medianamente simétricas. (Ver para este punto, entre otros, Johnson, Leitch y Neter (1981); Neter, Johnson y Leitch (1983, 1985); Ham, Losell y Smieliauskas (1985)....)

Los intentos para resolver esta dificultad han sido, y continúan siendo, muchos; se están aportando soluciones parciales al problema y en el momento actual varios de ellos constituyen activas líneas de investigación. Podemos describir sucintamente la situación del siguiente modo:

- Una primera variedad de procedimientos que se ha desarrollado son los métodos paramétricos bayesianos. Esencialmente estos procedimientos parten de la consideración de dos magnitudes observables en la muestra,

m : número de fallos observados en la muestra,

z : orden de magnitud de los fallos observados.

Los diversos procedimientos, descritos con detalle en Vázquez (1992), han surgido a partir de diferentes suposiciones sobre la forma de las verosimilitudes y sobre la modelización probabilística de las distribuciones a priori para los parámetros del problema. Ver por ejemplo Cox y Snell (1979), Godfrey y Neter (1984) ó Felix y Grimlund (1977) .

- Una segunda variedad de procedimientos lo constituyen las cotas no paramétricas para el error total de una contabilidad. Entre estos procedimientos, que se describen con cierta minuciosidad en Moreno (1995), están la cota de Stringer, la cota multinomial y la cota de momentos.

- Una tercera variedad la constituyen los procedimientos basados en la distribución multinomial. Estos procedimientos son paramétricos porque modelizan la verosimilitud del problema a través de la multinomial y habitualmente utilizan información a priori, pero los hemos separado de la primera variedad porque plantean unos problemas especiales que los distinguen, estos son esencialmente la alta dimensión del problema. (Ver por ejemplo, Tsui, Matsumura y Tsui (1985); Matsumura, Tsui y Wong (1987); Byekwaso (1995)).

En esta tercera variedad se enmarca el presente trabajo. Su contenido queda organizado de la siguiente manera:

- La sección 2 establece la modelización de la verosimilitud que vamos a utilizar en el trabajo.

- La sección 3 presenta la utilización que hacemos de la información a priori relevante en el problema, sin recurrir a elecciones normalizadas de distribución a priori.

- La sección 4 presenta dos casos prácticos de utilización de la metodología anterior.

- La sección 5 compara el modelo propuesto con otros modelos bayesianos propuestos en la literatura.

2.- El muestreo DUS y modelización de la verosimilitud

Con frecuencia los auditores emplean el método de muestreo denominado de unidad monetaria, DUS. Este método no contempla la población como compuesta de items línea o unidades físicas, sino como compuesta de items individuales de unidades monetarias; generalmente, el error de la unidad monetaria se determina a través de céntimos. Consideremos que las unidades monetarias de una muestra DUS de tamaño n se clasifican en categorías de fallo expresadas en porcentaje (es decir, en céntimos)[1].

Se consideran errores, tanto de sobrevaloración como de subvaloración. Por tanto, tenemos,

- categorías donde se clasifican las unidades monetarias según su fallo

$$-100, \ldots 100$$

- número de unidades monetarias de la muestra en cada categoría,

$$n_{-100}, \ldots\ldots, n_{100}$$

En estas condiciones,

$$\sum_{i=-100}^{100} n_i = n$$

- proporción de unidades monetarias de la población que pertenece a cada categoría,

$$p_{-100}, \ldots\ldots, p_{100}$$

con $\sum_{i=-100}^{100} p_i = 1$, $p_i \geq 0$, para todo i = -100, ... , 100.

Si el muestreo es con reemplazamiento, la distribución de los $\{n_i\}$, dados los $\{p_i\}$ y n, es exactamente multinomial. Si el muestreo es sin reemplazamiento y n es pequeño comparado con el número de unidades monetarias de la población, entonces la distribución de los $\{n_i\}$ es aproximadamente multinomial. Por tanto, la probabilidad de observar $n_{-100}, \ldots, n_{100}$ dados $p_{-100}, \ldots, p_{100}$ y n, viene dada por:

$$L(n_{-100}, \ldots, n_{100} / p_{-100}, \ldots, p_{100}) = \frac{n!}{n_{-100}! \ldots\ldots\ldots n_{100}!} \prod_{i=-100}^{100} p_i^{n_i},$$

donde los n_i son valores enteros no negativos y la suma de los n_i igual a n.

Observemos que este modelo de toma de observaciones conduce a una verosimilitud multinomial.

Por otro lado, en la práctica resulta frecuente que se dispongan de informaciones procedentes de otras fuentes o de investigaciones anteriores; la metodología bayesiana ofrece al auditor la posibilidad de incorporar al proceso de solución de su problema la información subjetiva que posee sobre el mismo.

Una primera dificultad surge al intentar plasmar ese conocimiento en una distribución a priori sobre la cantidad de error, de manera que pueda combinarse con la información proporcionada por los datos muestrales a fin de obtener la distribución a posteriori sobre la cantidad de error, que se supone engloba todo su posible conocimiento.

Utilizando la notación anterior, la magnitud que interesa es D,

$$D = \sum_{i=-100}^{100} \frac{i\, p_i}{100}$$

que es, aproximadamente, la verdadera proporción de cantidad de unidades monetarias con error. La tasa de error de la población viene dada por

$$p = 1 - p_0 = \sum_{i \neq 0} p_i$$

La finalidad de esta aproximación es, como cabía esperar, obtener una buena cota superior para D. Una vez obtenida esta cota superior, es inmediato determinar la cota superior para la cantidad total de u. m. erróneas, que es lo que realmente interesa, sin más que multiplicar por el valor registrado total de libro, RBV, que es una constante.

$$RBV \cdot D = \frac{RBV}{100} \sum_{i=-100}^{100} i p_i$$

Obsérvese que D es una combinación lineal de los $\{p_i\}$, donde los $\{p_i\}$, son los parámetros del problema y por tanto, desconocidos. Si deseamos realizar un análisis bayesianoen estas condiciones la línea a seguir sería:

- Considerar una distribución a priori sobre los $\{p_i\}$. Se supone que el auditor posee información a priori sobre las verdaderas proporciones de fallos, $\{p_i\}$. Obsérvese la alta dimensión del parámetro y por tanto la dificultad del usuario para establecer la distribución a priori. Por esta razón suele ser usual seleccionar la distribución de Dirichlet como distribución a priori. En definitiva, una elección normalizada de distribución a priori. Se recurre a la familia conjugada para evitar el formidable problema de especificar una distribución para un parámetro de tan alta dimensión. (Ver los trabajos antes citados de Tsui, Matsumura y Tsui (1985); Matsumura, Tsui y Wong (1987); Byekwaso (1995)).

- Combinarla con la distribución multinomial de las observaciones, dados los $\{p_i\}$ y n,

- Obtener la distribución a posteriori para los $\{p_i\}$. Utilizando el hecho de que la familia de distribuciones de Dirichlet de distribuciones a priori es una familia conjugada para la distribución multinomial, entonces, supuesto que la distribución a priori de las proporciones es Dirichlet , y dadas las observaciones muestrales en las condiciones anteriores, se tiene que la distribución a posteriori de los $\{p_i\}$ es una Dirichlet,

- Determinar la cota para D, que es combinación lineal de los $\{p_i\}$. Evidentemente, las inferencias sobre D pueden obtenerse, al menos teóricamente, a partir de la distribución a posteriori f_D. Pero la distribución f_D es terriblemente complicada y es preciso recurrir a una aproximación de la distribución a posteriori de la combinación lineal de los $\{p_i\}$.

Este planteamiento plantea graves dificultades en la práctica:

a) En un problema usual de Auditoría, el número de componentes del vector $\{p_i\}$ es muy alto. Es usual que si los errores se suponen sólo de sobrevaloración, la dimensión del espacio de los $\{p_i\}$ sea 100, mientras que si los errores son de subvaloración y sobrevaloración se incremente[2] hasta 200. Aunque muchas de estas p_i sean 0, la dimensión del espacio sobre el que hay que especificar la distribución a priori es tan alta que resulta una labor difícil, sino imposible. Además, en muchas ocasiones los parámetros $\{p_i\}$ no le resultan familiares al auditor.

b) No admite análisis de robustez de una manera rápida e intuitiva. Un problema de cualquier análisis bayesiano es la robustez; si no se confirma la robustez de un procedimiento se pueden tener problemas al aceptar la exactitud de las conclusiones. Berger (1994) comenta la idea de escoger modelos y distribuciones a priori que sean inherentemente robustos.

c) Aún en el caso de que el problema citado en a) tenga solución, la distribución a posteriori resultante es inmanejable. Aunque los errores encontrados en la muestra sean pocos, la distribución a posteriori de D, obtenida mediante el hecho de ser D combinación lineal de los $\{p_i\}$, no puede manipularse directamente; es preciso recurrir a aproximaciones. Con esto se pierde exactitud al determinar los límites de credibilidad para D.

d) Al adoptar para la distribución a priori de los parámetros del problema una elección normalizada, se puede perder información "relevante" para la solución del mismo.

En definitiva el problema es que la verosimilitud aparece modelizada de una manera natural por la distribución multinomial, con paramétro $\{p_i\}$, y sin embargo la magnitud intuitiva para el auditor y sobre la que presumiblemente tenga información a priori es la "cantidad de error" y no los parámetros $\{p_i\}$.

3.- La magnitud intuitiva para el auditor es la cantidad de error

Las dificultades que acabamos de mencionar nos inducen a presentar el siguiente enfoque alternativo:

Consideremos un experimento en el cual el resultado de cada realización pertenece a una de *k* categorías alternativas. Sea $\theta = (\theta_1, ..., \theta_k)$ un vector de probabilidades, es decir, $0 \leq \theta_i \leq 1$, para todo i=1,..., k; y $\sum \theta_i = 1$. Cada uno de los θ_i designa la probabilidad de que el resultado de una realización particular pertenezca a la i-ésima categoría. Consideremos n de tales realizaciones independientes y sea $(X_1,..., X_k)$ un vector aleatorio, donde X_i es el número de realizaciones en las que se presenta la categoría i-ésima, $\sum X_i = n$. La distribución del vector aleatorio $(X_1,..., X_k)$ es una distribución multinomial con parámetros $(\theta_1, ..., \theta_k)$, es decir,

$$Prob\ (n_1,...,n_k / n, \theta) = \frac{n!}{n_1!.....n_k!} \prod_{i-1}^{k} \theta_i^{n_i}$$

donde $n_i = 0, 1,..., n$; $\sum n_i = n$.

Designamos a la distribución multinomial con los parámetros indicados por $M(\theta)$ o por $M(\theta_1, ..., \theta_k)$.

Si tenemos un problema estadístico en el cual la función de verosimilitud es $M(\theta_1, ..., \theta_k)$ y queremos realizar un análisis bayesiano, sería preciso disponer de una distribución a priori sobre los parámetros del problema, es decir, sobre $(\theta_1, ..., \theta_k)$. Si se conociera tal distribución a priori, el teorema de Bayes nos permitirá conocer, al menos en teoría, la distribución a posteriori.

Pero aquí se plantean algunos problemas; habitualmente, el parámetro tendrá una alta dimensión y existe una gran dificultad para especificar una distribución a priori. Con frecuencia se recurre a una "elección normalizada" de distribuciones a priori, que tienen un buen comportamiento analítico (por ejemplo, la distribución de Dirichlet), pero que no utiliza la información a priori de la que dispone el auditor; un ejemplo de esto es la aproximación citada en el apartado anterior.

Por tanto, procediendo de este modo, nos podemos encontrar con situaciones donde se realiza una selección automática de una distribución a priori y simultáneamente no se está utilizando un cierto grado de información relevante para el usuario y para el problema.

Concretando, hay una diversidad de situaciones en las que el usuario tiene información sobre una "magnitud intuitiva" que surge como una función de los parámetros del problema. En símbolos, si notamos por Θ el espacio paramétrico de los parámetros $(\theta_1,\ldots..,\theta_k)$, existe una función de fuerte contenido intuitivo en el problema, del tipo,

$$\varphi : \Theta \to \Lambda$$
$$(\theta_1,\ldots..,\theta_k) \to \varphi(\theta_1,\ldots..,\theta_k) = \lambda$$

de tal forma que el usuario tiene información sobre los valores λ . Por ejemplo, la magnitud "cantidad de error total de una contabilidad" es familiar al auditor y sobre ella tiene, normalmente, conocimientos relevantes y extramuestrales. Esta magnitud es, como se ha mencionado, función de los posibles fallos de unidades monetarias. Esto es un caso concreto de ese tipo de situaciones prácticas donde se dispone de una notable información a priori sobre un nuevo parámetro, obtenido como combinación lineal de los parámetros primitivos. Estas situaciones se denominan genéricamente "situaciones con información a priori parcial" porque la información disponible es demasiado pobre para poder combinarse con la verosimilitud a través del teorema de Bayes.

Supongamos que se especifica un rango de posibles errores totales como un gran número (por ejemplo, 500 o 1.000) de estados igualmente espaciados.

El usuario puede disponer de una distribución a priori sobre los valores λ , distribución que notaremos $\xi(\lambda)$, y que es una distribución que surge de una forma mucho más natural que la seleccionada automáticamente.

Consideramos que se utiliza un procedimiento de muestreo DUS (pero podría adaptarse a cualquier otro) y que el resultado de nuestras observaciones muestrales deseamos combinarlo con nuestra información a priori, con objeto de obtener una distribución a posteriori sobre los estados de la naturaleza, que en nuestro caso son las posibles cantidades de error total en la contabilidad.

Admitiendo errores de subvaloración y sobrevaloración (obsérvese que esta flexibilidad no es admitida en algunos modelos bayesianos), los posibles fallos que se pueden presentar, expresados en porcentajes, varía desde -100 hasta 100. Las posibles categorías de fallo son,

$$T_{-100};\ T_{-99};\ \ldots\ldots,\ T_{-1};\ T_0;\ T_1;\ldots\ldots;\ T_{99};\ T_{100}$$

correspondientes a fallos del,

$$-100\%;\ -99\%;\ldots..;\ -1\%;\ 0\%;\ 1\%;\ldots..;\ 99\%;\ 100\%$$

El hecho de señalar estos posibles fallos es por seguir el esquema DUS usual. No alteraría para nada el planeamiento admitir otra cantidad diferente de fallos que fuera más adecuada a las características de un problema determinado.

Estas serán las k categorías alternativas para nuestro caso. Notamos por θ_i , para i = -100, ..., 100, la probabilidad de que una u.m. presente un fallo de categoría T_i. Por supuesto, θ_0 y T_0 se refieren a unidades monetarias sin fallos.

Una muestra DUS de tamaño n proporciona una información muestral $\{n_i; i = -100, ..., 100\}$ donde n_i es el número de unidades monetarias que han presentado un fallo del tipo T_i. Al igual que antes, n_0 se refiere al número de u.m. sin fallo.

Dadas estas condiciones, tenemos:

$0 \leq n_i \leq n$, $i = -100, ... 100$

$$* \sum_{i=-100}^{100} n_i = n$$

$$* n_{100} = n - \sum_{i=-100}^{99} n_i$$

* la inmensa mayoría de los n_i serán 0, es decir, una gran parte de las unidades monetarias no tendrán fallo.

En definitiva, la verosimilitud de la muestra es,

$$M(\theta_{-100}, ...\theta_{100}) = \frac{n!}{\prod_{i=-100}^{100} n_i!} \prod_{i=-100}^{100} \theta_i^{n_i}$$

La magnitud relevante para el auditor, y sobre la cual suele tener información a priori, es la cantidad total de error, que notaremos por λ , y que viene dada por,

$$\lambda = \frac{RBV}{100} \sum_{i=-100}^{100} i\theta_i$$

donde RBV es el valor registrado total del libro. Notamos por $\xi(\lambda)$ la distribución a priori sobre λ.

El problema es el siguiente:

El teorema de Bayes no permite la combinación de la verosimilitud $M(\theta_{-100},\ldots,\theta_{100})$ con la distribución a priori $\xi(\lambda)$. Por tanto, no resulta posible conducir un análisis bayesiano. Entre otros problemas surge la no integrabilidad de la verosimilitud del problema respecto de la medida de probabilidad a priori disponible.

Una forma de resolver este problema es modificar la verosimilitud, de una manera coherente, para hacerla compatible con la información a priori disponible; en definitiva para poder restablecer el teorema de Bayes con la distribución a priori $\xi(\lambda)$.

La modificación de la verosimilitud que proponemos[3] y utilizamos en este trabajo es la siguiente:

$$M^B(\lambda) = \sum_{\lambda} \sup_{\varphi^{-1}(\{\lambda\})} M(\theta_{-100},\ldots,\theta_{100})\ I_{\varphi^{-1}(\{\lambda\})}$$

Un desarrollo minucioso de los cálculos y la técnica estadística que subyacen en la expresión anterior puede verse en Hernández, Moreno y Vázquez (1996).

Observemos que la verosimilitud modificada es compatible con la información a priori disponible.

Ahora la probabilidad a posteriori se obtiene como

$$\xi(\cdot/datos) = \frac{M^B(\lambda)\cdot\xi(\lambda)}{\int_{\Lambda} M^B(\lambda)\cdot\xi(d\lambda)}$$

esta fórmula fue denominada modelo cuasi-bayesiano o modelo MLPC ("Most Likely Probability Curves") para auditoría de cuentas por McCray (1984, 1992b).

Las expresiones anteriores permiten combinar, a través del teorema de Bayes, la información proporcionada por una muestra DUS con cualquier distribución

disponible por parte del auditor sobre la magnitud de interés en el problema - la cantidad de error en la contabilidad. De esta manera, es posible obetener conclusiones aprovechando "toda" la información relevante en el problema.

Una importante ventaja de este modelo consiste en la simplicidad de su aplicación práctica, debido al trabajo desarrollado por McCray para conseguir un programa de fácil manejo[4]. Con objeto de ilustrar e interpretar la utilización de los datos y tablas que proporciona este paquete consideramos dos casos prácticos en la siguiente sección.

4.- Casos prácticos

Caso nº 1

Supongamos una población con valor total de libro 1.000.000 u. m. de la que se extrae, utilizando DUS, una muestra de tamaño n=100. Al examinar la muestra se observan los resultados:

$$30,\ 40,\ -10,\ -10,\ -10,\ -10,\ 0,\ \ldots,\ 0 \quad (94 \text{ ceros})$$

esto es, se detectan dos fallos de sobrevaloración, del 30% y 40% respectivamente y cuatro fallos de subvaloración de igual valor, el 10%.

Por tanto, tenemos las categorías de fallo,

$$T_0,\ T_{30},\ T_{40},\ T_{-10}$$

y las correspondientes n_i (nº de u. m. que han presentado el fallo T_i),

$$n_0 = 94,\ n_{30} = 1,\ n_{40} = 1,\ n_{-10} = 4$$

por supuesto $\Sigma n_i = 100$.

La cantidad total de error λ vienen dada por la expresión

$$\lambda = \frac{1.000.000}{100} \sum_{i=-100}^{100} i\theta_i =$$

$$= 10.000\ \{100\ \theta_{100} + 30\ \theta_{30} + 40\ \theta_{40} + 4(-10)\ \theta_{-10}\}$$

Para determinar el valor de $M^B(\lambda)$ se procede del siguiente modo:

$$M^B(\lambda) = \text{máx } \frac{100!}{94!\ 4!}\ \theta_0^{94}\ \theta_{30}\ \theta_{40}\ \theta_{-10}^4$$

sujeto a las condiciones:

$$\theta_{100} + \theta_0 + \theta_{30} + \theta_{40} + \theta_{-10} = 1$$

$$10.000\ \{100\theta_{100} + 30\theta_{30} + 40\theta_{40} + 4(-10)\theta_{-10}\} = \lambda$$

En Moreno (1996) se encuentran los listados completos del Anexo con los datos producidos por el programa al suponer especificado un rango de 201 posibles errores totales igualmente espaciados. El programa proporciona, para cada estado de la naturaleza, la máxima verosimilitud, la probabilidad a posteriori y la probabilidad a posteriori acumulada; también aporta, para cada estado de la naturaleza anterior, las probabilidades que maximizan la verosimilitud y por último, un detalle de los cuantiles de la distribución a posteriori de la cantidad de error total utilizando la aproximación de 201 puntos.

Por ejemplo y como ilustración, consideremos un valor concreto $\lambda = -3.159$; el programa proporcionan los valores de las θ_i que maximizan la verosimilitud, entonces dado

$$M^B(-3.159) = \text{máx } \frac{100!}{94!\ 4!}\ \theta_0^{94}\ \theta_{30}\ \theta_{40}\ \theta^4_{10}$$

sujeto a: $$\theta_{100} + \theta_0 + \theta_{30} + \theta_{40} + \theta_{10} = 1$$

$$10.000\ \{100\theta_{100} + 30\theta_{30} + 40\theta_{40} + 4(-10)\theta_{-10}\} = -3.159$$

el programa facilita los siguientes valores:

$\theta_0 = 0.929253$
$\theta_{100} = 0$
$\theta_{30} = 0.004740$
$\theta_{40} = 0.004039$
$\theta_{-10} = 0.061968$

Por tanto,

$$M^B(-3.159) = \frac{100!}{94!\ 4!}\ (0.929253)^{94}\cdot(0.004740)\cdot(0.004039)\cdot(0.061968)^4 = 0.010203098$$

En este ejemplo se supone que la distribución a priori de λ es la distribución uniforme[5].

También el programa aporta la suma de todas las verosimilitudes sobre todos los posibles estados del error total; esa suma es 0.610178479917798

Con estos datos es posible calcular la probabilidad a posteriori, que será la razón entre $M^B(-3.159)$ y la suma de todas las verosimilitudes, por tanto

$$\xi(-3.159/\text{datos}) = \frac{0.010203098}{0.610178479} = 0.016721498$$

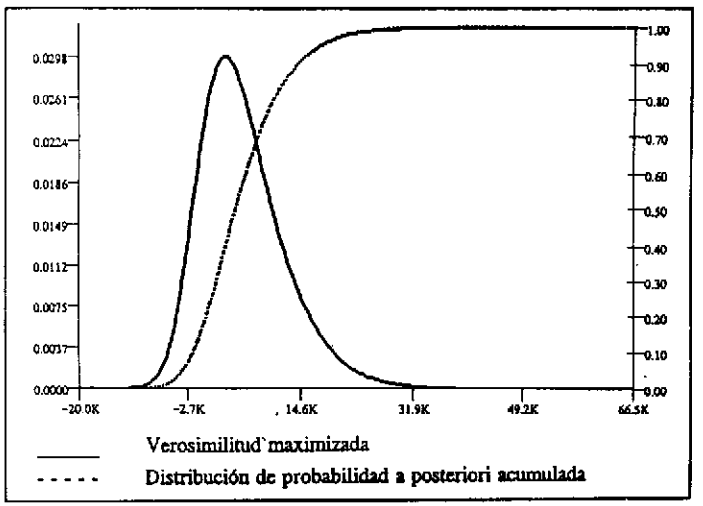
La probabilidad a posteriori acumulada para esta cantidad de error total resulta ser 0.054048.

Conocida la distribución a posteriori (realmente es una aproximación a esa distribución a posteriori con 201 puntos), es posible determinar características numéricas que pueden resultar de interés como el valor esperado, desviación típica, varianza, asimetría y curtosis; estos valores numéricos también los proporciona el programa.

Si atendemos a lo que suele ser de mayor interés en un problema de auditoría de cuentas, es decir, a las cotas para el error de la contabilidad, tendremos que acudir al listado de los cuantiles (Tabla 2) y podemos afirmar, por ejemplo, que una cota inferior al 0.05% es -3.324,94 y una cota superior al 95% es 28.233,11. Esto significa que la probabilidad de que la cantidad de error total sea menor que 28.233,11 es del 0.95.

En la figura 1 se representan las curvas de la verosimilitud maximizada y la correspondiente a la distribución a posteriori acumulada. También incluimos dos tablas: Tabla 1, con la parte más significativa de la aproximación de la distribución a posteriori; las entradas de esta tabla tienen el siguiente significado:

- Error : estado de la naturaleza
- Post. : probabilidad a posteriori discreta
- P. acum. : probabilidad a posteriori acumulada, y otra Tabla 2 con los cuantiles.



Error	Post.	P. acum.	Error	Post.	P. acum.
-6991	0.00251	0.00625	19067	0.01060	0.87089
-6225	0.00394	0.01020	19833	0.00980	0.88069
-5458	0.00598	0.01619	20599	0.00906	0.88976
-4692	0.00877	0.02496	21366	0.00838	0.89814
-3926	0.01236	0.03732	22132	0.00775	0.90589
-3159	0.01672	0.05404	22899	0.00716	0.91306
-2393	0.02165	0.07570	23665	0.00662	0.91969
-1626	0.02685	0.10255	24431	0.00612	0.92581
-860	0.03189	0.13445	25198	0.00566	0.93148
-94	0.03638	0.17083	25964	0.00523	0.93671
673	0.04002	0.21086	26731	0.00483	0.94155
1439	0.04264	0.25350	27497	0.00447	0.94602
2206	0.04417	0.29768	28263	0.00413	0.95015
2972	0.04469	0.34237	29030	0.00381	0.95397
3738	0.04429	0.38666	29796	0.00352	0.95750
4505	0.04313	0.42979	30563	0.00326	0.96076
5271	0.04137	0.47116	31329	0.00301	0.96378
6038	0.03916	0.51033	32096	0.00278	0.96656
6804	0.03665	0.54699	32862	0.00257	0.96913
7570	0.03399	0.58098	33628	0.00237	0.97151
8337	0.03146	0.61244	34395	0.00219	0.97370
9103	0.02912	0.64156	35161	0.00202	0.97573
9870	0.02695	0.66852	35928	0.00187	0.97760
10636	0.02494	0.69346	36694	0.00172	0.97933
11403	0.02308	0.71655	37460	0.00159	0.98093
12169	0.02136	0.73791	38227	0.00147	0.98240
12935	0.01976	0.75768	38993	0.00136	0.98376
13702	0.01829	0.77597	39760	0.00125	0.98502
14468	0.01692	0.79289	40526	0.00116	0.98618
15235	0.01565	0.80855	41292	0.00107	0.98725
16001	0.01448	0.82303	42059	0.00098	0.98824
16767	0.01339	0.83643	42825	0.00091	0.98916
17534	0.01239	0.84882	43592	0.00084	0.99000
18300	0.01146	0.86029			

TABLA 1

CUANTILES	ERROR
0.01	-6256.1808
0.05	-3324.9435
0.10	-1693.3002
0.15	-521.4569
0.20	470.6316
0.25	1377.5407
0.30	2245.4465
0.35	3103.1388
0.40	3972.6926
0.45	4874.5182
0.50	5830.8420
0.55	6869.6365
0.60	8026.6508
0.65	9336.7509
0.70	10846.9973
0.75	12630.2671
0.80	14808.4364
0.85	17609.4846
0.90	21543.8244
0.95	28233.1193
0.99	43589.0259

TABLA 2

Caso nº 2

En este caso se supone que los fallos que se han observado en la muestra corresponden a fallos de sobrevaloración exclusivamente y son:

$$50, 60, 5, 5, 5, 5, 0, ..., 0 \ \ (94 \text{ ceros})$$

por tanto, corresponden a las categorías

$$T_0, T_{50}, T_{60}, T_5$$

y el número de u.m. observadas en la muestra se reparte del modo:

$$n_0 = 94,\ n_{50} = 1,\ n_{60} = 1,\ n_5 = 4$$

Escogemos como posible cantidad de error $\lambda = 39.264$

$$M^B(39.264) = \text{máx}\ \frac{100!}{94!\ 4!}\ \theta_0^{94}\ \theta_{50}\ \theta_{60}\ \theta_5^4$$

sujeto a:

$$\theta_{100} + \theta_0 + \theta_{50} + \theta_{60} + \theta_5 = 1$$

$$10.000\ \{100\theta_{100} + 50\theta_{50} + 60\theta_{60} + 4{\cdot}5\theta_5\} = 39.264$$

El programa proporciona los valores de θ_i que maximizan $M^B(39.264)$ y son:

$\theta_0 = 0.903092$

$\theta_{50} = 0.019215$

$\theta_{60} = 0.024018$

$\theta_5 = 0.040452$

y en consecuencia, $M^B(39.264) = 0.00304902$

El dato que facilita el programa para la suma de todas las verosimilitudes máximas sobre todas las posibles cantidades de error total es

$$0.786330501899$$

por lo que la probabilidad a posteriori para $\lambda = 39.264$ es igual a

$$\frac{0.00304902}{0.7863305018} = 0.00387753$$

Al igual que en el caso n° 1, incluimos:

- Gráfico con las curvas de la verosimilitud maximizada y la distribución a posteriori (Figura 2).

- Tabla 3 con la parte más significativa de la aproximación de la distribución a posteriori.

- Tabla 4 de cuantiles.

CUANTILES	ERROR
0.01	3687.8057
0.05	5945.3675
0.10	7579.2654
0.15	8878.3411
0.20	10034.3411
0.25	11118.8499
0.30	12169.6532
0.35	13211.2615
0.40	14269.6312
0.45	15340.6726
0.50	16462.5788
0.55	17647.7758
0.60	18920.3163
0.65	20312.3680
0.70	21870.3269
0.75	23666.8615
0.80	25828.0698
0.85	28597.8247
0.90	32488.2311
0.95	39102.8412
0.99	54287.3405

TABLA 4

5.- Comparación con otros modelos bayesianos

Si comparamos el modelo desarrollado con algunos de los más conocidos procedimientos paramétricos de análisis bayesiano de muestras DUS, se obtienen diversas conclusiones (Ver los trabajos de Cox y Snell (1979); Godfrey y Neter (1984)). En todos esos modelos se considera un problema biparamétrico, con parámetros:

ϕ, tasa de error de la población que representa la proporción de unidades monetarias con error, y

μ, media de la fracción de error de las unidades monetarias con error.

El parámetro de interés en el problema es $\psi = \phi \cdot \mu$. El análisis de muestras DUS se realiza considerando que la muestra proporciona dos tipos de información:

- Número de unidades monetarias con error que se han encontrado en la muestra (esta magnitud se modeliza habitualmente con una distribución binomial o Poisson).

- Tamaño u orden de magnitud de los errores encontrados (esta magnitud se modeliza de diferentes formas, por ejemplo, distribución exponencial, exponencial truncada, o una Normal).

Posteriormente, es preciso disponer de distribuciones a priori sobre los parámetros ϕ y μ. Una vez obtenidas las distribuciones a posteriori de ϕ y μ, es necesario pasar a la distribución a posteriori de $\psi = \phi \cdot \mu$. Este paso es extraordinariamente complejo si no se supone la independencia de los parámetros ϕ y μ. Admitiendo esa independencia se determina la distribución a posteriori de ψ y a partir de ella se obtienen las conclusiones pertinentes, por ejemplo, cuantiles para cotas superiores de confianza.

De todo lo anterior se desprende que en todo el proceso han sido necesarios los siguientes pasos:

(i) Modelización del tamaño de los errores

(ii) Distribución a priori de ϕ

(iii) Distribución a priori de μ

(iv) Independencia de ϕ y μ

Estas etapas son esenciales para el desarrollo, pero presentan algunos problemas como son:

- En los pasos (i), (ii), (iii) surge el problema de la robustez. En (i) tengamos presente que en el modelo desarrollado en este trabajo la verosimilitud surge de manera natural de la forma de tomar los datos, no hay ninguna especulación más o menos justificada.

- La robustez en los pasos (ii) y (iii) es el problema habitual de cualquier análisis bayesiano, en los casos que nos ocupan los modelos presentan un grado apreciable de robustez como puede verse en Vázquez (1992).

Finalmente, la robustez frente a la hipótesis de independencia que se recoge en el paso (iii) está estudiada en Martel (1996), en donde se pone de manifiesto una muy notable falta de robustez de las conclusiones frente a posibles alejamientos de la hipótesis de independencia.

Por el contrario, en el modelo de información parcial, el único paso análogo a los anteriores es el siguiente:

Distribución a priori de λ

Es necesario indicar que la magnitud λ es, en general, más familiar al auditor que las magnitudes que se representan como ϕ y μ. Es clara la simplificación que supone la aproximación propuesta.

6.- Conclusiones

Se ha presentado una aproximación que determina cotas para el error asociado a una población contable utilizando la distribución multinomial para modelizar la verosimilitud e incorporando la información que pueda tener el auditor sobre un parámetro intuitivo, la cantidad de error. Este modelo de información parcial aporta una notable simplificación respecto de los habituales en la literatura. La simplificación es clara tanto a nivel conceptual como de aplicación práctica. Es de suponer que esto implique una mayor robustez; no obstante, este punto precisa más investigación.

Notas

1. Si un error es de, por ejemplo, 65,4 céntimos, se incluye en la categoría 66. Por otro lado, el número de categorías puede ampliarse o reducirse.

2. Aunque hay 20.1 P_i, están ligados por la relación $P_{100} = 1 - \sum_{i=-100}^{99} P_i$.

3. El problema planteado y para el que se propone la solución que se indica es una versión para auditoría de cuentas del problema general de inferencia estadística sobre un subparámetro.

4. Es posible acceder al programa poniendose en contacto con el profesor John H. McCray, School of Business Administration, The College of William and Mary, Williamsburg, Virginia 23185, USA.

5. El modelo puede utilizar cualquier distribución a priori. El programa admite incorporar, como distribución a priori, una distribución beta; variando sus parámetros se puede conseguir aproximar la distribución a priori escogida. Los parámetros de forma de la distribución beta que se manejan en este software son r y n. Las relaciones que ligan estos parámetros con los ussuales de la distribución beta a y b son las siguientes:

$$r = a$$

$$n = a + b$$

Así, una distribución beta de parámetros r=1 y n=2 corresponde a una distribución uniforme.

Bibliografía

BERGER J.O. (1994): An Overview of Robust Bayesian Analysis. Test. 3 (1). 5-124.

BYEKWASO S. (1994): Bayesian Sequential Inference for Error Rates and Error Amounts in Accounting

DATA. PH. D. Dissertation. American University. Washington.

COX D.R.; SNELL E.J. (1979): On Sampling and the Estimation of Rare Errors. Biometrika. 66(1) 125-132.

FELIX W.R.; Grimlund R.A. (1977): A Sampling Model for Audit Tests of Composite Accounts. Journal of Accounting Research. Spring. 23-40.

GODFREY J.; NETER J. (1984): Bayesian bounds for monetary unit sampling in accounting and auditing. Journal of Accounting Research. 22(2) . 497-525.

HAM J.; LOSELL D.; SMIELIAUSKAS W. (1985): An Empirical Study of Error Characteristics in Accounting Populations. The Accounting Review. LX-3. 384-406.

HERNÁNDEZ A.; MORENO M.F.; VÁZQUEZ F.J. (1996): (en prensa). Estimación del error de una contabilidad: procedimientos no paramétricos y uso de la distribución multinomial. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.

JOHNSON J.R.; LEITCH R.A.; NETER J. (1981): Characteristics of Errors in Accounts Receivable and Inventory Audits. The Accounting Rewiew. 56. 270-293.

MATSUMURA E.M.; TSUI K. ; WONG W. (1987): An Extended multinomial-Dirichlet model for error bounds for dollar-unit sampling. Contemporary Accounting Research. 6 (2). 485-500.

MARTEL M.C. (1996): Aportaciones al estudio de técnicas bayesianas en Auditoría. Tesis Doctoral. Univ. Las Palmas de G. C.

MCCRAY J.H. (1984): A Quasi-Bayesian Audit Risk Model for Dollar Unit Sampling. The Accounting Review. 59 (1). 35-51.

MCCRAY J.H. (1992b): MLPC. Most Likely Posterior Curves. Working Paper. Manuscrito no publicado. The College of William and Mary. School of Business Administration.

MORENO M.F. (1995). Métodos no paramétricos en auditoría estadística. Tesis Doctoral. Universidad de Almería.

NETER J.; JOHNSON J.R.; LEITCH R.A. (1983): A Note on Characteristics of Dollar- Unit Taints in Accounts Receivable and Inventory Audits. Working Paper 83-004. Univ. of Georgia Audit Research Center.

NETER J.; JOHNSON J.R. ; LEITCH R.A. (1985): Characteristics of Dollar-Unit Taints and Error Rates in Accounts Recivable and Inventory. The Accounting Review. LX-3. 488-499.

TSUI K.; MATSUMURA,E.M.; TSUI,K. (1985): Multinomial-Dirichlet Bounds for Dollar-Units Sampling in Auditing. The Accounting Review. 40 (1). 76-96.

VÁZQUEZ F.J. (1992): Técnicas estadísticas bayesianas en Auditoria. Un análisis de robustez. Tesis Doctoral. Univ. de las Palmas de G. C.