ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 26-2 2008 PÁGS. 1-16

Regresión mínimo cuadrática con errores relativos

MERCEDES ALVARGONZÁLEZ RODRÍGUEZ*
Departamento de Economía Aplicada
UNIVERSIDAD DE OVIEDO
e-mail: malvarg@uniovi.es

RESUMEN

El método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) consiste en estimar los parámetros que caracterizan al modelo de regresión de manera que sea mínima la suma de los cuadrados de los errores relativos.
En este trabajo se realiza un planteamiento descriptivo del método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos, se obtienen los estimadores de los parámetros para un modelo lineal simple y se propone una medida para analizar la bondad del modelo, que tiene una interpretación similar al coeficiente de determinación. A continuación se extiende esta formulación al modelo lineal básico, derivando el vector de estimadores de mínimos cuadrados con errores relativos. El trabajo concluye con una serie de aplicaciones del método de regresión propuesto, comparando sus resultados con los proporcionados por el método de estimación mínimo cuadrática.

Palabras clave: Regresión; método de mínimos cuadrados con errores relativos; inquietud doble cuadrática.

Minimum Quadratic Regression with Relative Errors

ABSTRACT

The method of Minimum Squares with Relative Errors (MSRE) consists of estimating the parameters that characterize the model of regression so that there is minimal the sum of the squares of the relative errors.
In this work there a descriptive exposition of the method of Minimum Squares with Relative Errors is realized, we obtain the esteeming of the parameters for a linear model and we propose a measure to analyze the kindness of the model, that admits an interpretation similar to the coefficient of determination. Later we formulate the linear basic model, deriving the vector of esteeming from minimum squares with relative errors. The work concludes with some applications of the method of regression proposed, comparing its results with provided by the method of Ordinary Least Squares (OLS).

Keywords: Regression; Method of Minimum Squares with Relative Errors; Double Quadratic uncertainty involving Utilities.

Clasificación JEL: C51.

Artículo recibido en julio de 2007 y aceptado para su publicación en febrero de 2008.
Artículo disponible en versión electrónica en la página www.revista-eea.net, ref. Ə-26212.

* La autora desea agradecer las interesantes sugerencias y aclaraciones realizadas por dos evaluadores anónimos que han contribuido a mejorar la versión inicial del presente trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

Una vez especificado un modelo econométrico, su estimación aparece estrechamente ligada al análisis de regresión, para el que han sido propuestos diversos procedimientos estadísticos entre los que destaca el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). El planteamiento clásico de la regresión se basa en los estudios de Gauss y Legendre, autores entre los que existe cierta polémica sobre la autoría del método de los mínimos cuadrados[1].

Dicho procedimiento propone como estimadores de los parámetros de un modelo aquellos valores que minimizan la suma de los cuadrados de los errores o residuos. Si bien este procedimiento es de uso generalizado debido a sus ventajas tanto descriptivas como inferenciales, también presenta algunas limitaciones referidas especialmente a su sensibilidad a las observaciones atípicas. De ahí la necesidad de considerar procedimientos alternativos de estimación, examinando en cada caso sus ventajas y limitaciones.

Desde una perspectiva amplia, es posible considerar el problema de la estimación de los parámetros como una predicción condicional, ya que observada la realización de una variable X estaremos interesados en predecir la realización de otra variable Y. Podríamos así introducir una *función de pérdida* que —siguiendo el planteamiento de Pindyck y Rubinfeld (2000) — cuantifique en qué medida el modelo sujeto a estimación se desvía de la realidad, de modo que el mejor predictor será aquél que minimice el valor esperado de una función de pérdida específica.

Así, denotando por Y e $\hat{Y}$ los valores observado y estimado respectivamente y por L la función de pérdida, el objetivo sería minimizar la pérdida esperada:

$$\text{Mín}_P E\left[L(Y-\hat{Y})/X \right] \tag{1}$$

La consideración de distintas funciones de pérdida conduce a los procedimientos de estimación habitualmente empleados: mínimos cuadrados ordinarios, mínimas desviaciones absolutas, método de los momentos y máxima verosimilitud.

El método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) consiste en derivar estimadores de los parámetros que minimizan la suma de los errores relativos al cuadrado. Este procedimiento presenta, respecto al método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios la ventaja de que, a igual cuantía de error absoluto, se penalizan más los errores cometidos entre valores pequeños de la variable que entre valores elevados.

En este trabajo se realiza un planteamiento descriptivo del método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos, se obtienen los estimadores de los parámetros para un modelo lineal simple y se propone una medida para analizar la bondad del modelo que tiene una interpretación similar al coeficiente de determinación.

[1] Según autores como Einsenhart (1976) y Stigler (1981) las pruebas documentales y estadísticas muestran que Gauss derivó el procedimiento antes, si bien sus aportaciones no tuvieron la difusión de la publicación realizada por Legendre en 1805.

A continuación se extiende esta formulación al modelo lineal básico, derivando el vector de estimadores de mínimos cuadrados con errores relativos.

El trabajo concluye con una serie de aplicaciones del método de regresión propuesto, comparando sus resultados con los proporcionados por el método de estimación mínimo cuadrático.

2. MÍNIMOS CUADRADOS CON ERRORES RELATIVOS

Dada una variable bidimensional (X, Y) que toma valores (X_i, Y_i), $i = 1,.., n$, la explicación de la variable Y a partir de la variable X puede ser llevada a cabo mediante la función $Y = f(X)$.

La comparación por cociente de valores teóricos y observados, siendo estos últimos no nulos, conduce a la definición de errores relativos:

$$\hat{u}_R^i = \frac{\hat{Y}_i}{Y_i} - 1 \tag{2}$$

Si se plantea como objetivo minimizar el valor agregado de los errores relativos al cuadrado, la función objetivo vendrá dada por la expresión:

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\hat{Y}_i}{Y_i} - 1 \right)^2 \tag{3}$$

es decir la suma de los errores relativos cuadráticos.

El método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) consiste, por tanto, en estimar los parámetros que caracterizan al modelo de regresión de manera que sea mínima la suma de los cuadrados de los errores relativos.

Podemos observar que este procedimiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos tiene en cuenta no sólo la magnitud de los errores sino también los valores de la variable a los que van referidos, de modo que, a igual cuantía de errores absolutos, se penalizan más aquellos errores cometidos entre valores reducidos de la variable que los asociados a valores elevados.

Esta característica es el principal rasgo diferencial con respecto a los procedimientos de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) o Mínimas Desviaciones Absolutas (MDA), que tienen en cuenta sólo la magnitud de los errores, con independencia de que éstos se produzcan entre valores bajos o elevados de la variable. Como consecuencia, el procedimiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) será menos sensible a la presencia de datos elevados en la variable y llevará asociada una función de pérdida más flexible.

3. REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

En el caso de considerar una sola variable causa X y un modelo lineal que explica la variable Y a partir de X $\left(Y = \beta_0 + \beta_1 X\right)$, nuestro objetivo será aproximar los parámetros que caracterizan este modelo. A continuación presentamos, desde un punto de vista descriptivo, las expresiones de los estimadores de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos, examinamos también algunas propiedades de interés y estudiamos las medidas adecuadas para evaluar la bondad del modelo.

3.1. Estimadores de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos

Si nos planteamos hacer mínima la suma de los errores relativos cuadráticos, la función objetivo vendría dada por la expresión:

$$S_R(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i)}{Y_i} - 1 \right]^2 \tag{4}$$

Derivando la función anterior respecto a $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ e igualando a cero dichas derivadas parciales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i} \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{Y_i^2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i} \end{aligned} \tag{5}$$

La solución del sistema anterior proporciona la estimación de los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{Y_i^2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2}\right)^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Las expresiones obtenidas para estimar los parámetros resultan más complejas que en el método clásico, puesto que en la función a minimizar (por considerar errores relativos) figuran valores observados de la variable Y en el denominador.

Sin embargo si consideramos una función que normaliza los valores, las expresiones son similares a las obtenidas en el método clásico.

Si definimos para toda variable X:

$$g_Y(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{Y_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2}} \tag{7}$$

Entonces se obtiene:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{g_Y(XY) - g_Y(X)g_Y(Y)}{g_Y(X^2) - g_Y(X)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = g_Y(Y) - \hat{\beta}_1 g_Y(X) \tag{8}$$

expresiones que presentan analogías con las obtenidas con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, considerando en este caso en lugar de la media la aplicación definida como g_Y.

Como consecuencia, se observa que la línea de regresión de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos garantiza las siguientes propiedades:

- La suma de los errores normalizados por los cuadrados de los valores de Y es nula, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2} \left[Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) \right] = 0 \tag{9}$$

- La recta de regresión de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos pasa siempre por el punto

$$\left(g_Y(X), g_Y(Y) \right).$$

- Si X e Y son linealmente independientes, entonces se obtiene:

$$\hat{\beta}_1 = 0, \qquad \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i^2}} \tag{10}$$

Es decir, en el supuesto de independencia lineal el modelo se reduce a una constante, que coincide con el promedio que minimiza la suma de los cuadrados de los errores relativos.

- Si $Y = cX$, entonces se obtiene $\hat{\beta}_1 = c$, $\hat{\beta}_0 = 0$, es decir, que si hay una relación lineal exacta entre las variables entonces el modelo estimado refleja esa relación.

Puede apreciarse que en los casos extremos de independencia lineal y dependencia funcional los parámetros obtenidos con el método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos tienen un comportamiento similar a los del método de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

3.2. Análisis de la bondad

Una vez llevada a cabo una regresión entre variables, resulta necesario disponer de medidas adecuadas para evaluar su bondad. En este sentido, la regresión mínimo cuadrática habitualmente utilizada proporciona también una medida de bondad, el coeficiente de determinación, basado en la descomposición de la varianza de *Y* en una varianza explicada más una varianza residual.

Diversos autores como Kvalseth (1985) y Scott y Wild (1991) han puesto de manifiesto algunas limitaciones del coeficiente de determinación que aconsejan prudencia en su utilización. Más concretamente, la utilización del coeficiente de determinación debe tener en cuenta el tipo de modelo formulado (lineal o no lineal, sobre variables originales o transformadas, con o sin término independiente,...), el método de estimación utilizado y la finalidad para la que se calcula dicha medida.

En el caso de que la estimación de un modelo lineal realice por el método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos, es posible llevar a cabo una descomposición de la inquietud doble cuadrática[2] asociada a la variable Y en la inquietud doble cuadrática explicada por el modelo más la inquietud doble cuadrática residual[3], es decir:

$$HU^{+*2}(Y) = HU^{+*2}(\hat{Y}) + HU^{+*2}(\hat{u}_R) \tag{11}$$

[2] La inquietud doble cuadrática ha sido definida en Alvargonzález (2003) a partir de dos indicadores de la familia de medidas de inquietud de orden β, y ha sido empleada en la medición de la desigualdad de la renta (López, Alvargonzález y Pérez (2006)).

[3] La inquietud doble cuadrática explicada y la inquietud doble cuadrática residual no son medidas de inquietud en sentido estricto, sino que en realidad son respectivamente las varianzas de los valores teóricos y de los errores, ambos normalizados por los valores de la variable *Y*. Puesto que esas medidas tienen un carácter doble cuadrático las denotamos de esa manera por simplificar la notación y por seguir la analogía con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios.

donde:

$$HU^{+*2}(Y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{Y}_i}{Y_i}-1\right)^2 f_i$$

$$HU^{+*2}(\hat{Y})=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{Y}_i}{Y_i}-\frac{\overline{Y}_i}{Y_i}\right)^2 f_i \qquad (12)$$

$$HU^{+*2}(\hat{u}_R)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{Y}_i}{Y_i}-1\right)^2 f_i$$

siendo f_i la frecuencia relativa del valor Y_i, en general: $\frac{1}{n}$.

Esta propiedad es análoga a la descomposición de la varianza de Y en una varianza explicada más una varianza residual.

La descomposición de la inquietud doble cuadrática de la variable Y permite definir una medida de la bondad del modelo similar al coeficiente de determinación del método clásico. De la misma forma que el coeficiente de determinación se define a partir de la varianza de la variable Y y de la varianza residual, vamos a definir una medida de la bondad del modelo a partir de la inquietud doble cuadrática asociada a la variable Y y de la inquietud doble cuadrática residual:

- $R^2_{HU^{+*2}}=1-\dfrac{HU^{+*2}(\hat{u}_R)}{HU^{+*2}(Y)}$ (13)

Esta medida presenta en el caso lineal las siguientes propiedades:

- $R^2_{HU^{+*2}}=\dfrac{HU^{+*2}(\hat{Y})}{HU^{+*2}(Y)}$ (14)

La medida de bondad del modelo se puede expresar como el cociente entre la inquietud doble cuadrática explicada por el modelo y la inquietud doble cuadrática de la variable Y, es decir es la proporción de inquietud doble cuadrática de la variable Y que es explicada por el modelo.

- $0 \le R^2_{HU^{+*2}} \le 1$ (15)

La medida de bondad del modelo está acotada entre 0 y 1, al igual que el coeficiente de determinación del método clásico.

- Si $Y=cX$ entonces:

$$R^2_{HU^{+*2}}=1$$

En el caso de dependencia funcional entre las variables la medida de bondad alcanza la cota superior.

- $R^2_{HU^{+*2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Y}_i = \overline{Y} \qquad i = 1, \ldots, n$ (16)

La medida de bondad del modelo se anula cuando el modelo lineal es una constante igual a la media de la variable *Y*.

4. EL MODELO LINEAL BÁSICO

En este apartado ampliamos nuestra óptica de análisis en un doble sentido. En primer lugar, porque muy pocas veces se puede considerar una sola variable explicativa, por lo que resulta más adecuado realizar una formulación con varias variables causa, es decir un modelo de regresión múltiple.

Por otra parte, en el análisis econométrico la especificación de un modelo se lleva a cabo distinguiendo una parte sistemática o determinista y otra aleatoria o estocástica, asociada a un término de error que denotaremos por u sobre cuyo comportamiento se formulan ciertas hipótesis de trabajo.

De este modo, el modelo lineal puede ser especificado como sigue:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \ldots + \beta_k X_k + u \tag{17}$$

donde X_2, X_3, ..., X_k son $k - 1$ variables explicativas, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ son parámetros y u es un error o perturbación aleatoria.

Con el objeto de estimar los k parámetros del modelo se considera una muestra de tamaño n, teniéndose un sistema de ecuaciones que puede ser expresado de forma matricial como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \tag{18}$$

donde:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \ldots & X_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & X_{2n} & \ldots & X_{kn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

El modelo básico de regresión lineal puede ser descrito como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \\ &E(\mathbf{u}) = 0 \\ &E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \mathbf{I}_n \\ &\rho(\mathbf{X}) = k < n \end{aligned} \tag{20}$$

obteniéndose los estimadores de Mínimos Cuadrados Ordinarios $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ al minimizar la expresión:

$$S = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{21}$$

La condición necesaria de extremo conduce a la siguiente expresión habitualmente utilizada:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{MCO}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{22}$$

Por su parte, el planteamiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos se basa en una transformación del modelo anterior que puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_R = \mathbf{X}_R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_R \\ &E(\mathbf{u}_R) = 0 \\ &E(\mathbf{u}_R\mathbf{u}_R') = \sigma^2\mathbf{I}_n \\ &\rho(\mathbf{X}) = k < n \end{aligned} \tag{23}$$

El modelo en términos relativos $\mathbf{y}_R = \mathbf{X}_R\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}_R$ se obtiene premultiplicando el modelo inicial por la siguiente matriz[4]:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{Y_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{Y_n} \end{pmatrix} \tag{24}$$

pudiendo por tanto expresarse los errores aleatorios relativos como:

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{I} - \mathbf{X}_R\boldsymbol{\beta}$$

sobre los que se asume las hipótesis de esperanza nula y matriz de varianzas-covarianzas escalar.

El supuesto de esperanza nula resulta, al igual que en el caso de las perturbaciones aleatorias en términos absolutos, fácilmente justificable. Por su parte, la matriz de varianzas-covarianzas vendrá dada por la expresión:

[4] A diferencia de lo que ocurre en el método de mínimos cuadrados generalizados la matriz de transformación tiene una componente aleatoria.

$$E(\mathbf{u}_R\mathbf{u}_R') = E\left(\mathbf{TuuT}'\right) = E\begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{Y_1^2} & \frac{u_1u_2}{Y_1Y_2} & \cdots & \frac{u_1u_n}{Y_1Y_n} \\ \frac{u_2u_1}{Y_2Y_1} & \frac{u_2^2}{Y_2^2} & \cdots & \frac{u_2u_n}{Y_2Y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{u_nu_1}{Y_nY_1} & \frac{u_nu_2}{Y_nY_2} & \cdots & \frac{u_n^2}{Y_n^2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

para la que sería necesario asumir[5]:

$$E\left(\frac{u_i^2}{Y_i^2}\right) = \sigma^2 \quad \forall i; \qquad E\left(\frac{u_iu_j}{Y_iY_j}\right) = 0 \quad \forall i \neq j \tag{26}$$

En el procedimiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos la función a minimizar vendrá dada por la expresión:

$$\mathrm{S}_R = \hat{\mathbf{u}}_R'\hat{\mathbf{u}}_R = (\mathbf{I} - \mathbf{X}_R\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{I} - \mathbf{X}_R\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{27}$$

obteniéndose a partir de ella la expresión de los estimadores de mínimos cuadrados con errores relativos:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{MCER}} = \left(\mathbf{X}_R'\mathbf{X}_R\right)^{-1}\mathbf{X}_R'\mathbf{i} \tag{28}$$

donde **i** es un vector de dimensión n formado por unos.

Como puede apreciarse, desde un punto de vista operativo, el Método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos es equivalente al de mínimos cuadrados generalizados considerando la matriz de transformación *T*.

No obstante, a diferencia de las ponderaciones consideradas en el procedimiento de mínimos cuadrados generalizados, que van referidas a valores de las variables explicativas, en el procedimiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos estas ponderaciones van asociadas a los valores de *Y*, adoptados como referencia para el análisis de los errores.

Por lo que se refiere a la bondad del modelo, de modo análogo al caso simple es posible definir un coeficiente de determinación que en el caso lineal viene dado por la siguiente expresión:

$$R^2 = 1 - \frac{HU^{+*2}(\mathbf{u})}{HU^{+*2}(\mathbf{Y})} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}_R'\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{R}}{\mathbf{y}_R'^c\mathbf{y}_R^c} \tag{29}$$

[5] La hipótesis de homocedasticidad puede plantear problemas en este caso, como consecuencia de la aparición de una variable aleatoria en el denominador.

donde $\mathbf{y}_R^c$ es el vector de valores centrados relativos:

$$\mathbf{y}_R^c = \begin{pmatrix} \dfrac{Y_1 - \overline{Y}}{Y_1} \\ \dfrac{Y_2 - \overline{Y}}{Y_2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{Y_n - \overline{Y}}{Y_n} \end{pmatrix} \tag{30}$$

5. APLICACIONES

En este apartado se plantean algunas aplicaciones del método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos (MCER) comparando los resultados con los obtenidos por el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO). Para ello se consideran modelos lineales estimando sus parámetros a través de los dos procedimientos y analizando su bondad a través de las correspondientes medidas.

1. En primer lugar se plantea la estimación del consumo final de los hogares (Y) en función de la renta bruta disponible (*X*), a partir de la información suministrada por la Contabilidad Regional de España (CRE) para las Comunidades Autónomas españolas en el año 2002, considerando ambas variables expresadas en miles de euros.

Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla 1 donde se aprecia que los dos métodos de estimación considerados proporcionan resultados similares para las propensiones marginales al consumo, existiendo en cambio algunas diferencias en lo que se refiere a los consumos autónomos.

TABLA 1
Estimación del consumo final de los hogares a partir de la renta bruta disponible.

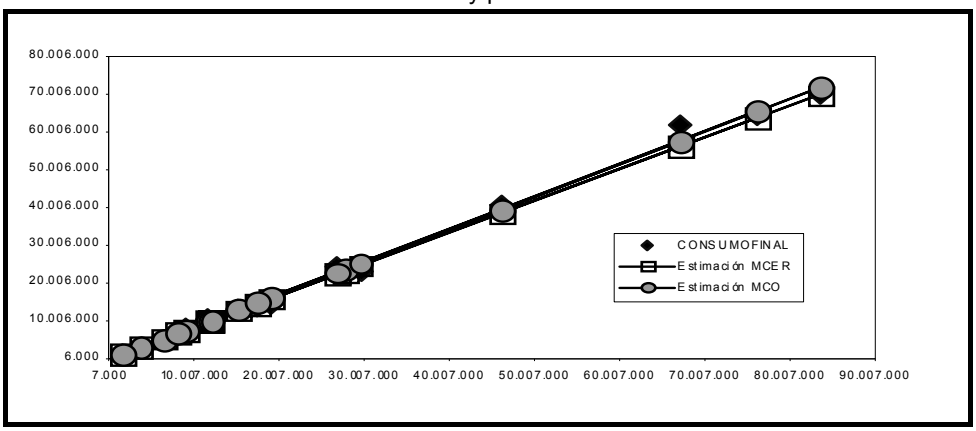
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$R^2_{HU^{+*2}}$	R^2
Método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos	50.527,4385	0,8329	99,98%	99,44%
Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios	390.844,632	0,8631	99,96%	99,56%

Fuente: Elaboración propia.

Por lo que se refiere a las medidas de bondad de los modelos, los resultados son similares, como corresponde a la elevada capacidad explicativa asociada a estos datos, pudiendo apreciarse que los resultados más elevados corresponden a la medida de bondad adecuada para cada método de estimación (el coeficiente de determinación es superior en el modelo estimado por el método de MCO, mientras el coeficiente basado en la inquietud es superior en el modelo estimado con errores relativos). La representación de estos resultados aparece recogida en el Gráfico 1.

GRÁFICO 1

Consumo final de los hogares por Comunidades Autónomas. Estimaciones por Mínimos Cuadrados con Errores Relativos y por Mínimos Cuadrados Ordinarios.



Fuente: Elaboración propia.

2. A continuación vamos a considerar la información proporcionada por el Anuario Social 2004 de La Caixa que facilita amplia información para las 50 provincias españolas. Más concretamente, nos planteamos explicar el índice de oferta cultural y ocio (Y) a partir del índice de nivel educativo (X_1) y del índice de renta (X_2)[6].

En la Tabla 2 se recogen las estimaciones de los parámetros del modelo lineal simple (considerando como variable explicativa el índice de nivel educativo) y múltiple (teniendo también en cuenta el índice de renta), incluyendo los resultados obtenidos a través de los dos procedimientos y las medidas de bondad asociadas.

[6] La información aparece en http://www.lacaixa.es, donde también puede consultarse la metodología de elaboración de los distintos índices.

TABLA 2
Estimación del índice provincial de oferta cultural y ocio.

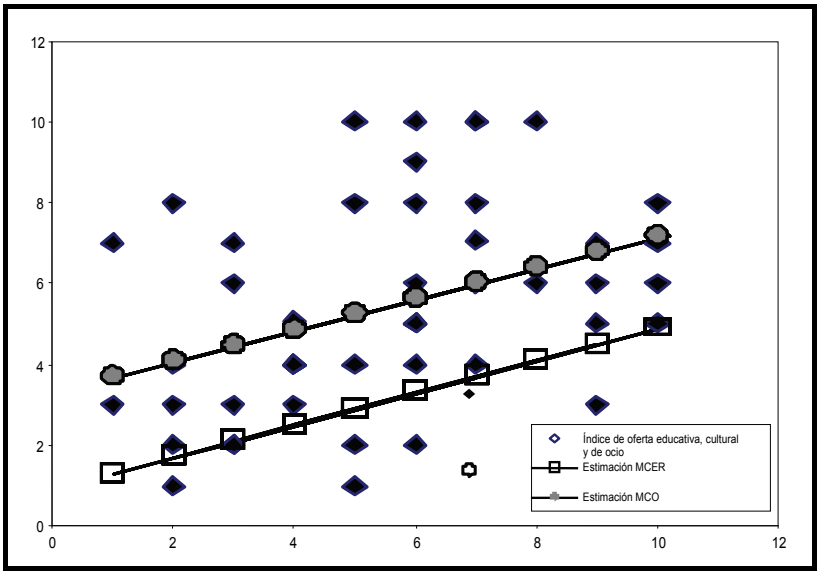
Modelo simple $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$		$R^2_{HU^{+*2}}$	R^2
Método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos	0,8722	0,3995		0,7561	0,1494
Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios	3,2744	0,3865		0,2903	0,1496
Modelo múltiple $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$R^2_{HU^{+*2}}$	R^2
Método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos	0,4309	–0,0083	0,6835	0,8561	0,4127
Método deMínimos Cuadrados Ordinarios	2,2700	–0,0861	0,6825	0,6602	0,4189

Fuente: Elaboración propia.

Como puede verse, en el caso del modelo simple el 75,61% de la inquietud doble cuadrática asociada al índice de oferta cultural y ocio queda explicada por el índice de nivel educativo mediante el método de MCER, mientras que si se Fonsidera el método de MCO dicha variable sólo explica el 29,03% de la inquietud doble cuadrática de Y. Así pues, el coeficiente basado en la inquietud doble cuadrática nos inclinaría a favor de MCER, mientras que el coeficiente de determinación R^2 apenas presenta diferencias entre ambos procedimientos, situándose en niveles cercanos al 15%.

Esta situación aparece ilustrada en el Gráfico 2, donde se aprecia bastante dispersión entre las observaciones, quedando la recta obtenida por MCER por debajo de la obtenida por MCO, como consecuencia del mayor peso asignado a las observaciones con valores reducidos por la medida de inquietud doble cuadrática.

GRÁFICO 2
Índice de oferta cultural y ocio. Estimaciones por Mínimos Cuadrados con Errores Relativos y por Mínimos Cuadrados Ordinarios.



Fuente: Elaboración propia.

Pasando a la estimación del modelo lineal múltiple, se aprecia que el 85,61% de la inquietud doble cuadrática asociada al índice de oferta cultural y ocio queda explicada por el índice de nivel educativo y el índice de renta mediante el modelo de regresión lineal obtenido por el método de MCER, mientras si se considera el modelo obtenido por el método de MCO las variables X_1 y X_2 sólo explican el 66,02% de la inquietud doble cuadrática de Y. Por otro lado se tiene que el 41,89% de la varianza de Y queda explicada por X_1 y X_2 mediante el modelo de regresión obtenido por el método de MCO y la explicación será del 41,27% si se considera el método de MCER.

6. CONCLUSIONES

El método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos consiste en minimizar la suma de los errores relativos al cuadrado. Este procedimiento tiene en cuenta no sólo la magnitud de los errores sino también los valores de la variable a los que van referidos, de modo que, a igual cuantía de errores absolutos, se penalizan más aquellos errores cometidos entre valores reducidos de la variable que los asociados a valores elevados.

Esta característica es el principal rasgo diferencial con respecto a los procedimientos de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) o Mínimas Desviaciones Absolutas (MDA), como consecuencia el procedimiento de Mínimos Cuadrados con

Errores Relativos (MCER) será menos sensible a la presencia de datos elevados en la variable y llevará asociada una función de pérdida más flexible.

Considerando un modelo lineal simple, hemos comprobado que el método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos conduce a estimadores de los parámetros que presentan algunas analogías con los estimadores mínimo cuadráticos y satisfacen las propiedades descriptivas habitualmente exigidas. Por lo que se refiere al análisis de la bondad, este procedimiento lleva asociado el uso de una medida definida como la unidad menos la proporción de la inquietud doble cuadrática de la variable dependiente que queda sin explicar a partir del modelo, que admite una interpretación similar al coeficiente de determinación.

El planteamiento descrito ha sido ampliado al caso del modelo lineal básico, planteando hipótesis sobre las perturbaciones relativas y derivando el vector de estimadores de mínimos cuadrados con errores relativos.

Los resultados de las aplicaciones empíricas del procedimiento de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos han mostrado considerables similitudes con el método mínimo cuadrático, tanto en lo que se refiere a los estimadores obtenidos como a las correspondientes medidas de bondad.

El enfoque considerado en este trabajo ha sido principalmente descriptivo; sería conveniente abordar el estudio inferencial de los estimadores de los parámetros obtenidos con el método de Mínimos Cuadrados con Errores Relativos, obteniendo sus valores esperados y las varianzas de los estimadores y analizando la distribución asintótica de dichos estimadores, que permitirá construir intervalos de confianza y realizar contrastes de significación para los parámetros del modelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARGONZÁLEZ, M. (2000): "Línea de regresión mínimo cuadrática basada en errores relativos", *Anales de Economía Aplicada*, Actas XIV, Reunión ASEPELT-España, Oviedo.

ALVARGONZÁLEZ, M. (2003): "Medidas doble cuadráticas de información. Algunas aplicaciones económicas", *Tesis Doctoral*, Universidad de Oviedo.

ALVARGONZÁLEZ, M.; LÓPEZ, A.J. and PÉREZ, R. (2004): "The Double Quadratic Uncertainty Measures and Their Economic Applications", *Soft Methodology and Random Information Systems*, Ed. Springer, Berlin, pp. 677-684.

AMEMIYA, T. (1985): *Advanced Econometrics*, Harvard University Press, pp. 70-80.

EISENHART, C. (1976): "Gauss, Friedrich". *Enciclopedia Internacional de las Ciencias Soci*ales, Ed. Aguilar, Madrid, nº 5, pp. 79-85.

Fundación La Caixa. Anuario Social de España (2004): http://www.lacaixa.es/

GIL, M. A.; PÉREZ, R. y GIL, P. (1989): "A Family of Measures of Uncertainty Involving Utilities: Definition, Properties, Applications and Statistical Inferences", *Metrika*, nº 36, pp. 129-147.

GIL, P. (1981): *Teoría matemática de la información*, Ed. ICE, Madrid.

GREENE, W.H. (1993): *Econometric Analysis*, Ed. Princeton, New Jersey.

INE: Contabilidad Regional de España, CNE, http://www.ine.es

JOHNSTON, J. (1984): *Métodos de Econometría*, Ed. Vicens Vives(1987), Madrid.

KVALSETH, T.O. (1985): "Cautionary Note about R^2", *The American Statistician*, vol. 39, nº 4, pp. 279-285.

LÓPEZ, A.J.; ALVARGONZÁLEZ, M. y PÉREZ, R. (2006): "Crecimiento y distribución de la renta. Nuevas extensiones del proceso de Kuznets", *Estudios de Economía Aplicada,* nº 24 (1), pp. 221-244.

PÉREZ, R. (1985): "Estimación de la incertidumbre. La incertidumbre útil y la inquietud en poblaciones finitas. Una aplicación a las medidas de desigualdad", *Tesis doctoral*, Universidad de Oviedo.

PINDYCK, R.S. and RUBINFELD, D.L. (1998): *Econometric Models and Economic Forecasts* Ed. McGraw-Hill, New York.

SCOTT, A. and WILD, C. (1991): "Transformations and R^2", *The American Statistician*, vol. 45, nº 2, pp. 127-129.

SEN, A. and SRIVASTAVA, M. (1990): *Regression analysis. Theory, methods, and applications*, Ed. Springer, Berlin.

STIGLER, S.M. (1981): "Gauss and the invention of least squares", *The Annals of Statistics*, nº 9, pp. 465-474.