ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 26-1 2008 PÁGS. 341-362

Valoración de opciones. Un enfoque diferente

DOMINGO ISRAEL CRUZ BÁEZ y JOSÉ MANUEL GONZÁLEZ RODRÍGUEZ
Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
Campus de Guajara, s/n. 38071. La Laguna. Tenerife
e-mail: dicruz@ull.es; jomagon@ull.es

RESUMEN

En este trabajo, proponemos un nuevo método de valoración de opciones. Para ilustrarlo, y desde un punto de vista distinto a los existentes en la literatura, analizamos el valor de las opciones europeas y asiáticas aritméticas sobre un activo que reparte dividendos. Nuestro método utiliza ecuaciones en derivadas parciales, transformadas integrales y el programa de cálculo simbólico Mathematica. Además, se presenta como una alternativa novedosa, ya que se obtiene una gran precisión, bajo coste computacional y resulta ser más sencillo que otros métodos.

Palabras clave: Valoración de opciones, opción europea, opción asiática, transformada de Laplace, transformada de Mellin, Mathematica.

Option Pricing. A Different Approach

ABSTRACT

In this work, we offer a new method to value options. To illustrate this, and from a point of view different, we analyze the value of the European and Arithmetic Asian options on a dividend-paying asset. Our method uses partial differential equations, integral transforms and the program Mathematica. Also, this is a novel alternative, since is obtained a great accuracy at a low computational cost and is simpler than others.

Keywords: Option pricing, European option, Asian option, Laplace transform, Mellin transform, Mathematica.

Clasificación JEL: G12.

Artículo aceptado para su publicación en marzo de 2008.
Artículo disponible en versión electrónica en la página www.revista-eea.net, ref. ə-26103.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las piezas fundamentales de un mercado financiero moderno son los contratos de opciones. Las opciones no son un producto de reciente innovación financiera, se concibieron de hecho, hace miles de años. Es conocido que los fenicios, los griegos y los romanos negociaban contratos con cláusulas de opción sobre las mercancías que transportaban en sus naves. Sin embargo, algunos historiadores de mercado atribuyen sus orígenes al famoso filósofo, matemático y astrónomo griego Thales, que obtuvo una importante ganancia invirtiendo en opciones sobre la cosecha de aceituna y el uso de los molinos de aceite. El primer mercado de opciones con cierta organización aparece en Holanda en el siglo XVII, cuando comenzaron a negociarse opciones sobre los bulbos de tulipán. En Inglaterra, a principios del siglo XVIII, comenzaron a negociarse opciones sobre las acciones de las principales compañías comerciales. En otoño de 1720 la fuerte caída de los precios de la "South Sea Company" motivada en parte a la especulación con opciones sobre acciones de esta compañía, produjo un escándalo de tal magnitud que provocó que el mercado de opciones fuese declarado ilegal. Esta prohibición estuvo vigente hasta inicio del siglo XX, aunque se siguieron haciendo operaciones sobre opciones de forma "clandestina".

En Estados Unidos, las opciones de compra de acciones se empezaron comerciando ya entrado el siglo XVIII en mercados no organizados, pero su crecimiento espectacular se produjo a partir del 26 de abril de 1973, cuando comienza a operar el CBOE (Chicago Borrad Options Exchange), el primer mercado organizado de derivados financieros que se crea en el mundo.

Un derivado es un producto financiero elaborado sobre la base de un activo. El propietario de una opción tiene el derecho (no la obligación) de compra o de venta de cierto activo en una fecha futura a un precio determinado. Uno de los tipos de opciones más sencillas son las que dan derecho a comprar un activo: se conocen como opciones de compra o "call". Es importante tener en cuenta que el propietario de una opción "call" puede escoger no ejercerla y en consecuencia, no obtener ningún beneficio por la opción. Así, pues, ejerciendo la opción, el propietario se beneficia de un movimiento favorable en el precio del activo y si no lo hace, el propietario no sufre una pérdida significativa. Por otro lado, el vendedor de la opción "call" sí está obligado a cumplir las condiciones del contrato en el caso de que el propietario ejerza la opción.

En 1973, la publicación del famoso trabajo de Black y Scholes [BlackScholes] revolucionó los mercados financieros del mundo. Considerando un sencillo modelo para el precio de un recurso financiero, pudieron obtener una fórmula analítica para el precio de una opción de compra europea sobre una acción. Este tipo de opción es un ejemplo de derivado financiero que le da el derecho al poseedor, pero no la obligación, para comprar una unidad de un recurso en un momento fijo (la fecha de expiración), a precio fijo K (el precio de ejercicio). Si denotamos por C y S los valores al vencimiento de la opción de compra, y de la acción, respectivamente, el poseedor de esa opción recibirá $C = \max(0, S-K)$. Black y Scholes asumieron que no había arbitraje en el mercado y obtuvieron un único precio para la opción, que permitiría a un banco tomar ese dinero y, usando una estrategia de la cobertura de riesgo, garantizar el pago de la opción.

A partir del trabajo germinal de Black-Scholes [BlackScholes] se han investigado diferentes métodos de valoración, que se intentan aplicar a opciones sobre activos subyacentes específicos.

Nuestro método ofrece un enfoque diferente a los ya existentes. Lo ilustraremos con dos tipos de opciones:

(a) Opciones europeas. Para valorarlas utilizaremos ecuaciones en derivadas parciales y la transformada de Mellin.
Recientemente en [Jodaretal] emplean la transformada de Mellin para valorar opciones europeas que no reparten dividendos. Sin embargo, la expresión explícita obtenida depende de la inversa de la transformación de Mellin, que como bien se cita en [Jodaretal, Remark, p. 32] no siempre se puede expresar con una fórmula cerrada y habría que acudir a estimaciones numéricas.
Con nuestro método si se puede obtener una fórmula cerrada diferente a la dada en [Jodaretal, (12) p. 31]:

$$C(S,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^{-(\alpha+i\tau)} f^*(\alpha+i\tau)\, e^{\widetilde{p}(\tau)(t-T)}\, d\tau \, .$$

Esta fórmula presenta problemas, dado que la condición final del problema de Cauchy que nos da el valor de la opción, $f(\alpha+i\tau)$, no tiene porque ser transformable por Mellin. Además nuestra fórmula es válida para opciones europeas que reparten dividendos y tiene aplicaciones en la práctica financiera (véase [CruzBaez1]).

(b) Opciones asiáticas aritméticas. En este caso resolveremos la ecuación en derivadas parciales que satisface el valor de la opción, utilizando cambios de variables, la transformación de Laplace y el programa Mathematica. Estas opciones han sido objeto de estudio por muchos autores y presentan importantes ventajas que no ofrecen otros derivados. Una de ellas es que al estar relacionadas con la media del subyacente permiten reducir los efectos de los movimientos del precio del activo cerca de la fecha de expiración; de esta forma se evitan las posibles manipulaciones en el precio [KemmaVorst]. Otra ventaja que debemos destacar es que como instrumento de cobertura, son más económicas que las opciones europeas [Vorst].
La dificultad de determinar la distribución de la media aritmética del subyacente, ha motivado que la resolución del problema de valoración de las opcio-

nes asiáticas aritméticas sea un área de gran interés para muchos investigadores. Suponiendo que el precio del activo sigue una distribución lognormal en tiempo continuo, la dificultad se plantea porque la suma de variables lognormales no es una lognormal y por lo tanto no se puede dar de forma explícita la distribución y tampoco aplicar el método de Black-Scholes [BlackScholes]. Utilizando el Cálculo Estocástico y en concreto los procesos de Bessel; Geman y Yor [GermanYor] obtienen una fórmula analítica para la transformación de Laplace de la opción asiática. Al comprobar que la inversa de esta transformada no se puede obtener de forma analítica, algunos autores intentaron una aproximación diferente al problema utilizando métodos numéricos. Podemos destacar entre otros a: Geman y Eydeland [EydelandGeman], Fu, Madan y Wang [Fuetal], Craddock, Heath y Platen [Craddocketal] y Shaw [Shaw]. El principal problema de estos trabajos es la lentitud computacional de los métodos para volatilidades del 10%.
Nótese que la demostración de Geman y Yor [GemanYor] resulta ser bastante artificiosa[1], sólo es válida para $\nu \geq 0$ y se necesitan técnicas de continuación analítica para extender el resultado a los casos no contemplados por Geman y Yor (véase [CarrSchroder2, Section 10]).

Con nuestro método, el resultado se obtiene con sólo la utilización de dos pasos y resta válida para todo valor de ν. Estos son:

- Realizar los cambios de variables correctos para obtener una nueva ecuación en derivadas parciales.
- Resolver por medio de la transformación de Laplace y Mathematica.

2. UNA INTRODUCCIÓN A TRANSFORMACIONES INTEGRALES

En esta sección damos una breve introducción a la transformación de Laplace y Mellin.

2.1. Transformación de Laplace

La transformada de Laplace recibe su nombre en honor de Pierre-Simon Laplace, que la utilizó en sus trabajos sobre la teoría de la probabilidad, aunque fue descubierta originalmente por Leonhard Euler.

[1] Entre otros utilizan: Cambios de variables, [GemanYor, (3.5) p. 359], [GemanYor, Proposition 2.3, p. 351], [GemanYor, Lemma 2.1 y Proposition 2.6, pp. 352-353], [GemanYor, Proposition 2.2 y (2.2), p. 351].

La transformación de Laplace de $g(y,\tau)$ viene definida por:

$$G(\alpha,s)=\mathrm{L}\{g(\alpha,\tau):\tau,s\}=\int_0^{\infty} g(\alpha,z)\,e^{-zs}\,dz\,.$$

La inversa de la transformada de Laplace viene dada por:

$$g(\alpha,\tau)=\mathrm{L}^{-1}\{G(\alpha,s):s,\tau\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(\alpha,s)\,e^{s\tau}\,ds\,, \qquad [2.1.1]$$

donde c es un número real, tal que el campo de integración está en la región de convergencia de $G(y,s)$ y $c>\mathrm{Re}(s_p)$, para cada singularidad s_p de $G(y,s)$.

Esta transformación integral tiene un gran número de propiedades útiles para el análisis de sistemas dinámicos. La propiedad más conocida es que la derivación y la integración se transforman en multiplicación y división, respectivamente. Esto permite resolver muchas ecuaciones diferenciales, en derivadas parciales o integrales de una forma mucho más sencilla.

La siguiente propiedad [Erdelyietal, (1954), 4.1 (8) p. 129] es un ejemplo:

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial g}{\partial \tau}:\tau,s\right\}=s\,G(\alpha,s)-g(\alpha,0)\,. \qquad [2.1.2]$$

Además, utilizaremos la función hipergeométrica confluyente 1F1, que es una solución de la ecuación diferencial:

$$x\,y''+(c-x)\,y'-a\,y=0\,.$$

Esta función es conocida como función de Kummer de primer orden.

En [Lebedev, p. 267, (9.11.2)] y [Lebedev, p. 271, (9.12.8)] podemos ver las siguientes propiedades:

$$1F1[\alpha,\gamma;z]=e^{z}\,1F1[\gamma-\alpha,\gamma;-z], \qquad [2.1.3]$$

$$\forall \alpha, \gamma, z \ ;$$

$$\left| 1F1[\alpha, \gamma; z] \right| \to \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z} z^{-(\gamma-\alpha)}, \left| \arg z \right| \le \frac{\pi}{2} - \delta \ , \qquad [2.1.4]$$

cuando $z \to \infty, \ \ \alpha, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$.

A efectos computacionales debemos comentar que la función hipergeométrica confluyente de primer orden es implementada en Mathematica como Hypergeometric1F1[*a,b,z*].

2.2. Transformación de Mellin

Esta transformación debe su nombre al finlandés Robert Hjalmar Mellin (1854-1933) y la transformación de Mellin de $C(S,t)$ viene definida por ([Sneddon, p. 273]):

$$\hat{C}(p,t) = M\left\{C(S,t) : S, p\right\} = \int_0^\infty S^{p-1} C(S,t) dS \quad (\operatorname{Re} p > 0), \qquad [2.2.1]$$

cuya inversa viene dada por:

$$C(S,t) = M^{-1}\left\{C(p,t) : p, S\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{C}(p,t) S^{-p} dp, \qquad [2.2.2]$$

Por otra parte, la convolución de Mellin se denota por *, siendo su definición ([Sneddon, p.276]):

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) \frac{1}{y} dy. \qquad [2.2.3]$$

Al igual que otras transformaciones integrales, la transformación de Mellin presenta algunas propiedades con respecto a la derivada [Erdelyietal, (11) p. 307] muy útiles:

$$M\left\{\left(S\frac{d}{dS}\right)^2 C(S,t);S,p\right\}=p^2\cdot M\left\{C(S,t);S,p\right\}, \qquad (2.2.4)$$

$$M\left\{\left(S\frac{d}{dS}\right)C(S,t);S,p\right\}=-p\cdot M\left\{C(S,t);S,p\right\}. \qquad 2.2.5)$$

3. VALORACIÓN DE OPCIONES

3.1. Opciones europeas

Black-Scholes-Merton ([BlackScholes], [Merton]) demostraron que, bajo ciertas suposiciones sobre el mercado, el valor de una opción call europea $C\equiv C(S,t)$ verifica el siguiente problema de Cauchy (véase también [Hull], [Wilmottetal], [Wilmott]):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}+(r-d)S\dfrac{\partial C}{\partial S}-rC=0, 0<S<\infty, 0\le t<T,\\ C(S,T)=f(S)=(S-K)^+,\\ C(0,t)=0,\\ C(S,t)=S\,e^{-d(T-t)},\ \text{cuando } S\to\infty,\end{cases} \qquad [3.1.1]$$

donde S es el precio del activo subyacente, K el precio de ejercicio, r es tipo de interés constante, d los dividendos del activo, T tiempo a vencimiento de la opción y σ la volatilidad.

Nos planteamos resolver [3.1.1] utilizando [2.2.4]- [2.2.5].

Para ello necesitamos realizar unas simples operaciones, de forma que la EDP [3.1.1] nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}C(S,t)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)^2C(S,t)+\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(S\frac{\partial}{\partial S}\right)C(S,t)-rC(S,t)=0. \qquad [3.1.2]$$

A continuación, aplicamos transformación de Mellin a la EDP [3.1.2] y utilizando [2.2.4]- [2.2.5] obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{C}(p,t)+\left(\frac{1}{2}\sigma^2 p^2-\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)p-r\right)\hat{C}(p,t)=0, \qquad [3.1.3]$$

con la condición final $\hat{C}(p,T)=\hat{f}(p)$.

La ecuación diferencial [3.1.3] es de primer orden y muy fácil de resolver:

$$\hat{C}(p,t)=\hat{f}(p)\cdot e^{\left(\frac{1}{2}\sigma^2 p^2-\left(r-d-\frac{1}{2}\sigma^2\right)p-r\right)(T-t)}=\hat{f}(p)\cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left((p+\alpha)^2-\alpha^2-\frac{2r}{\sigma^2}\right)}, \qquad [3.1.4]$$

donde $\alpha=\frac{d}{\sigma^2}+\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}$.

Aplicando la inversa de Mellin a [3.1.4] obtenemos:

$$C(S,t)=f(S)*M^{-1}\left\{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left((p+\alpha)^2-\alpha^2-\frac{2r}{\sigma^2}\right)};p,S\right\}=$$

$$=e^{\beta(T-t)}f(S)*M^{-1}\left\{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)(p+\alpha)^2};p,S\right\}, \qquad [3.1.5]$$

donde $\beta=-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\alpha^2+\frac{2r}{\sigma^2}\right)$.

Por otra parte, utilizando [Erdelyietal, 7.2 (1), p.344] y haciendo el cambio de variable $p+\alpha = x$ tenemos:

$$M^{-1}\left\{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)(p+\alpha)^2};p,S\right\} = S^{\alpha}M^{-1}\left\{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)(p+\alpha)^2};x,S\right\} =$$
$$= S^{\alpha}\frac{1}{2}\pi^{-1/2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)^{-1}(\ln S)^2} \qquad [3.1.6]$$

Luego de [3.1.5], [3.1.6] y de la expresión de la convolución de Mellin [2.2.3], obtenemos:

$$C(S,t) = f(S) * M^{-1}\left\{e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left((p+\alpha)^2-\alpha^2-\frac{2r}{\sigma^2}\right)};p,S\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{\beta(T-t)}\int_0^{\infty}\left(S/y\right)^{\alpha} e^{-\frac{\left(\ln\frac{S}{y}\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} f(y)\frac{1}{y}dy$$

Por último, si imponemos la condición final $f(S) = (S-K)^+$, el valor de la opción $C(S,t)$ viene dado por:

$$C(S,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{\beta(T-t)}\int_K^{\infty}\left(S/y\right)^{\alpha} e^{-\frac{\left(\ln\frac{S}{y}\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}} (y-K)\frac{1}{y}dy\,,$$

Donde $\alpha = \frac{d}{\sigma^2}+\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}$ y $\beta = -\frac{1}{2}\sigma^2\left(\alpha^2+\frac{2r}{\sigma^2}\right)$

Por tanto, hemos obtenido una expresión integral para la valoración de las opciones de compra europeas. Además, esta expresión tiene la misma utilidad práctica que la clásica de Black y Scholes (véase [CruzBaez1]).

3.2. Opciones asiáticas

Es conocido que el valor de una opción de compra asiática aritmética $C(S,I,t)$ satisface (véase [Wilmottetal, pp. 428-429] ó [Zhang, pp. 61-62]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + S\dfrac{\partial C}{\partial I} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-q)S\dfrac{\partial C}{\partial S} - rC = 0,\ S > 0, T_0 \le t \le T, \\ C(S,I,T) = \max\left[\dfrac{I}{T-T_0} - K, 0\right], \end{cases} \qquad [3.2.1]$$

con dos condiciones de frontera y donde S es el valor del subyacente, r es el tipo de interés, q el dividendo que se reparte de forma continua, σ es la volatilidad del activo, K el precio de ejercicio, T la fecha de expiración, e I es una nueva variable, $I = \int_{T_0}^{t} S(\tau)d\tau$.

Recientemente en [Zhang] se emplea un método de valoración que utiliza también ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, los cambios de variables realizados ofrecen serias dudas acerca de la obtención de la ecuación correcta para nuestro análisis.

En un trabajo reciente hemos resuelto esta problemática [CruzBaez2]. En el citado trabajo se realizan los siguientes cambios de variables, que sí permiten obtener una expresión adecuada de la ecuación en derivadas parciales:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{\left((T-T_0)K - I\right)}{S} e^{-(r-q)\tau_1} - \dfrac{1}{r-q}\left(1 - e^{-(r-q)\tau_1}\right) \\ \tau_1 = T - t \\ C(S,I,t) = \dfrac{S}{T-T_0} e^{-r\tau} f(\xi, \tau_1) \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\xi\, e^{(r-q)\tau_1}+\dfrac{1}{r-q}\left(e^{(r-q)\tau_1}-1\right) \\ f(\xi,\tau_1)=g(y,\tau_1) \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} g(y,\tau_1)=\dfrac{4}{\sigma^2}C^{(\nu)}(\alpha,\tau) \\ \nu=\dfrac{2(r-q)}{\sigma^2}-1,\ \tau=\dfrac{\sigma^2}{4}\tau_1,\ \alpha=\dfrac{\sigma^2}{4}y \end{array}\right\}.$$

Si realizamos estos cambios de variables, la ecuación [3.2.1] queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial C^{(\nu)}}{\partial\tau}=2\alpha^2\dfrac{\partial C^{(\nu)}}{\partial\alpha^2}-\left(1+2(\nu+1)\alpha\right)\dfrac{\partial C^{(\nu)}}{\partial\alpha}+2(\nu+1)C^{(\nu)}, \\ C^{(\nu)}(\alpha,0)=0. \end{array} \qquad [3.2.2]$$

Con una condición de frontera libre y la otra:

$$C^{(\nu)}(0,\tau)=\frac{e^{2(\nu+1)\tau}-1}{2(\nu+1)}.$$

Nótese que en el trabajo de Geman y Yor [GemanYor] se obtiene una fórmula sencilla para el caso $\alpha\le 0$:

$$C(S,I,t)=S\left(\frac{1-e^{-r\tau}}{r\left(T-T_0\right)}\right)-e^{-\tau}\left(K-\frac{I}{T-T_0}\right).$$

El caso problemático es $\alpha\in\left(0,\infty\right)$, y para su resolución aplicamos a la ecuación [3.2.2] la transformación de Laplace, obteniendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} 2\alpha^2 \dfrac{\partial^2 \hat{C}^{(\nu)}}{\partial \alpha^2} - \left(1 + 2(\nu+1)\alpha\right) \dfrac{\partial \hat{C}^{(\nu)}}{\partial \alpha} + (2(\nu+1) - s)\hat{C}^{(\nu)} = 0, \\ \hat{C}^{(\nu)}(\alpha, 0) = 0, \\ \hat{C}^{(\nu)}(0, s) = \dfrac{1}{s\left(s - 2(\nu+1)\right)}. \end{cases} \qquad [3.2.3]$$

Utilizando el Mathematica la podemos resolver, e imponiendo las condiciones y [2.1.3]- [2.1.4] tenemos su solución[2]:

$$C[\alpha, s] = \frac{1}{(s\,(s - 2\,(\nu + 1)))} \frac{\Gamma\left(\frac{-\sqrt{2\,s+\nu^2}}{2} + \frac{\nu}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(\sqrt{2\,s + \nu^2} + 1\right)} (2\,\alpha)^{\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2\,s+\nu^2}+\nu+2\right)}$$
$$\text{Hypergeometric1F1}\left[-1 - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2\,s + \nu^2},\ 1 + \sqrt{2\,s + \nu^2},\ -\frac{1}{2\,\alpha}\right].$$

Obsérvese que coincide con la solución dada por Geman y Yor [GermanYor], pero nuestro método no requiere ningún resultado previo sobre procesos de Bessel.

Luego aplicando la inversa a la solución y deshaciendo los cambios de variables, tenemos:

$$C(S, I, t) = \frac{4S}{\sigma^2 \left(T - T_0\right)} e^{-r(T-t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s\tau} \hat{C}^{(\nu)}(\alpha, s)\, ds, \qquad [3.2.4]$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{4}(T - t),\ \alpha = \frac{\sigma^2 \left((T - T_0)K - I\right)}{4S}.$$

[2] En la sección Anexo. Mathematica, se pueden ver las instrucciones del programa Mathematica utilizadas para resolver la ecuación diferencial

Como puede verse en (3.2.4), para la valoración de las opciones asiáticas necesitamos conocer la inversa de la transformada de Laplace de la función $C^{(\nu)}$; pero ésta no se puede obtener de forma analítica.

Por ello, inicialmente Geman-Eydeland [EydelandGeman] estimaron la inversa por medio de la transformada de Fourier rápida (FFT), en vez de utilizar la propia transformada de Laplace, que como veremos resulta más conveniente. Posteriormente, Shaw [Shaw] realiza un programa en Mathematica para calcular los citados valores. El programa dado en [Shaw] plantea problemas de convergencia, sobre todo para volatilidades bajas (véase [Fuetal]).

Nuestro objetivo a continuación, y a diferencia del resultado teórico establecido en [CruzBaez2], es proponer una implementación3 que evite estos problemas; destacando que igualamos y/o mejoramos los diferentes métodos de valoración de opciones asiáticas aritméticas4, siendo esto un aporte novedoso al problema económico en estudio.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección ilustramos como con el apoyo del programa Mathematica hemos encontrado mejores resultados que los dados en [Shaw], tanto desde la perspectiva de mejora de la rapidez, como en la precisión computacional. De igual manera, tales ventajas se muestran al comparar nuestros resultados con los existentes en la literatura financiera (Monte Carlo [Dufresne], Vecer [Vecer], Shaw [Shaw] y Linetsky [Linestsky]).

Hemos realizado la experimentación con un equipo de trabajo Pentium 4 Centrino 1,8 GHz y con dos ensayos diferenciados:

- En primer lugar, contrastamos con una implementación conocida que se ayuda igualmente del programa Mathematica; estudiando la precisión y velocidad del programa.
- En el segundo contraste observaremos la precisión de nuestro programa con respecto a los métodos más utilizados.

4.1. Contraste con otra implementación en Mathematica

Los resultados que obtenemos con nuestra implementación se contrastan en primer término con los de Shaw en [Shaw], en su versión seminal. Admitiremos que el valor exacto coincide con el establecido por Zhang en [Zhang], que cuenta con 6 decimales de precisión.

[3] Véase Anexo. Mathematica.
[4] Los métodos más utilizados y con mayor exactitud son: Monte Carlo, Vecer, Shaw y Linetsky.

Para ello, consideramos el caso $S = 100$, $t = 0$, $q = 0$, $t_0 = 0$ y $T = 1$, habiéndose truncado la integral compleja en $c = 5000$ para $\sigma = 0.30$ y $c = 10000$ para $\sigma = 0.20$.

Entonces, los valores de las opciones de compra asiáticas aritméticas para estos casos son:

TABLA 1

K	σ	r	Exacta (Zhang)	Cruz	PD	Shaw 1998	PD
90	0.20	0.05	12.5959916	12.5959911	6	12.594983	2
100	0.20	0.05	5.7630881	5.7630879	6	5.76207997	2
110	0.20	0.05	1.9898945	1.9898942	6	1.9888863	2
90	0.20	0.09	13.8314996	13.8314991	6	13.8309391	2
100	0.20	0.09	6.7773481	6.7773479	5	6.77678803	2
110	0.20	0.09	2.5462209	2.5462203	6	2.54566039	2
90	0.20	0.15	15.6417575	15.6417573	6	15.6414213	3
100	0.20	0.15	8.4088330	8.4088329	5	8.4084969	3
110	0.20	0.15	3.5556100	3.55561002	7	3.55527405	3
90	0.30	0.05	13.9538233	13.953824	5	13.9538195	4
100	0.30	0.05	7.9456288	7.9456286	6	7.9456241	5
110	0.30	0.05	4.0717942	4.0717946	6	4.0717942	6
90	0.30	0.09	14.9839595	14.9839583	5	14.9839558	5
100	0.30	0.09	8.8287588	8.8287582	6	8.8287557	5
110	0.30	0.09	4.6967089	4.6967091	5	4.6967066	5
90	0.30	0.15	16.5129113	16.5129101	5	16.5129086	4
100	0.30	0.15	10.2098305	10.209829	4	10.209828	4
110	0.30	0.15	5.7301225	5.7301224	6	5.7301209	5

Entre los comentarios que ha recibido esta implementación de Shaw; Fu et al. [Fu] observan dificultades de valoración cuando la volatilidad es baja. Tales adversidades se ciñen al uso de un camino de integración exclusivamente real y a la elección de los parámetros. Por el contrario, nuestra experimentación carece de ese problema, ya que hemos elegido un camino de integración complejo que satisface la propiedad $\mathrm{Re}\,\lambda > 2\nu + 2$, obviando de esta manera las singularidades de la integral; problema esencial de las dificultades soslayadas en forma escasamente rigurosa por Shaw. Además hemos utilizado la función NIntegrate con cuidadoso rigor y se ha establecido un tratamiento diferente a la función U (véase Anexo. Mathematica).

Persiguiendo el fin de obviar los problemas mencionados, Shaw utiliza un cambio de variable en [Shaw2], que evita también las singularidades. Sin embargo, su programa mantiene el inconveniente de la lentitud cuando las volatilidades son del 10%.

Para ilustrar tal contingencia ofrecemos a continuación un nuevo ejemplo:

Si consideramos el caso $S = 100$, $t = 0$, $r = 0.09$, $q = 0$, $t_0 = 0$ y $T = 1$, habiéndose truncado la integral compleja en 45.000, los valores de la opción de compra aritmética vienen dados por:

TABLA 2

K	σ	Exacta (Zhang)	Cruz	Tiempo (seg.)	Shaw 2002	Tiempo (seg.)
95	0.10	8.9118509	8.91210417	78.391	8.91211580	485.875
100	0.10	4.9151167	4.91508706	75.235	4.91507332	310.718
105	0.10	2.0700634	2.07000420	73.125	2.07001364	295.859

Como se puede observar la velocidad de cálculo de nuestro programa, con cambio de variable, mejora de forma considerable al dado por Shaw.

4.2. Contraste general

A continuación vamos a contrastar lo experimentado con otros métodos bien conocidos.

Los siguientes casos, clásicos en la literatura financiera, serán los utilizados a modo de ejemplificación:

TABLA 3

Caso	S	K	R	q	σ	T	t	T0
1	1.9	2	0.0500	0	0.50	1	0	0
2	2	2	0.0500	0	0.50	1	0	0
3	2.1	2	0.0500	0	0.50	1	0	0
4	2	2	0.0500	0	0.50	2	0	0
5	2	2	0.1800	0	0.30	1	0	0
6	2	2	0.0125	0	0.25	2	0	0
7	2	2	0.0200	0	0.10	1	0	0

En primer término comparamos con el conocido método de Monte Carlo con 10.000 simulaciones (véase, por ejemplo, [Dufresne]) y con cotas superiores (TUB) e inferiores (TLB) de Thompson [Thompson].

TABLA 4

Caso	CB	MC	TLB	TUB
1	0.19317379021353180	0.19330 (0.00084)	0.193060	0.193799
2	0.24641569050723056	0.24650 (0.00095)	0.246298	0.247054
3	0.30622036523262390	0.30640 (0.00106)	0.306094	0.306904
4	0.35009521895946244	0.35030 (0.00146)	0.349779	0.352556
5	0.21838754658912740	0.21850 (0.00059)	0.218366	0.218473
6	0.17226874101946200	0.17250 (0.00063)	0.172226	0.172451
7	0.05598604250811071	0.05602 (0.00017)	0.055985	0.055989

Como cabe extrapolar del cuadro anterior el método de Monte Carlo, no es muy preciso para valorar opciones asiáticas aritméticas.

Por ello, comparemos a continuación nuestros ensayos con el programa de Shaw:

TABLA 5

Caso	CB	SH
1	0.193173790213531800	0.193174
2	0.246415690507230560	0.246416
3	0.306220365232623900	0.306220
4	0.350095218959462440	0.350095
5	0.218387546589127400	0.218388
6	0.172268741019462000	0.172269
7	0.055986041545485005	0.055986

Como ya hemos comentado nuestro método coincide con los 6 decimales de precisión de Shaw en su segunda versión.

Con todo, la ratio de convergencia sigue siendo no óptima. Por ello observemos otro método de ecuaciones en derivadas parciales, el método de Vecer:

Inicialmente tomamos los puntos de corte en $x \in [-1.0, 1.5]$

TABLA 6

Caso	CB	Precisión Decimal	VEC Puntos Corte $x \in [-1.0, 1.5]$	Precisión Decimal
1	0.193174	6	0.1922640	2
2	0.246416	6	0.2458580	2
3	0.306220	6	0.3058840	2
4	0.350095	6	0.3499900	1
5	0.218388	6	0.2181220	3
6	0.172269	6	0.1722670	5
7	0.055986	6	0.0562473	2

Vemos como en este caso el método de Vecer no es muy preciso. Por lo que aumentamos los puntos de corte hasta $x \in [-3.0, 3.5]$. En este caso obtenemos:

TABLA 7

Case	CB	Precisión Decimal	VEC Puntos Corte $x \in [-3.0, 3.5]$	Precisión Decimal
1	0.193174	6	0.1931717	5
2	0.246416	6	0.2464190	5
3	0.306220	6	0.3062350	4
4	0.350095	6	0.3500900	5
5	0.218388	6	0.2182640	3
6	0.172269	6	0.1719840	2
7	0.055986	6	0.0573879	2

Incrementando nuevamente los puntos de corte a $x \in [-10.0, 10.5]$ los resultados son:

TABLA 8

Caso	CB	Precisión Decimal	VEC Puntos Corte $x \in [-10.0, 10.5]$	Precisión Decimal
1	0.193174	6	0.1932260	3
2	0.246416	6	0.2464790	4
3	0.306220	6	0.3062870	4
4	0.350095	6	0.3500890	4
5	0.218388	6	0.2183480	4
6	0.172269	6	0.1721980	3
7	0.055986	6	0.0534705	2

En definitiva el método de Vecer es menos preciso que el nuestro, en todos los casos analizados.

Nótese que la precisión de 6 decimales de la implementación de Vecer depende de los puntos de corte en la frontera de la ecuación en derivadas parciales y además en nuestro caso, aunque aumentemos el tamaño del intervalo de los puntos de corte no se obtienen mejoras significativas.

Finalmente, vamos a comparar con el método de Linetsky [Linetsky], que alcanza la mayor precisión (9 decimales):

TABLA 9

Case	CB	LI
1	0.193173790213531800	0.1931737900
2	0.246415690507230560	0.2464156905
3	0.306220365232623900	0.3062203650
4	0.350095218959462440	0.3500952190
5	0.218387546589127400	0.2183875466
6	0.172268741019462000	0.1722687410
7	0.055986041545485005	0.0559860415

Podemos ver que si redondeamos a 9 decimales, nuestros resultados coinciden con los de Linetsky; obteniendo, por tanto, los mejores ajustes en la modelización numérica.

Por último, debemos destacar que en todos los casos igualamos y/o mejoramos los diferentes métodos para afrontar el problema económico.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, hemos propuesto un nuevo método de valoración. Lo hemos ilustrado con dos tipos de opciones: europeas y asiáticas. Con respecto a las opciones europeas obtenemos una nueva solución explícita que, a diferencia del método dado en [Jodaretal], tiene aplicaciones en la práctica financiera. En el caso de las opciones asiáticas, la obtención de la solución resulta ser más sencilla que con procesos de Bessel [GemanYor], y además a la hora de implementar las soluciones con Mathematica se obtiene una gran precisión y bajo coste computacional. En definitiva, nuestro método se presenta como una alternativa novedosa a los ya existentes.

ANEXO. MATHEMATICA

En este Anexo exponemos las instrucciones y la implementación que hemos realizado con el programa de cálculo simbólico Mathematica.

(a) Instrucción utilizada para resolver la ecuación diferencial (3.2.3).

```
DSolve[(2 (ν + 1) - s) C[α, s] + 2 α^2 D[C[α, s], {α, 2}] - (1 + 2 (ν + 1) α) D[C[α, s], α] == 0,
   C[α, s], {α, s}] // FullSimplify // ExpandAll
```

(b) Programa para calcular el valor de una call asiática.
Primero definimos los parámetros y las funciones que comparecen en la fórmula:

```
γ[T_, t_, σ_] = σ^2 (T - t) / 4;
ν[r_, q_, σ_] = 2 (r - q) / σ^2 - 1;
α[S_, K_, σ_, T_, t_, t0_] = σ^2 / (4S) (K (T - t0) - (t - t0) S);
μ[ν_, λ_] = √(ν^2 + 2λ);
U[λ_, μ_, ν_, α_] :=
   1/Gamma[1+μ] (2^(1/2 (2-μ+ν)) α^(1/2 (2-μ+ν)) Gamma[1/2 (4+μ+ν)] Hypergeometric1F1[1/2 (-2+μ-ν), 1+μ, -1/(2α)]) /
     (λ (-2 + λ - 2 ν)) ;
```

Una vez hecho esto, podemos obtener el valor de la call asiática:

```
AriAsianPriceCall[S_, K_, r_, q_, σ_, T_, t_, t0_, ζ_] :=
 Module[{τ = γ[T, t, σ], n = ν[r, q, σ], a = α[S, K, σ, T, t, t0]},
  Re[ 4 S / (σ^2 (T - t0)) e^(-r (T-t)) 1/(2 Pi I) NIntegrate[Exp[λ τ] U[λ, μ[n, λ], n, a],
    {λ, 100 - ζ I, 100 - 2 I, 100 + 2 I, 100 + ζ I}]]]
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973): “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy, nº 81, pp. 637-654.

CARR, P. and SCHRODER, M. (2001): *On the valuation of arithmetic-average Asian options:the Geman-Yor Laplace transform revisited*, Mannheim and New Yor.

CARR, P. and SCHRODER, M. (2004): *Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options*, Theory Probab. Appl. vol. 48, nº. 3, pp. 400-425.

CRADDOCK, M., HEATH D. and PLATEN, E. (2000): “Numerical inversion of Laplace transforms: A survey of techniques with applications to derivatives pricing”, *J. Computational Finance,* nº 4(1), pp. 57-81.

CRUZ-BÁEZ, D.I. and GONZÁLEZ-RODRÍGUEZ, J.M. (2006): “A different approach to pricing European options”, *WSEAS Transactions on Mathematics*. Issue, nº1, vol 5, pp. 161-167.

CRUZ-BÁEZ, D.I. and GONZÁLEZ-RODRÍGUEZ, J.M. (2008): “A different approach for pricing Asian options”, *Applied Mathematics Letters*, nº 21/3, pp. 303-306.

DUFRESNE, D. (2000): “Laguerre series for Asian and other options, Math”, *Finance*, nº10, pp. 407-428.

ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. and TRICOMI, F. G. (1954): *Tables of Integral Transforms*, vol. I, McGraw-Hill, New Yor.

EYDELAND, A. and GEMAN, H. (1995): *Domino effect, Risk*, nº 8, pp. 65-67.

FU, M.C., MADAN, D.B. y WANG, T. (1998): “Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace inversion methods”, J. Comp., fin, nº 2, pp. 49-74.

GEMAN, H. and YOR, M. (1993): “Bessel processes, Asian options, and perpetuities”, *Math. Finance*, nº 3, pp. 349-375.

HULL, J. C. (2000): *Options, Futures and Other Derivatives*, 4th Edition, Prentice Hall.

JÓDAR, L., SEVILLA-PERIS, P., CORTÉS, J.C. and SALA, R. (2005): “A new direct method for solving the Black-Scholes equation”, *Applied Mathematics Letters*, nº 18, pp. 29-32.

KEMNA, A. and VORST, A. (1990): “A pricing method for options based on average asset Values”, *Journal of Banking and Finance*, nº 14, pp. 113-129.

LEBEDEV, N. N. (1972): *Special Functions and their Applications*, Dover, New Yor.

LINETSKY, V. (2004): “Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options”, *Operations Research,* vol. 52, nº 6, pp. 856-867.

MERTON, R. C. (1973): *Theory of rational option pricing, Bell J. Econom,* Management Sci, nº 4, pp. 141-183.

SHAW, W. (1998): *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*, Cambridge University Press.

SHAW, W. (2002): “Pricing Asian options by contour integration, including asymptotic methods for low volatility”, *Working paper*, Nomura, U.K., London.
SNEDDON, I. N. (1951): *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New Yor.
THOMPSON, G. W. P. (2000): “Fast narrow bounds on the value of Asian options”, Working Paper, Centre for Financial Research, Judge Institute of Management Science, University of Cambridge.
VECER, J. (2001): *A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options*, J. Computational Finance, nº 4(4), pp. 105-113.
VORST, T. (1996): *Averaging options*, in I. Nelken, editor, The Handbook of Exotic Options, Irwin, Homewood, IL, pp. 175-199.
WILMOTT, P. PAUL. (2000): *Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons.
WILMOTT, P., DEWYNNE, J. y HOWISON, S. (2000): *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press.
ZHANG, J. E. (2001): “A semi-analytical method for pricing and hedging continuously sampled arithmetic average rate options”, *Journal of Computational Finance*, nº 5, pp. 59-79.