

## **Obtención de la tasa social de descuento a partir de la tasa de fallo de una distribución estadística: Aplicación empírica <sup>1</sup>**

CRUZ RAMBAUD, SALVADOR Y MUÑOZ TORRECILLAS, MARÍA JOSÉ

*Departamento de Dirección y Gestión de Empresas. Universidad de Almería*

*La Cañada de San Urbano s/n, 04071 (Almería)*

Telf. +34 950 015 184- +34 950 015 817 E-mail: [scruz@ual.es](mailto:scruz@ual.es) - [mjmtorre@ual.es](mailto:mjmtorre@ual.es)

### RESUMEN

El objetivo de este artículo es la obtención de una tasa social de descuento apropiada para valorar proyectos de inversión a largo o muy largo plazo, como suelen ser muchos proyectos gubernamentales y/o medioambientales. La aproximación al problema se llevará a cabo a través de la tasa de fallo de los bienes en los que se va a invertir. En concreto, se ha elegido la inversión en bosques y el incendio forestal como fallo del sistema, considerando la función de distribución Weibull como la más adecuada para modelizar la evolución de la tasa de fallo del sistema. El enfoque de la tasa de fallo responde a la consideración del riesgo asociado a la espera de la recompensa (o vencimiento de los flujos netos correspondientes), riesgo que puede ser considerado como fallo del sistema, mortalidad de la población a la que va dirigida la inversión e incluso disminución de la utilidad marginal del ingreso.

*Palabras clave:* Descuento social, tasa de fallo, inversiones a largo plazo.

## **Obtaining the social discount rate from the hazard rate of a statistical distribution: An empirical application**

### ABSTRACT

The purpose of this paper is to obtain an appropriate social discount rate to appraise long-term or very long-term investment projects, as environmental or government projects. The problem will be approached from the hazard rate of goods in which we are going to invest. Specifically, we have chosen forestation investment and forest fire as system fail, using the Weibull distribution in order to modelize the evolution of the system hazard rate. The hazard rate approach considers the risk that waiting for a reward (or the maturity of cash-flows) implies. This risk can be considered as the fail of the system, the mortality of the population the project is intended for, or even the decrease of the marginal utility of income.

*Keywords:* Social discount, hazard rate, long-term investments.

*Clasificación JEL:* H43, Q23, D81.

<sup>1</sup>Agradecemos los comentarios y sugerencias de dos evaluadores anónimos.

Artículo recibido en Mayo de 2005 y aceptado para su publicación en Abril de 2006.

Artículo disponible en versión electrónica en la página [www.revista-eea.net](http://www.revista-eea.net), ref.: e-25101.

## 1. INTRODUCCIÓN

La investigación objeto de este artículo se centra en el problema del descuento en la valoración de proyectos a largo o muy largo plazo, concretamente en la elección de la tasa social de descuento<sup>1</sup> que pueda ser aplicable a cualquier proceso de valoración donde intervengan rentas generadas en un futuro distante. Éste es uno de los problemas más importantes en la valoración de proyectos públicos a largo plazo, ya que el valor de la tasa de descuento va a influir en la decisión final de inversión, suponiendo la aceptación o rechazo de inversiones que extenderán sus efectos positivos y negativos no sólo entre las generaciones presentes, sino también en las futuras, dado el horizonte temporal de valoración. Cuando hablamos de proyectos de valoración a muy largo plazo, nos referimos, especialmente, a proyectos medioambientales o a proyectos gubernamentales en general, en los que se realiza un gran desembolso en el momento inicial y, sin embargo, sus beneficios se distribuyen en el tiempo durante un largo período. Es el caso de inversiones en construcción de carreteras, en repoblación forestal o en conservación de un parque natural, por citar algunos ejemplos.

Tradicionalmente se ha utilizado, en la valoración de proyectos, el método del análisis coste-beneficio (ACB), realizándose las valoraciones normalmente por medio del valor actual neto (VAN) y utilizando, como ley de valoración, el descuento compuesto a un tipo de interés constante y, como base para el cálculo del tipo de descuento, los tipos de interés del mercado o los tipos de retorno de la inversión.

Los análisis coste-beneficio que implican estudios financieros a largo plazo han sido criticados habitualmente por conceder escasa importancia a los efectos futuros de las políticas contempladas y, en consecuencia, por no otorgar la relevancia requerida a los efectos sobre generaciones futuras, produciéndose una infravaloración de los sucesos futuros debido a la reducción geométrica de la función  $(1+i)^{-n}$ . A pesar de esto, el análisis coste-beneficio es actualmente la principal herramienta para la evaluación económica de programas públicos en la administración de recursos naturales, tales como proyectos para el control de inundaciones, irrigación, fuerza hidroeléctrica, mejora de puertos y proyectos alternativos de suministro de energía (Field: 1995). Esta técnica ha sido ampliamente utilizada desde su aparición en Estados Unidos en los años 30. Así, por ejemplo, en el Reino Unido la aplicación del ACB es obligatoria para los proyectos de inversión en las carreteras principales (Barrios y Martínez: 1997). Del mismo modo, la normativa de la Unión Europea<sup>2</sup> obliga de

---

1 Price (1988) define el descuento social como el tipo de descuento usado por la sociedad para dar un peso relativo (ponderación) al consumo social o al ingreso en distintos momentos del tiempo.

2 Comisión Europea (1997): "Guide to cost benefit analysis of major projects" y (2001): "Guide to cost benefit analysis of investment projects".

forma explícita a realizar el análisis de los costes y beneficios socioeconómicos de los grandes proyectos estableciendo la valoración en descuento compuesto como modelo de referencia.

Su superioridad sobre otras metodologías se debe tanto a su facilidad de tratamiento, permitiendo establecer toda la valoración con un único parámetro –el tipo de interés–, como al elevado estatus normativo que ostenta. Ahora bien, la utilización de esta ley financiera supone importantes restricciones en las preferencias financieras en plazos muy largos; por ejemplo, implica que la importancia del consumo o de riesgos futuros disminuye geoméricamente. Estas restricciones conducen a menudo a una formulación inapropiada de las preferencias que es relevante para la evaluación de las políticas públicas. En particular, los análisis relativos a los recursos naturales y a la calidad del entorno ambiental pretenden otorgar una mayor importancia a los flujos futuros que los calculados en descuento compuesto (Lafuente y Sánchez: 1997).

La normativa de la Unión Europea señala el descuento compuesto como modelo de referencia para la realización del ACB de grandes proyectos. En concreto, exige una tasa interna de rendimiento (TIR) no inferior al 3% y un VAN positivo. Se propone como tipo estándar de valoración un ratio social de descuento europeo del 5% para proyectos de la Unión Europea cofinanciados, si bien en casos específicos puede justificarse un valor distinto. No obstante, los gobiernos de diversos estados de la UE establecen distintos valores para el ratio social de descuento. Así, el Libro Verde del Reino Unido<sup>3</sup> establecía un ratio social de descuento del 6%, aunque la última actualización de este libro (publicada en el año 2003) recomienda un ratio social de descuento del 3,5%, basado en el cálculo del ratio de preferencia social por el tiempo y establece, además, una serie decreciente de ratios para proyectos con impactos a muy largo plazo (más de treinta años) y las circunstancias en las que están permitidas excepciones a estos ratios recomendados. En Italia, según las nuevas directrices para estudios de viabilidad<sup>4</sup>, este ratio social de descuento se fija en un 5%. En España se establecen distintos valores del ratio de descuento social dependiendo del sector implicado: 6% en términos reales para el sector del transporte<sup>5</sup> y 4% para proyectos de recursos hídricos. En Francia, el ratio de descuento fijado por el “Commissariat Général du Plan” es igual al 8%<sup>6</sup> en términos reales, si bien este ratio no ha sido actualizado desde 1984. No obstante, a la hora de realizar comparaciones entre paí-

---

3 Her Majesty Treasury (1997 y 2003): “Green Book, Appraisal and Evaluation in Central Government”.

4 Conferenza dei Presidenti delle Regioni e delle Province Autonome (2001): “Studi di fattibilità delle opere pubbliche. Guida per la certificazione da parte dei nuclei regionali di valutazione e verifica degli investimenti pubblici”.

5 Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones (1991): “Manual de evaluación de inversiones en ferrocarriles de vía ancha”. Anexo I. Ministerio de Fomento (1997): “Estudio informativo del cuarto cinturón de Barcelona tramo Abrera-Terrasa”.

6 Quinet (2000): “Evaluation methodologies of transportation projects in France”.

ses, hay que tener en cuenta que los ratios de estos dos últimos países son los menos actuales de todos, ya que se establecieron en 1991 y 1984, respectivamente. En este sentido, el más actualizado es el propuesto por el Reino Unido en el Libro Verde de 2003 que es una actualización del que se publicó en 1997. El mismo gobierno justifica esta revisión por los grandes cambios habidos en las condiciones macroeconómicas, incluidos los bajos tipos de interés, y por la necesidad de una mayor orientación al largo plazo en las valoraciones de proyectos gubernamentales.

En Estados Unidos, la Oficina de Administración y Presupuesto propone diferentes ratios de descuento<sup>7</sup>. En particular, suponiendo que las inversiones públicas (definidas como aquellos proyectos que tienen impacto en el bienestar social) desplazan consumo privado, se fija un tipo de descuento del 7% en términos reales. Las inversiones internas del gobierno (aquellos proyectos que tienen impacto solamente en la deuda del gobierno) deben ser descontadas usando los tipos de interés de la Deuda del Tesoro Público. Para el caso de las inversiones públicas se propone, además, un análisis de sensibilidad utilizando otros valores para el tipo de descuento. Normalmente se aplica un ratio del 3% (valor estimado usando tipos medios de interés de la Deuda Pública a largo plazo) para reflejar la preferencia social por el tiempo. Vemos, pues, que existen diferentes prácticas en cuanto al tipo social de descuento que utilizan los gobiernos a la hora de valorar las inversiones públicas.

Una vez presentada la situación actual en cuanto a la valoración de proyectos gubernamentales, planteamos la obtención de la tasa social de descuento a través de la tasa de fallo de los bienes en los que vamos a invertir. En concreto, hemos elegido la inversión en bosques y el incendio forestal como fallo del sistema, considerando la función de distribución Weibull como la más adecuada para modelizar la evolución de la tasa de fallo de nuestro sistema. El enfoque de la tasa de fallo responde a la consideración del riesgo asociado a la espera de la recompensa (o vencimiento de los flujos netos correspondientes), riesgo que puede ser considerado como fallo del sistema, mortalidad de la población a la que va dirigida la inversión e incluso disminución de la utilidad marginal del ingreso.

La organización de este artículo es la siguiente: tras la introducción al problema objeto de estudio, en la sección 2 se resume brevemente la discusión existente acerca de la tasa social de descuento más apropiada. En la sección 3, explicamos detalladamente la metodología utilizada para la obtención de la función de descuento aplicable a un proyecto de inversión en reforestación y mostramos los resultados obtenidos y las conclusiones que se extraen de los mismos. Por último, en la sección 4, se resumen y presentan las conclusiones del trabajo.

---

7 Office of Management and Budget (1992): "Circular A94: Guidelines and Discount Rates for Benefit-Cost Analysis of Federal Programs" y (2002): "Guidelines and Discount Rates for Benefit-Cost Analysis of Federal Programs (Revision of Circular A94)".

## 2. LA BÚSQUEDA DE UNA TASA SOCIAL DE DESCUENTO APROPIADA

Del mismo modo que, en la práctica, encontramos heterogeneidad en las tasas sociales de descuento utilizadas por los distintos gobiernos, en la literatura referida al tema del descuento social, encontramos diversos modelos de descuento.

La discusión entre el modelo de no descuento y el modelo de descuento compuesto constante se suele adoptar como obvia en la literatura. Sin embargo, dichos modelos no son más que enfoques extremos para reflejar las preferencias temporales: no descontar supone asignar una excesiva importancia al valor futuro y, por el contrario, el descuento compuesto supone asignar muy poca relevancia al mismo. “Muchos adoptan la posición de que para proyectos ambientales a largo plazo la tasa apropiada de descuento es cero. Pero hay que ser cuidadosos con esto. Se ha ocasionado bastante daño a los recursos naturales y ambientales al utilizar tasas de descuento muy bajas para evaluar los proyectos de desarrollo. Con tasas bajas de descuento, a menudo es posible justificar proyectos públicos de infraestructuras altamente destructores debido a que beneficios suficientemente distantes e inciertos se pueden acumular para superar los enormes costos a muy corto plazo. (...) Altas tasas de descuento también pueden hacer que se pasen por alto los impactos ambientales negativos que se presenten en un futuro lejano” (Field: 1995). A mitad de camino se sitúan modelos de valoración (descuento hiperbólico<sup>8</sup>, cuasi-hiperbólico<sup>9</sup>, descuento proporcional<sup>10</sup>, etc.) que incorporan ciertos comportamientos sociales empíricamente contrastados y que pueden ser bastante más representativos de las preferencias sociales en cuanto a valoración de los proyectos de esta naturaleza.

El objetivo principal, a lo largo de este trabajo, será encontrar una *tasa social de descuento* adecuada para valorar proyectos de interés social cuyo horizonte temporal sea el largo plazo. Este tipo de descuento podrá ser de gran utilidad para una mejor asignación de las inversiones públicas que permita un desarrollo sostenible en su dimensión global, es decir, sostenible ecológica, económica y socialmente.

La búsqueda de este factor de descuento la realizaremos mediante el estudio de distribuciones de probabilidad conocidas y del comportamiento de las tasas de fallo<sup>11</sup>

---

8 Ainslie (1975), Harvey (1986), Herrnstein (1981), Loewenstein y Prelec (1992), Mazur (1987), Prelec (1989), Thaler (1981).

9 El trabajo empírico de Green y Myerson (1996) apunta a la función cuasi-hiperbólica como el modelo que mejor explica el descuento temporal tanto a nivel individual como de grupo.

10 Harvey (1994, 1995).

11 La tasa de fallo viene definida por su respectiva función de fallo. “Una función de fallo describe matemáticamente el efecto que los incrementos en el tiempo de espera tienen en el riesgo de que ocurra algo que impida la ocurrencia de un suceso” (Gross y Clark: 1975). En una revisión de la literatura referida a la tasa de fallo y/o mortalidad en relación a la obtención de modelos de descuento, encontramos los trabajos de Azfar (1999), Brent (1993), Cropper et al. (1992), Green y Myerson (1996), Kula (1984), Myerson y Green (1995), Nir (2000) y Sozou (1998, 2003).

de los bienes en los que se va a invertir. La metodología propuesta es fácilmente extensible a otras situaciones distintas a las de la aplicación propuesta. Esto es lo que le da valor real frente al método clásico del análisis coste-beneficio, aún teniendo en cuenta la heterogeneidad en las tasas sociales de descuento definidas en las normativas de los distintos gobiernos. En efecto, consideremos un bien público, por ejemplo, un parque natural en una zona rural cercana a una gran ciudad. Si la tasa de fallo estimada para un período de tiempo es pequeña (podemos estimar pocos incendios forestales gracias a la política forestal, campañas publicitarias, etc.), los beneficios derivados de la inversión (incremento de la calidad de vida, disminución del número de enfermedades cardiovasculares, etc.) deberían tenerse muy en cuenta a la hora de valorar la inversión. Entonces, el tipo de descuento para ese período debería ser muy pequeño y, por tanto, el factor de descuento cercano a la unidad.

El argumento anterior podría generalizarse considerando la variable aleatoria que representa la edad aleatoria de una población (Henderson y Langford: 1998) y no la duración del bien, ya que la inversión en un bien público sólo tiene sentido cuando puede ser “disfrutada” por la población para la cual está pensado el proyecto. Tal consideración nos conduce al concepto de *mortalidad*. Cropper *et al.* (1992) llevaron a cabo una investigación en la que presentaban dos programas alternativos para salvar vidas bien en el momento presente, bien en el futuro (dentro de  $x$  años). Destacamos dos conclusiones de dicha investigación. Primero, la gente no descontó a un tipo exponencial constante y segundo, incluyeron en el tipo de descuento su propia tasa de fallo y/o la de su familia. Por tanto, tuvieron en cuenta la mortalidad de un colectivo particular para elegir un tipo de descuento. En este caso, lo que nos interesa es la distribución de probabilidades de los colectivos. De manera parecida, Henderson y Langford (1998, *op. cit.*) deducen la función de distribución de  $n$  individuos agregando las funciones individuales porque “se necesita formar la densidad conjunta de una serie de individuos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para formar un tipo de descuento social”. Así, si el comportamiento individual está modelizado por una distribución exponencial, la función de distribución agregada (la suma de las individuales) sería una distribución gamma. Y, en el caso de que cada individuo tenga una distribución gamma, la función de distribución conjunta es una gamma Liouville (Henderson y Langford: 1998, *op. cit.*).

Algunos autores como Kula (1984, 1985), recogiendo propuestas de economistas como Fisher (1930), Eckstein (1957), Henderson (1968) y Dasgupta y Pearce (1974), estiman la tasa de preferencia pura por el tiempo a partir del cálculo de la esperanza de vida en un determinado período de tiempo y su proyección a los años que dure la inversión. Evidentemente, los resultados obtenidos empleando este último enfoque no coincidirían con los del anterior, ya que la información suministrada por la tasa de fallo del bien es mucho más directa que la proporcionada por la mortalidad de la población que, al fin y al cabo, es una medida indirecta de la utilidad social del bien. Además, es evidente que las funciones de distribución serían distintas. En este

sentido, sería posible determinar una jerarquía de bondad entre ambos enfoques, dependiendo de la tipología de la información estadística existente. Esto determinaría la metodología a seguir. En este caso y a título de ejemplo, propondríamos el siguiente orden de prelación entre enfoques:

- Tasa de fallo del bien.
- Tasa de mortalidad de la población afectada.
- Tasa de mortalidad general de la población.
- Tasa de inflación monetaria.

En este sentido, convendría llevar a cabo un análisis previo de qué variable es más interesante en cada caso, utilizando como criterio la mayor o menor vinculación de la variable con la vida útil del bien objeto de la inversión.

### **3. APLICACIÓN EMPÍRICA: OBTENCIÓN DE LA TASA SOCIAL DE DESCUENTO APLICABLE A LA INVERSIÓN EN FORESTACIÓN**

#### **3.1. Datos utilizados**

Como aplicación práctica para obtener la tasa de fallo y así poder calcular, posteriormente, el tipo de descuento aplicable a la valoración de proyectos públicos de inversión, se ha elegido la inversión en bosques, es decir, en forestación y el incendio forestal como fallo del sistema. Para calcular la tasa de fallo se han utilizado datos de superficie forestal incendiada (medida en hectáreas) en relación con la superficie forestal total a lo largo de una serie de años.

En concreto, se han utilizado datos referidos a incendios y superficies forestales totales en España y en Andalucía. En primer lugar, se comenzó usando una serie de datos de once años (1992 a 2002) referida al total de superficie afectada en España. Esta información se obtuvo de uno de los enlaces especializados en la materia que aparecía en la página web del Ministerio de Medio Ambiente: [www.incendiosforestales.org](http://www.incendiosforestales.org). Para contrastar los resultados obtenidos, se utilizó otra serie con datos referidos a Andalucía, para el mismo período, obteniéndose conclusiones similares acerca de la ley de descuento. Estos últimos datos proceden de la web de la Consejería de Medio Ambiente de la Junta de Andalucía: [www.juntadeandalucia.es/medioambiente](http://www.juntadeandalucia.es/medioambiente).

A pesar de que las dos regresiones arrojaban datos similares, cabía la posibilidad de obtener resultados más fiables utilizando una serie temporal más amplia. Por ello, buscamos series más largas de datos. Tras varios intentos fallidos, en los que contactamos vía e-mail con varios enlaces especializados ([info@incendiosforestales.org](mailto:info@incendiosforestales.org), [salaincendios@dgcen.es](mailto:salaincendios@dgcen.es)) y realizamos búsquedas en el Banco de Datos de la Naturaleza dentro de la web del Ministerio de Medio Ambiente ([www.mma.es](http://www.mma.es)), contactamos

finalmente con la Dirección General de Conservación de la Naturaleza y, dentro de esta Dirección, con el Área de Defensa contra Incendios Forestales. De este modo, obtuvimos los datos de incendios forestales en España para el período 1961-2001. Estos datos mostraban el número de incendios y total de hectáreas afectadas por los mismos. Solicitamos, además, el dato de la superficie forestal total actual.

Pero, para saber el porcentaje de superficie incendiada en relación con la superficie forestal total en el período elegido 1961-2001, no era suficiente con la superficie forestal total actual, ya que durante dicho período se han ido produciendo reforestaciones, de modo que contactamos –esta vez telefónicamente– con el Banco de Datos de la Naturaleza para solicitar datos sobre superficie forestal entre 1961 y 2001. Así, nos suministraron los datos del Inventario Forestal Nacional 1 y 2 relativos a la superficie forestal total en nuestro país.

El Inventario Forestal Nacional (IFN) es un trabajo de investigación que se diseñó para repetirlo cada diez años y que nace como herramienta imprescindible para conocer adecuadamente la estructura y el funcionamiento de los bosques y así poder llevar a cabo las actuaciones necesarias para su manejo y conservación.

El primer IFN, diseñado a mediados de la década de los 60, tenía como objetivo casi exclusivo la evaluación del potencial maderero de nuestros montes. Por su parte, el segundo, preparado a mediados de los 80, aunque seguía teniendo a la madera como principal protagonista, añadió ya una serie de parámetros ecológicos, silvícolas y fitosanitarios que complementaban el estudio. Y, en estos momentos, se encuentra en fase de realización el tercer IFN, que se proyectó a mediados de los 90 y se espera esté finalizado en el año 2008, cuyos objetivos son mucho más amplios que los de sus predecesores.

Teniendo en cuenta la serie temporal objeto de nuestro estudio (1961-2001) y las fechas de realización de los IFN, vemos que los inventarios forestales no se ajustan exactamente a este período, pero usando los datos del Primer y Segundo Inventario Forestal Nacional (IFN1 e IFN2), que abarcan respectivamente los períodos de 1965 a 1974 y de 1986 a 1995, pudimos obtener finalmente el porcentaje de superficie incendiada respecto a la superficie total, con las siguientes salvedades:

- Para el período 1961-1965, en que no había inventario forestal, utilizamos también los datos del IFN1.
- En el período entre el IFN1 y el IFN2 (de 1974 a 1986), supusimos vigentes los datos del primer inventario.
- Como el Tercer Inventario Forestal Nacional aún no está terminado, optamos por utilizar el dato que nos dieron en la Dirección General de Conservación de la Naturaleza sobre superficie forestal total actual en el último tramo de 1995 a 2001.

Como última aclaración, decir que, como superficie forestal afectada, se ha tomado el total de superficie forestal, que incluye tanto la arbolada como la desarbolada.

### 3.2. La función de descuento a partir de la tasa de fallo

A continuación, vamos a realizar un estudio acerca del grado de ajuste de los datos anuales de que disponemos sobre incendios forestales en España durante el período 1992-2002 y, para ello, utilizaremos una distribución Weibull, cuya función de distribución viene dada por la expresión:

$$F(t) = 1 - e^{-a(t-\mu)^b},$$

donde  $t \geq \mu$ ,  $a > 0$  y  $b > 0$ . La evolución de la tasa de fallo sigue normalmente una curva con forma de bañera<sup>12</sup>. La distribución de Weibull se caracteriza por considerar la tasa de fallo variable, siendo utilizada por su gran flexibilidad, al poder ajustarse a distintas situaciones. En efecto, como es conocido, la tasa de fallo instantánea de una distribución Weibull es decreciente si  $b < 1$ , constante si  $b = 1$  y creciente si  $b > 1$ . Esta característica convierte a la distribución Weibull en la más adecuada para nuestra investigación.

Ahora bien, algunas distribuciones permiten modelizar mejor una zona o zonas de la curva de bañera:

- Distribución exponencial: es una distribución uniparamétrica que describe el tiempo de espera hasta la ruptura de un componente único. Refleja la fase normal de la operación y, por tanto, puede ser utilizada para describir la zona central de la curva de bañera.
- Distribución gamma: es una distribución biparamétrica que describe el tiempo de espera hasta la ruptura de un componente múltiple, donde el segundo parámetro especifica el número de componentes del sistema. La suma de  $k$  variables aleatorias independientes de distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  es una variable aleatoria de distribución gamma. Por tanto, es bastante adecuada para describir el comportamiento agregado de un colectivo (Henderson y Langford: 1998; Weitzman: 2001).
- Distribución Erlang: es un caso particular de la distribución gamma y, por tanto, describe la suma de variables exponenciales independientes, modelizando también el comportamiento agregado de un colectivo (Sozou: 1998).
- Distribución normal: describe el comportamiento durante el período de desgaste del componente. Por tanto, la tasa de fallo es creciente.
- Distribución Weibull: permite representar las distintas zonas de la curva de bañera según el valor de  $b$ .

---

<sup>12</sup> Existen otros modelos alternativos. En el capítulo 4 del libro de Gross y Clark, citado en la bibliografía, hay una interesante discusión al respecto y en el trabajo de Murthy, V.K., Swartz, G.B., Yuen, K.K. (1973) Realistic models for mortality rates and their estimation-II. Technical Report No. 3, Dept. of Biomathematics, UCLA.

Centrándonos en una distribución Weibull, vamos a llevar a cabo una serie de transformaciones en la función de distribución, tomando dos veces logaritmos neperianos:

$$1 - F(t) = e^{-a(t-\mu)^b}, \ln [1 - F(t)] = -a(t - \mu)^b,$$

$$\ln \frac{1}{1 - F(t)} = a(t - \mu)^b, \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \ln a + b \ln(t - \mu).$$

Más concretamente, si disponemos de una serie de datos anuales porcentuales sobre incendios forestales:

$$(t_1, p_1), (t_2, p_2), \dots, (t_n, p_n),$$

podemos construir valores experimentales de la función de distribución:

$$(t_1, F^*(t_1)), (t_2, F^*(t_2)), \dots, (t_n, F^*(t_n)),$$

donde  $F^*(t_1) = p_1$ ,  $F^*(t_2) = p_1 + p_2$ , ...,  $F^*(t_n) = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ .

Para ello, es preciso asegurarse de que todos los porcentajes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  están calculados sobre el mismo número inicial de hectáreas, es decir, que  $p_k$  es el porcentaje de hectáreas quemadas en  $t_k$ , no sobre el número de hectáreas que quedaron sin quemar en  $t_{k-1}$ , sino sobre las inicialmente disponibles en  $t_0$ . Tampoco existiría ningún problema si los datos porcentuales vinieran referidos al número de hectáreas resultantes sin quemar al finalizar el año anterior, ya que, en este caso, dichos porcentajes representarían directamente las tasas de fallo que, en el caso de la distribución Weibull, adopta la expresión:

$$h(t) = ab(t - \mu)^{b-1},$$

de donde, tomando logaritmos neperianos,

$$\ln h(t) = \ln(ab) + (b - 1) \ln(t - \mu).$$

Por otra parte, no representa ningún problema el hecho de que se haya producido repoblación forestal en las extensiones objeto de estudio. Pues bien, continuando con el caso inicialmente planteado, la regresión se lleva a cabo, en primer lugar, con una función lineal del tipo:

$$\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = \ln a + b \ln t,$$

es decir, sin tener en cuenta  $\mu$ . Para ello, se hacen los siguientes cambios de variable:

- $\ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} = y,$

- $\ln t = x, y$
- $\ln a = A,$

quedando  $y = A + bx$ , donde  $A$  y  $b$  son los parámetros a determinar. De esta forma, una vez calculados los valores:

$x$	$\ln t_1$	$\ln t_2$	...	$\ln t_n$
$y$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_1)}$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_2)}$	...	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_n)}$

la regresión nos dará una recta estimada:

$$\hat{y} = A^* + b^* x,$$

de donde podemos obtener el valor de  $a^*$ :

$$\ln a^* = A^* \Rightarrow a^* = e^{A^*}.$$

En primer lugar, efectuaremos la regresión partiendo de los datos del porcentaje de superficie forestal afectada sobre el total de superficie forestal en España, en el período de 1992 a 2002. Los datos aparecen detallados en el siguiente cuadro, así como los cálculos que nos llevan a obtener  $x$  y  $y$ :

Año $t_i$	% Superficie afectada	$p_i$	$F^*(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
1992	0,364	0,00364	0,00364	7,59639	-5,61395
1993	0,324	0,00324	0,00688	7,59689	-4,97569
1994	1,604	0,01604	0,02292	7,59740	-3,76417
1995	0,506	0,00506	0,02798	7,59790	-3,56211
1996	0,209	0,00209	0,03007	7,59840	-3,48900
1997	0,350	0,00350	0,03357	7,59890	-3,37710
1998	0,447	0,00447	0,03804	7,59940	-3,24979
1999	0,294	0,00294	0,04098	7,59990	-3,17382
2000	0,679	0,00679	0,04777	7,60040	-3,01698
2001	0,286	0,00286	0,05063	7,60090	-2,95735
2002	0,308	0,00308	0,05371	7,60140	-2,89668

En nuestro caso particular, una primera representación gráfica de los valores:

$$(x_1^*, y_1^*) (x_2^*, y_2^*) \dots, (x_n^*, y_n^*),$$

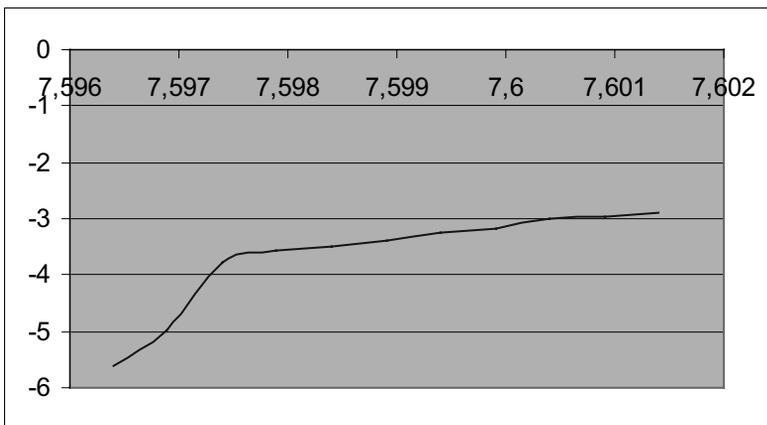
en este caso:

**Tabla 1. Datos de la regresión.**

$x_i^*$	$y_i^*$
7,5963923	-5,61394883
7,59689444	-4,97568672
7,59739632	-3,76417441
7,59789795	-3,56210942
7,59839933	-3,48900043
7,59890046	-3,37709785
7,59940133	-3,24978851
7,59990196	-3,17382241
7,60040233	-3,01698294
7,60090246	-2,95734513
7,60140233	-2,89667996

advierte de la existencia de una asíntota vertical para  $x = \ln 1991$ , por lo que se realizaría una traslación al neperiano de 1991:

**Figura 1. Representación gráfica de los datos de la regresión.**



lo que nos lleva a tomar  $\mu = 1991$  y efectuar una nueva regresión sobre los valores de  $\ln(t - 1991)$ :

**Tabla 2. Datos de la regresión sobre los valores de  $\ln$ .**

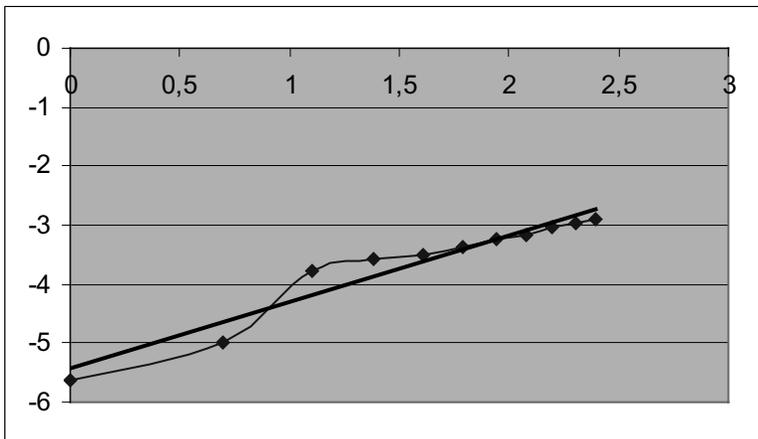
$\ln(t - 1991)$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
0	-5,61394883
0,69314718	-4,97568672
1,09861229	-3,76417441
1,38629436	-3,56210942
1,60943791	-3,48900043
1,79175947	-3,37709785
1,94591015	-3,24978851
2,07944154	-3,17382241
2,19722458	-3,01698294
2,30258509	-2,95734513
2,39789527	-2,89667996

obteniéndose:

$$y = 1,1293 x - 5,4403.$$

El estadístico de la significación conjunta de los parámetros del modelo, que sigue una  $F_{1,9}$ , toma el valor 130,32, mientras que la  $F$  de las tablas es 5,2.

**Figura 2. Representación gráfica de los datos de la nueva regresión.**



Así,  $a^* = e^{-5,4403} = 0,004338181621$  y  $b^* = 1,1293$ .

Por tanto,

$$\hat{F}(t) = 1 - e^{-0,004338181621(t-1991)^{1,1293}}$$

Veamos, a continuación, cuál es la expresión de la ley financiera de descuento asociada a  $\hat{F}(t)$ . Para ello, calcularemos, en primer lugar, la tasa de fallo asociada a  $\hat{F}(t)$ :

$$\hat{h}(t) = ab(t - \mu)^{b-1} = 0,004899108505(t - 1991)^{0,1293}$$

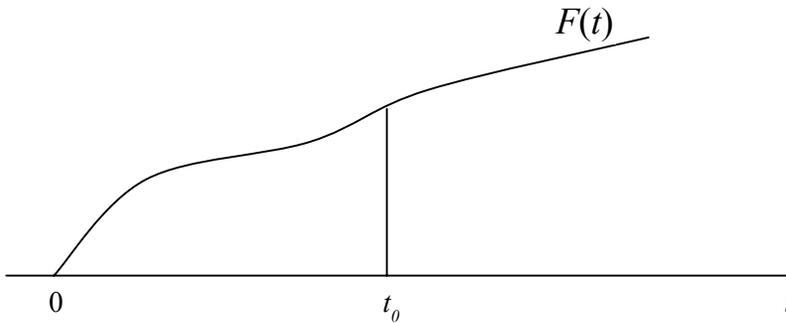
Como puede observarse, la tasa de fallo de la variable aleatoria  $T$  es ligeramente creciente lo que se interpreta como un leve aumento anual en el número de hectáreas quemadas con respecto a las que van quedando sin arrasarse. Esto hace que la tasa instantánea de descuento de la ley financiera asociada a la función de distribución, que es igual a la tasa de fallo de la variable aleatoria  $T$ , sea creciente implicando que las cuantías más alejadas del instante inicial van a ser descontadas a un tanto medio anual más alto que las más cercanas.

A partir de la tasa de fallo, podemos obtener la ley de descuento, como se indica a continuación:

$$\hat{A}(t, 1991) = 1 - \hat{F}(t) = e^{-0,004338181621(t-1991)^{1,1293}}$$

Vamos a suponer que la variante que describe la edad aleatoria de un bien público tiene un campo de variación ilimitado por la derecha, es decir, del tipo  $[0, +\infty)$ . Téngase en cuenta que la tasa social de descuento se emplea en la valoración de proyectos a largo o muy largo plazo, afectando no sólo a una, sino a varias generaciones. Esto hace que sea más conveniente utilizar modelos probabilísticos con un horizonte temporal infinito, como es el caso de la distribución Weibull. Ahora bien, las tasas anuales medias de descuento resultantes pueden ser demasiado pequeñas para valorar proyectos de inversión que, en definitiva, tienen un horizonte temporal limitado. Por ello, sería conveniente truncar la distribución por la derecha en el instante  $t_0$  que represente el final del horizonte de la inversión.

En efecto, sea  $F(t)$  una función de distribución en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

**Figura 3.** Función de distribución en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

Consideremos la nueva función:  $G : [0, t] \rightarrow \mathfrak{R}$ , tal que:

$t \rightarrow G(t) = \frac{F(t)}{F(t_0)}$ . Se puede comprobar fácilmente que  $G$  es una función de distribución:

- Si  $t = 0$ , entonces

$$G(0) = \frac{F(0)}{F(t_0)} = \frac{0}{F(t_0)} = 0.$$

- Si  $t = t_0$ , entonces

$$G(t_0) = \frac{F(t_0)}{F(t_0)} = 1.$$

- $G(t)$  es monótona no decreciente.
- $G(t)$  es continua por la derecha en cada punto.

Por tanto,  $G(t)$  es una función de distribución que está truncada por la derecha. La función de densidad de esta nueva distribución será:

$$g(t) = \frac{f(t)}{F(t_0)}$$

y su tasa de fallo:

$$\lambda(t) = \frac{g(t)}{1-G(t)} = \frac{f(t)/F(t_0)}{1-F(t)/F(t_0)} = \frac{f(t)}{F(t_0)-F(t)}.$$

La ley financiera de descuento asociada a esta función de distribución será:

$$A(t,0) = e^{-\int_0^t \frac{f(z)}{F(t_0)-F(z)} dz} = e^{+\ln[F(t_0)-F(t)]} = e^{\ln \frac{F(t_0)-F(t)}{F(t_0)}} = \frac{F(t_0)-F(t)}{F(t_0)}.$$

Se puede comprobar que  $A(t,0)$  es una ley financiera de descuento regular:

- Si  $t = 0$ , entonces

$$A(0,0) = 1.$$

- Si  $t \rightarrow t_0$ , entonces

$$A(0,t_0) = 0.$$

El valor  $t_0$  utilizado para efectuar el truncamiento depende de la vida máxima o la vida media de cada tipo de bien. En este sentido, sería interesante cuantificar la duración del “muy largo plazo” para cada uno de los bienes públicos que se pudieran evaluar, aunque en algunos casos consideremos horizontes temporales inferiores a la vida máxima, de acuerdo con el estudio que queramos llevar a cabo en cada momento. Así, podríamos considerar:

- a) El tipo de proyecto público estudiado.
- b) El número de generaciones involucradas en el estudio.
- c) La vida útil del proyecto.
- d) El plazo medio de renovación del bien.
- e) El grado de deterioro del bien.
- f) Etcétera.

Así, si queremos hallar el VAN de un bien público destinado a la mejora de la calidad de vida de un colectivo, es probable que se tengan en cuenta 50 ó 100 años. Obsérvese que el efecto sobre la tasa de fallo provocado por el truncamiento por la derecha es que ésta aumenta, ya que:

$F(t_0) < 1$ , entonces  $F(t_0) - F(t) < 1 - F(t)$ , lo que implica que:

$$\frac{f(t)}{F(t_0) - F(t)} > \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

y por tanto,

$$h'(t) > h(t).$$

Este resultado es lógico porque, al ser mayor la función de densidad de la distribución truncada, la tasa de fallo aumenta, incrementándose la probabilidad de desaparición del bien.

Si estuviéramos interesados en estudiar el valor actual de la inversión en forestación para una generación, en la distribución Weibull anterior tendríamos que truncar por  $t_0 = 100$  (vida máxima estimada de una generación), obteniéndose la siguiente tabla:

**Tabla 3. Leyes y tasas de descuento asociadas a los distintos plazos.**

Años	Ley de descuento	Tasa de descuento equivalente
1992	0,99567121	0,00434761
1993	0,99055500	0,00475622
1994	0,98511094	0,00501286
1995	0,97945463	0,00520333
1996	0,97364471	0,00535605
1997	0,96771746	0,00548417
1998	0,96169779	0,00559488
1999	0,95560403	0,00569260
2000	0,94945030	0,00578021
2001	0,94324784	0,00585972
2002	0,93700585	0,00593260
2003	0,93073200	0,00599992
2004	0,92443280	0,00606253
2005	0,91811385	0,00612108
2006	0,91178002	0,00617610
2007	0,90543558	0,00622801
2008	0,89908432	0,00627718
2009	0,89272960	0,00632389
2010	0,88637445	0,00636839
2011	0,88002159	0,00641090
2012	0,87367348	0,00645161
2013	0,86733237	0,00649066
2014	0,86100030	0,00652819
2015	0,85467914	0,00656433
2016	0,84837061	0,00659919
2017	0,84207629	0,00663285
2018	0,83579763	0,00666540
2019	0,82953597	0,00669693
2020	0,82329256	0,00672748
2021	0,81706855	0,00675714
2022	0,81086502	0,00678594

<b>Años</b>	<b>Ley de descuento</b>	<b>Tasa de descuento equivalente</b>
2023	0,80468294	0,00681395
2024	0,79852325	0,00684121
2025	0,79238680	0,00686776
2026	0,78627440	0,00689364
2027	0,78018678	0,00691888
2028	0,77412464	0,00694352
2029	0,76808863	0,00696759
2030	0,76207935	0,00699111
2031	0,75609735	0,00701411
2032	0,75014318	0,00703662
2033	0,74421730	0,00705866
2034	0,73832018	0,00708024
2035	0,73245224	0,00710139
2036	0,72661387	0,00712213
2037	0,72080543	0,00714247
2038	0,71502728	0,00716243
2039	0,70927971	0,00718203
2040	0,70356303	0,00720127
2041	0,69787750	0,00722017
2042	0,69222337	0,00723875
2043	0,68660087	0,00725702
2044	0,68101021	0,00727498
2045	0,67545158	0,00729264
2046	0,66992516	0,00731003
2047	0,66443111	0,00732714
2048	0,65896957	0,00734399
2049	0,65354067	0,00736059
2050	0,64814453	0,00737693
2051	0,64278125	0,00739304
2052	0,63745093	0,00740892
2053	0,63215363	0,00742457
2054	0,62688944	0,00744000
2055	0,62165840	0,00745522
2056	0,61646057	0,00747024
2057	0,61129597	0,00748506
2058	0,60616464	0,00749968
2059	0,60106660	0,00751411
2060	0,59600185	0,00752836
2061	0,59097040	0,00754244
2062	0,58597224	0,00755633

<b>Años</b>	<b>Ley de descuento</b>	<b>Tasa de descuento equivalente</b>
2063	0,58100736	0,00757006
2064	0,57607573	0,00758363
2065	0,57117733	0,00759703
2066	0,56631212	0,00761028
2067	0,56148007	0,00762337
2068	0,55668112	0,00763632
2069	0,55191523	0,00764912
2070	0,54718234	0,00766177
2071	0,54248237	0,00767429
2072	0,53781528	0,00768668
2073	0,53318097	0,00769893
2074	0,52857938	0,00771105
2075	0,52401042	0,00772305
2076	0,51947401	0,00773492
2077	0,51497005	0,00774667
2078	0,51049845	0,00775830
2079	0,50605912	0,00776982
2080	0,50165195	0,00778123
2081	0,49727684	0,00779252
2082	0,49293367	0,00780371
2083	0,48862235	0,00781478
2084	0,48434275	0,00782576
2085	0,48009475	0,00783663
2086	0,47587824	0,00784740
2087	0,47169310	0,00785808
2088	0,46753920	0,00786865
2089	0,46341640	0,00787914
2090	0,45932460	0,00788953
2091	0,45526364	0,00789983
2092	0,45123341	0,00791004

La interpretación de estos resultados es la siguiente: el riesgo de incendios va aumentando a medida que aumenta el tiempo, lo que hace que los beneficios originados por el bien público tengan cada vez menos valor inicial a medida que se alejan en el futuro y esto ha de verse reflejado en la expresión de la ley de descuento, que como podemos observar es decreciente con respecto a  $t$ , con un tanto medio de descuento anual mayor a medida que se aleja el instante en el que se producen los ingresos derivados de estas instalaciones: ahorro medioambiental, ahorro sanitario, aumento de la calidad de vida, concienciación ciudadana, disminución del personal contratado en prevención: empleados forestales, bomberos, etc. Obsérvese que las

tasas de descuento obtenidas solamente tienen en cuenta el riesgo y no otras razones de tipo financiero para descontar.

Cuando se lleva a cabo el ajuste de la nube de puntos  $(t_1, F^*(t_1))$ ,  $(t_2, F^*(t_2))$ , ...,  $(t_n, F^*(t_n))$  a una distribución teórica de probabilidad  $F(t)$  puede ocurrir que, en vez de ajustar la nube de puntos a una sola distribución de probabilidad, sea más conveniente hacerlo a varias distribuciones, en los siguientes dos sentidos:

1. Que exista una partición del intervalo  $[0, +\infty)$  en cada uno de cuyos elementos sea más adecuada una función de distribución distinta.
2. Que exista una familia de funciones de distribución que describan mejor, cada una de ellas, las causas de fallo del sistema en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

En el primer caso, estaremos hablando de una *mixtura de funciones de distribución*, mientras que en el segundo de una *composición de funciones de distribución*.

Pues bien, veamos a continuación el primer caso. Para ello, supongamos que existen  $k$  intervalos:

$$[0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3), \dots, [t_{k-1}, +\infty),$$

que constituyen una partición de  $[0, +\infty)$ , en cada uno de los cuales se produce el ajuste de una función de distribución:

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_k,$$

dando lugar a la función de distribución conjunta:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) & \text{si } 0 \leq t < t_1, \\ F_2(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_2, \\ F_3(t) & \text{si } t_2 \leq t < t_3, \\ \vdots & \\ F_k(t) & \text{si } t_{k-1} \leq t. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la continuidad de las funciones de distribución, se habrá de verificar que:

$$\lim_{t \rightarrow t_i} F_i(t) = F_{i+1}(t_i); \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Uno de los problemas que se plantearían en este primer caso es el número óptimo  $k$  de intervalos en que ha de dividirse el intervalo  $[0, +\infty)$ . En este caso, aparecerían  $k$  leyes financieras de descuento, cada una de ellas vigente en los respectivos subintervalos anteriores:

$$1 - F_1(t) \leftrightarrow [0, t_1),$$

$$\frac{1 - F_2(t)}{1 - F_1(t_1)} \leftrightarrow [t_1, t_2),$$

$$\frac{1 - F_3(t)}{1 - F_2(t_2)} \leftrightarrow [t_2, t_3),$$

⋮

$$\frac{1 - F_k(t)}{1 - F_{k-1}(t_{k-1})} \leftrightarrow [t_{k-1}, +\infty)$$

+∞

Lógicamente, la ley financiera aplicable al intervalo conjunto  $[0, +\infty)$  sería, en general, el producto financiero de estas  $k$  leyes. Así, si  $t_{i-1} \leq t < t_i$ :

$$A(t,0) = [1 - F_1(t_1)] \cdot \frac{1 - F_2(t_2)}{1 - F_1(t_1)} \cdot \frac{1 - F_3(t_3)}{1 - F_2(t_2)} \dots \frac{1 - F_i(t_i)}{1 - F_{i-1}(t_{i-1})} = 1 - F_i(t),$$

por lo que:

$$A(t,0) = \begin{cases} 1 - F_1(t) & \text{si } 0 \leq t < t_1, \\ 1 - F_2(t) & \text{si } t_1 \leq t < t_2, \\ 1 - F_3(t) & \text{si } t_2 \leq t < t_3, \\ \vdots & \\ 1 - F_k(t) & \text{si } t_{k-1} \leq t. \end{cases}$$

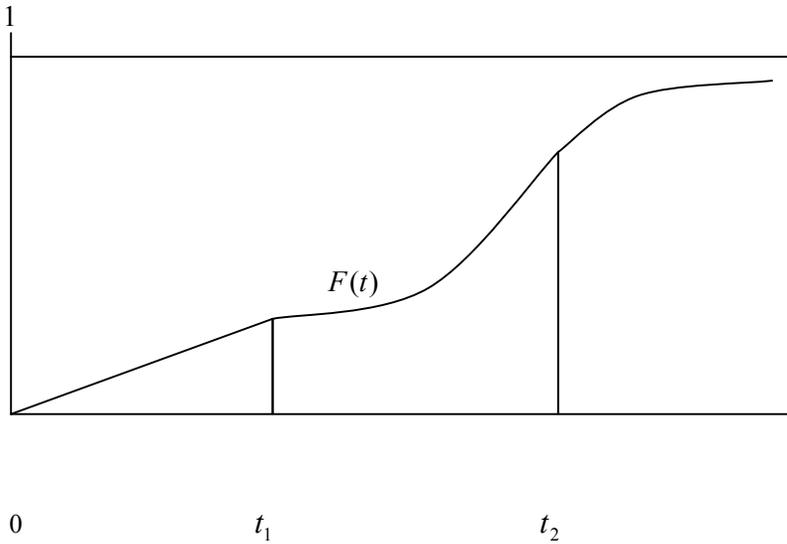
Obsérvese que:

1. La condición de continuidad para las funciones de distribución garantiza la continuidad de la ley financiera  $A(t,0)$ .

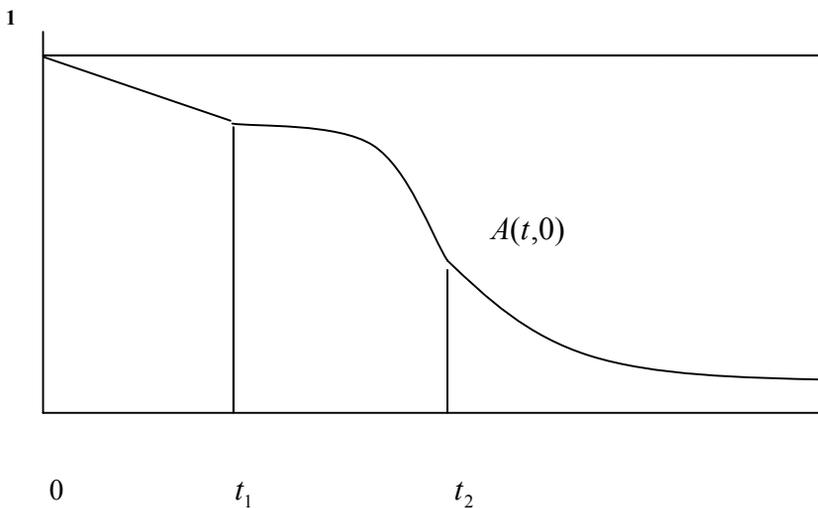
2. Si todas las funciones de distribución,  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ , procedieran de la misma familia, por ejemplo, fuesen todas ellas distribuciones Weibull con diferentes

parámetros  $a$  y  $b$ , el producto financiero anterior sería un proceso financiero. Nótese, por tanto, el paralelismo entre el concepto de mixtura de funciones de distribución y el de producto o proceso financiero.

**Figura 4.** Función de distribución conjunta.



**Figura 5.** Función de descuento asociada a la función de distribución anterior.



En el segundo de los dos casos, la función de distribución global  $F(t)$  sería susceptible de ser descompuesta en  $k$  funciones de distribución,  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ , todas ellas vigentes en el intervalo  $[0, +\infty)$ :

$$F(t) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) + \dots + \alpha_k F_k(t),$$

en donde el peso de  $F_i$ ,  $\alpha_i$ , dependería de la ponderación de la causa de fallo descrita por  $F_i$  en el conjunto total de factores que influyen en el fallo del sistema. Lógicamente, la exigencia de que, tanto  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_k$ , como  $F$ , sean funciones de distribución, hace que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k.$$

La ley financiera de descuento asociada a  $F$  será:

$$\begin{aligned} A(t,0) &= 1 - F(t) = 1 - [\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) + \dots + \alpha_k F_k(t)] = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k) - [\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) + \dots + \alpha_k F_k(t)] = \\ &= \alpha_1 [1 - F_1(t)] + \alpha_2 [1 - F_2(t)] + \dots + \alpha_k [1 - F_k(t)] = \\ &= \alpha_1 A_1(t,0) + \alpha_2 A_2(t,0) + \dots + \alpha_k A_k(t,0) = \\ &= A_1 \oplus_{\alpha_1, K, \alpha_{n-1}} A_2 \oplus_{\alpha_1, K, \alpha_{n-1}} \dots A_n = \bigoplus_{i=1}^k A_i(t,0), \end{aligned}$$

obteniéndose la misma combinación lineal convexa que con las funciones de distribución. Este concepto fue introducido por Cruz (1997).

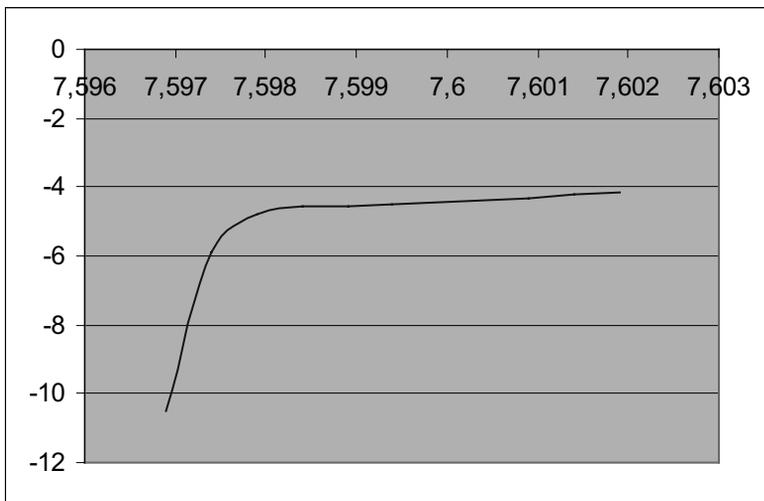
Una vez explicada la metodología para la obtención de la función de descuento y aplicada a la serie de datos para el período 1992-2002 en España, vamos a repetir el procedimiento utilizando los datos de Andalucía para el mismo y, por último, los datos del total nacional para una serie más larga (1961-2001). Como el procedimiento seguido es el mismo, pasaremos directamente a mostrar y comentar los resultados.

Partiendo de los datos del porcentaje de superficie forestal afectada sobre el total de superficie forestal en Andalucía para el período de 1992 a 2002:

Año $t_i$	% Superficie afectada	$p_i$	$F^*(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
1992	0,277	0,00277	0,00003	7,59689	-10,49406
1993	0,277	0,00277	0,00280	7,59740	-5,87756
1994	0,565	0,00565	0,00845	7,59790	-4,76962
1995	0,189	0,00189	0,01034	7,59840	-4,56677
1996	0,016	0,00016	0,01050	7,59890	-4,55133
1997	0,044	0,00044	0,01094	7,59940	-4,51005
1998	0,051	0,00051	0,01145	7,59990	-4,46422
1999	0,119	0,00119	0,01264	7,60040	-4,36472
2000	0,072	0,00072	0,01336	7,60090	-4,30895
2001	0,120	0,00120	0,01456	7,60140	-4,22231
2002	0,085	0,00085	0,01541	7,60190	-4,16513

Y tomando, de nuevo, las dos últimas columnas como valores  $x_i^*$  e  $y_i^*$ , podemos representar gráficamente esos valores:

**Figura 6. Representación gráfica de los datos de la regresión.**



lo que nos lleva, de nuevo, a tomar  $\mu = 1991$  y efectuar una nueva regresión sobre los valores de  $\ln(t - 1991)$ :

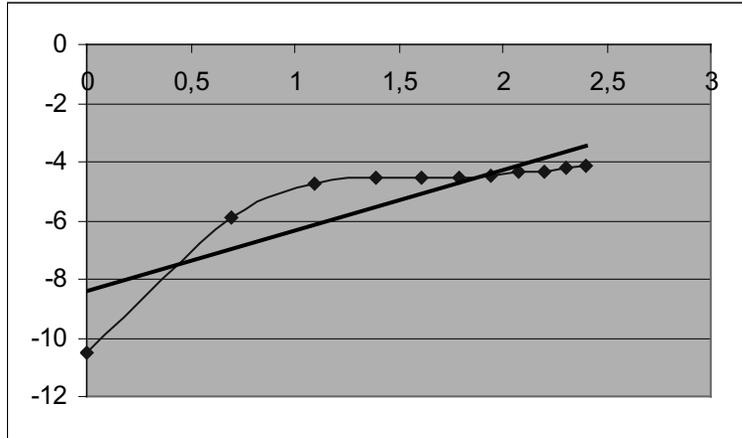
**Tabla 4. Datos de la regresión sobre los valores de  $\ln$ .**

$\ln(t - 1991)$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
0	-10,4940643
0,69314718	-5,87755714
1,09861229	-4,76962227
1,38629436	-4,56676662
1,60943791	-4,55132714
1,79175947	-4,51004580
1,94591015	-4,46421510
2,07944154	-4,36471849
2,19722458	-4,30894596
2,30258509	-4,22231182
2,39789527	-4,16513412

obteniéndose:

$$y = 2,0858 x - 8,4364.$$

El estadístico de la significación conjunta de los parámetros del modelo, que sigue una  $F_{1,9}$ , toma el valor 22,17, mientras que la  $F$  de las tablas es 5,2.

**Figura 7. Representación gráfica de los datos de la nueva regresión.**

Así,  $a^* = e^{-8,4364} = 0,000216829$  y  $b^* = 2,0858$ .

Por tanto,

$$\hat{F}(t) = 1 - e^{-0,000216829(t-1991)^{2,0858}}$$

La tasa de fallo asociada a  $\hat{F}(t)$  será:

$$\hat{h}(t) = ab(t - \mu)^{b-1} = 0,00452262(t - 1991)^{1,0858}$$

y la expresión de la ley financiera de descuento asociada a  $\hat{F}(t)$ :

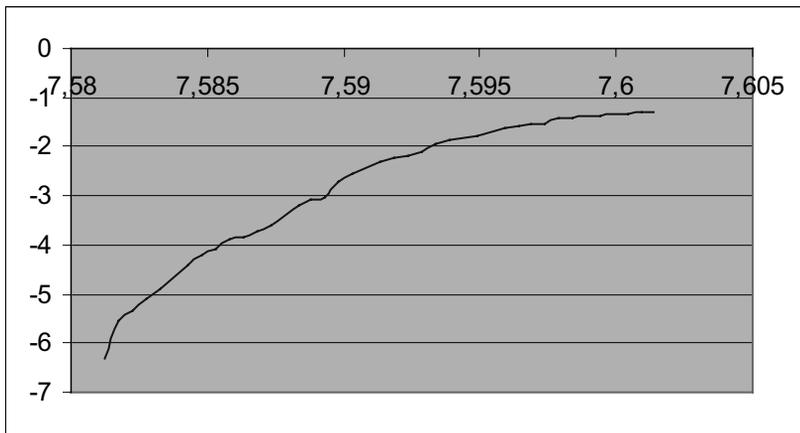
$$\hat{A}(t,1991) = 1 - \hat{F}(t) = e^{-0,000216829(t-1991)^{2,0858}}$$

Por último, haremos una nueva regresión sobre los datos del porcentaje de superficie forestal afectada sobre el total de superficie forestal en España para el período de 1961 a 2002. Los datos aparecen detallados en el siguiente cuadro, así como los cálculos que nos llevan a obtener  $x$  e  $y$ :

Año $t_i$	% Superficie afectada	$p_i$	$F^*(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
1961	0,178	0,00178	0,00178	7,58121	-6,33026
1962	0,214	0,00214	0,00392	7,58172	-5,54093
1963	0,087	0,00087	0,00479	7,58223	-5,33924
1964	0,121	0,00121	0,00600	7,58274	-5,11360
1965	0,146	0,00146	0,00746	7,58325	-4,89453
1966	0,190	0,00190	0,00936	7,58376	-4,66673
1967	0,295	0,00295	0,01231	7,58426	-4,39149
1968	0,217	0,00217	0,01448	7,58477	-4,22769
1969	0,207	0,00207	0,01655	7,58528	-4,09314
1970	0,348	0,00348	0,02003	7,58579	-3,90027
1971	0,135	0,00135	0,02138	7,58630	-3,83443
1972	0,222	0,00222	0,02360	7,58680	-3,73440
1973	0,373	0,00373	0,02734	7,58731	-3,58569
1974	0,547	0,00547	0,03281	7,58782	-3,40050
1975	0,726	0,00726	0,04006	7,58832	-3,19689
1976	0,476	0,00476	0,04482	7,58883	-3,08225
1977	0,272	0,00272	0,04754	7,58934	-3,02186
1978	1,692	0,01692	0,06446	7,58984	-2,70861
1979	1,053	0,01053	0,07499	7,59035	-2,55173
1980	1,012	0,01012	0,08511	7,59085	-2,41968
1981	1,148	0,01148	0,09659	7,59136	-2,28694
1982	0,588	0,00588	0,10247	7,59186	-2,22459
1983	0,416	0,00416	0,10663	7,59237	-2,18251
1984	0,635	0,00635	0,11299	7,59287	-2,12113
1985	1,865	0,01865	0,13163	7,59337	-1,95800
1986	1,036	0,01036	0,14199	7,59388	-1,87637
1987	0,574	0,00574	0,14773	7,59438	-1,83349
1988	0,539	0,00539	0,15312	7,59488	-1,79459
1989	1,669	0,01669	0,16981	7,59539	-1,68146
1990	0,794	0,00794	0,17775	7,59589	-1,63110

Año $t_i$	% Superficie afectada	$p_i$	$F^*(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1 - F^*(t_i)}$
1991	1,018	0,01018	0,18794	7,59639	-1,56937
1992	0,412	0,00412	0,19205	7,59689	-1,54524
1993	0,349	0,00349	0,19555	7,59740	-1,52513
1994	1,712	0,01712	0,21267	7,59790	-1,43086
1995	0,561	0,00561	0,21828	7,59840	-1,40138
1996	0,222	0,00222	0,22050	7,59890	-1,38991
1997	0,365	0,00365	0,22415	7,59940	-1,37125
1998	0,492	0,00492	0,22907	7,59990	-1,34648
1999	0,305	0,00305	0,23211	7,60040	-1,33138
2000	0,699	0,00699	0,23910	7,60090	-1,29735
2001	0,346	0,00346	0,24256	7,60140	-1,28083

**Figura 8. Representación gráfica de los datos de la regresión.**

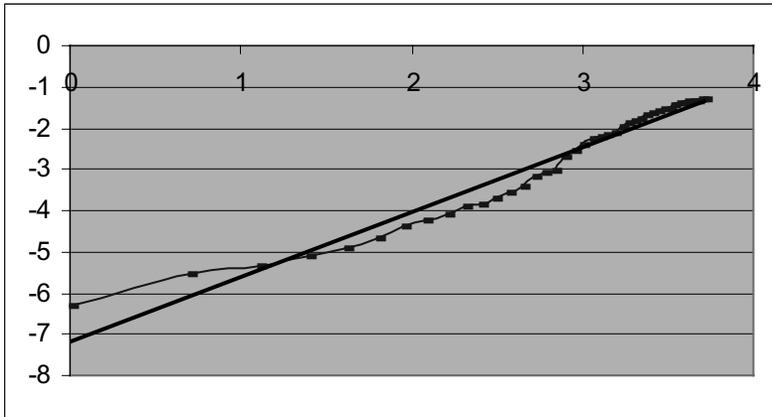


En este caso, tomando  $\mu = 1960$  y efectuando una nueva regresión sobre los valores de  $\ln(t - 1960)$ , obtenemos:

$$y = 1,5794 x - 7,2004.$$

El estadístico de la significación conjunta de los parámetros del modelo, que sigue una  $F_{1,9}$ , toma el valor 224,77, mientras que la  $F$  de las tablas es 5,2.

**Figura 9. Representación gráfica de los datos de la nueva regresión.**



Así,  $a^* = e^{-7,2004} = 0,000746287$  y  $b^* = 1,5794$ .

Por tanto,

$$\hat{F}(t) = 1 - e^{-0,000746287(t-1960)^{1,5794}}$$

La tasa de fallo asociada a  $\hat{F}(t)$  será:

$$\hat{h}(t) = ab(t - \mu)^{b-1} = 0,0011786856878(t - 1960)^{0,5794}$$

y la expresión de la ley financiera de descuento asociada a  $\hat{F}(t)$ :

$$\hat{A}(t, 1960) = 1 - \hat{F}(t) = e^{-0,000746287(t-1960)^{1,5794}}$$

Como hemos explicado anteriormente, es conveniente truncar la función de distribución Weibull por la derecha en el instante que represente el final del horizonte de la inversión. Así, partiendo de los datos de estas dos últimas regresiones, obtendríamos los valores de las leyes y tasas de descuento para la vida de la inversión. En ambos casos obtenemos también leyes financieras de descuento decrecientes a lo largo del tiempo y tasas de descuento equivalentes crecientes.

## 5. CONCLUSIONES

En este artículo se recoge una aplicación práctica, desde el enfoque de la tasa de fallo, para la obtención de la tasa social de descuento asociada a un proyecto público de inversión con horizonte temporal en el largo plazo, como es la inversión en reforestación. En este tipo de proyectos de inversión puede considerarse como fallo del sistema el incendio forestal. Por eso hemos considerado, para su cálculo, el número de hectáreas incendiadas en relación con el total de hectáreas de superficie forestal.

En concreto, hemos utilizado series de datos de incendios de España y de Andalucía para un período de 11 años y, por último, una serie de 31 años con datos de España, ésta última para contrastar los resultados obtenidos con las dos primeras y depurar la fiabilidad de los ajustes. A partir de una serie de datos porcentuales anuales sobre incendios forestales (tantos por ciento de superficie afectada), hemos construido los valores experimentales de la función de distribución ( $F^*(t_i)$ ) y, utilizando la regresión lineal, hemos ajustado dichos valores empíricos a una distribución Weibull del tipo  $F(t) = 1 - e^{-a(t-\mu)^b}$ , donde  $t \geq \mu$ ,  $a > 0$  y  $b > 0$ .

Una vez obtenida esta distribución, hemos calculado la función tasa de fallo asociada a la misma. Las conclusiones acerca de la tasa de fallo obtenida a partir de las tres series de datos utilizadas han sido similares. La tasa de fallo obtenida es ligeramente creciente, interpretándose este crecimiento como un leve aumento anual en el número de hectáreas quemadas con respecto a las que van quedando sin arrasar. Esto hace que la tasa instantánea de descuento de la ley financiera asociada a la función de distribución, que es igual a la tasa de fallo de la variable aleatoria  $T$ , sea creciente implicando que las cuantías más alejadas del instante inicial van a ser descontadas a un tanto medio anual más alto que las más cercanas.

Asimismo, a partir de la expresión de la tasa de fallo hemos obtenido la expresión la ley de descuento. De nuevo, las conclusiones obtenidas a partir de las tres series de datos utilizadas han sido similares. Se trata de una ley de descuento decreciente con respecto a  $t$ , cuyos tantos equivalentes en descuento compuesto para diferentes períodos de descuento van aumentando.

La utilización de una Weibull truncada viene justificada por la propia naturaleza de esta función y también por el horizonte temporal de los proyectos con que estamos tratando. Si bien la variante que describe la edad aleatoria de un bien público tiene un campo de variación ilimitado por la derecha, es decir, del tipo  $[0, +\infty)$ , como es el caso de la Weibull, las tasas medias de descuento anuales van a ser demasiado pequeñas para valorar proyectos de inversión que, en definitiva, tienen un horizonte temporal limitado. Por ello, se ha considerado conveniente truncar la distribución por la derecha en el instante  $t_0$  que represente el final del horizonte temporal de la inversión.

Así, si queremos hallar el VAN de un bien público destinado a la mejora de la calidad de vida de un colectivo, es probable que se tengan en cuenta 50 ó 100 años, por lo que hemos ofrecido los resultados de la ley de descuento y la tasa de descuento equivalente para una Weibull truncada en  $t_0 = 100$ . De este modo, hemos podido observar que el efecto sobre la tasa de fallo provocado por el truncamiento por la derecha es que ésta aumenta. Este resultado es lógico porque, al ser mayor la función de densidad de la distribución truncada, la tasa de fallo aumenta, incrementándose la probabilidad de desaparición del bien.

La interpretación de los resultados de las tres regresiones realizadas es coincidente: el riesgo de incendios va aumentando a medida que aumenta el tiempo, lo que supone que el valor actualizado de los beneficios originados por el bien público vaya disminuyendo cuando se alejan en el futuro y esto se traduce en un tanto medio de descuento anual creciente a lo largo del tiempo, es decir, a medida que nos alejamos del instante en el que se producen los ingresos derivados de estas instalaciones.

Dentro del debate existente acerca de la conveniencia de aplicar una tasa de descuento social constante o variable a lo largo del tiempo a un mismo proyecto de inversión, nuestro artículo se posiciona en la corriente favorable a una tasa social de descuento variable a lo largo del horizonte temporal de la inversión, como puede comprobarse también en los resultados de la aplicación empírica. Hay muchos autores que, como Harvey (1986), manifiestan que esta tasa ha de ser decreciente<sup>13</sup>, aunque nosotros pensamos que eso debe ocurrir después de un período inicial en el que las distintas administraciones no han dado la suficiente importancia a este tipo de inversiones como determinantes del bienestar social en el muy largo plazo. Serán las políticas de prevención y de concienciación ciudadana las que vayan frenando el aumento de la tasa de fallo, haciendo que su evolución sea decreciente en un horizonte temporal muy lejano. Esto quiere decir que, para una inversión concreta, el tanto de descuento puede ser creciente en los primeros períodos debido fundamentalmente a una política inadecuada de conservación de los bienes o a la falta de adaptación en los primeros años de vida de la inversión, etc.

Nuestra aproximación al problema a través de la utilización de la tasa de fallo responde a la consideración de la existencia de riesgo asociado a la espera de la recompensa (o vencimiento de los correspondientes flujos netos), riesgo que puede ser considerado como fallo del sistema en el que invertimos, mortalidad de la población a la que va dirigida la inversión e incluso disminución de la utilidad marginal del ingreso. No obstante, nosotros nos hemos centrado en el riesgo como fallo del proyecto de inversión. Una justificación de nuestra posición es que el tanto instantáneo de descuento para descontar los *cash-flows* futuros ha de coincidir con

---

13 La propuesta del modelo de descuento hiperbólico supone una propuesta de ratios de descuento decrecientes a lo largo del tiempo.

la tasa instantánea de fallo del sistema al que va dirigido la inversión. Como puede comprenderse, es muy difícil mantener la hipótesis de una tasa de fallo constante que supondría asumir que existe un riesgo constante asociado a la obtención de esos *cash-flows* futuros a lo largo del tiempo.

Con esta aproximación, nos situamos en una posición intermedia entre el no-descuento, que supervaloraría los *cash-flows* más distantes en el tiempo, y el descuento compuesto (el cual supone una tasa de fallo constante) que los infravaloraría exponencialmente.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AINSLIE, G. (1975) Specious reward: A behavioral theory of impulsiveness and impulse control, *Psychological Bulletin*, LXXXII, pp. 463-509.
- AZFAR, O. (1999) Rationalizing hyperbolic discounting, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 38, pp. 245-252.
- BARRIOS, C. Y MARTÍNEZ, M.A. (1997) Las decisiones públicas de inversión en infraestructuras de transporte y el análisis coste-beneficio, I Congreso de Ciencia Regional de Andalucía: Andalucía en el umbral del siglo XXI, Jerez. Publicación en CD-Rom.
- BRENT, R. (1993) Country estimates of social discount rates based on changes in life expectancies, *Kyklos*, 46(3), pp. 399-409.
- COMISIÓN EUROPEA (1997) GUIDE TO COST-BENEFIT ANALYSIS OF MAJOR PROJECTS.
- COMISIÓN EUROPEA (2001) Guide to cost-benefit analysis of investment projects. Evaluation Unit DG Regional Policy European Commission.
- CONFERENZA DEI PRESIDENTI DELLE REGIONI E DELLE PROVINCE AUTONOME (2001) Studi di fattibilità delle opere pubbliche. Guida per la certificazione da parte dei nuclei regionali di valutazione e verifica degli investimenti pubblici.
- CROPPER, M.; AYDEDE, S. Y PORTNEY, P. (1992) Rates of time preference for saving lives, *American Economic Review (Papers and Proceedings)*, 82(2), pp. 469-472.
- CRUZ, S. (1997) Operaciones entre leyes financieras, *Cuadernos Aragoneses de Economía*, 7(2), pp. 445-454.
- DASGUPTA, A. Y PEARCE, D. (1974) *Cost-Benefit Analysis: Theory and Practice* (London, Macmillan Student Editions).
- ECKSTEIN, O. (1957) Investment criteria for economic development and the theory of intertemporal welfare economics, *Quarterly Journal of Economics*, 71(1), pp. 56-85.
- FIELD, B. (1995) *Economía ambiental: una introducción* (Madrid, McGraw-Hill).

- FISHER, I. (1930) *The Theory of Interest* (London: Macmillan).
- GREEN, L. Y MYERSON, J. (1996) Exponential versus hyperbolic discounting of delayed outcomes: risk and waiting time, *American Zoologist*, 36, pp. 496-505.
- GROSS, A. Y CLARK, V. (1975) *Survival distributions: reliability applications in the biomedical sciences* (New York, Wiley).
- HARVEY, C. (1986) Value functions for infinite-period planning, *Management Science*, XXXII, pp. 1123-1139.
- HARVEY, C. (1994) The reasonableness of non-constant discounting, *Journal of Public Economics*, 53(1), pp. 31-51.
- HARVEY, C. (1995) Proportional discounting of future costs and benefits, *Mathematics of operations research*, 20(2), pp. 381-399.
- HENDERSON, P. (1968) *Investment Criteria for Public Enterprises*, in: R. Turvey (ed.) *Public Enterprise* (Harmondsworth, Penguin Books).
- HENDERSON, N. Y LANGFORD, I. (1998): "Cross-disciplinary evidence for hyperbolic social discount rates". *Management Science*, 44(11), pp. 1493-1500.
- HER MAJESTY TREASURY (1997) *Appraisal and Evaluation in Central Government. The Green Book*.
- HER MAJESTY TREASURY (2003) *Appraisal and Evaluation in Central Government. The Green Book*.
- HERRNSTEIN, R. J. (1981) Self-control as response strength, in C.M. Bradshaw, E. Szabadi and C.F. Lowe (eds.) *Quantification of Steady-State Operant Behavior* (Amsterdam, Elsevier/North-Holland).
- KULA, E. (1984) Derivation of social time preference rates for the United States and Canada, *The Quarterly Journal of Economics*, XCIX(4), pp. 873-882.
- KULA, E. (1985) An empirical investigation on the social time-preference rate for the United Kingdom, *Environment and Planning*, 17, pp. 199-212.
- LAFUENTE, M. Y SÁNCHEZ, I. (1997) Valoraciones financieras a muy largo plazo en A. Alegre, A. Biayna y A. Rodríguez (eds.) *Matemática de las Operaciones Financieras* (Publicacions de la Universitat de Barcelona), pp. 111-125.
- LOEWENSTEIN, G. Y PRELEC, D. (1992) Anomalies in intertemporal choice: evidence and interpretation, *The Quarterly Journal of Economics*, CVII (2), pp. 575-597.
- MAZUR, J. (1987) An adjustment procedure for studying delayed reinforcement, in M. Commons, J. Mazur, J. Nevins y H. Rachlin (eds.) *Quantitative analyses of behavior: The effect of delay and of intervening events on reinforcement value*, Chapter 2 (Hillsdale, NJ, Erlbaum).

- MINISTERIO DE FOMENTO (1997) Estudio informativo del cuarto cinturón de Barcelona tramo Abrera-Terrasa.
- MINISTERIO DE TRANSPORTES, TURISMO Y COMUNICACIONES (1991) Manual de evaluación de inversiones en ferrocarriles de vía ancha. Anexo I.
- MYERSON, J. Y GREEN, L. (1995) Discounting of delayed rewards: Models of individual choice, *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 64, pp. 263-276.
- NIR, A. (2000) An explanation of hyperbolic marginal utility from money, School of Economics, Tel Aviv University (working paper).
- OFFICE OF MANAGEMENT AND BUDGET OF UNITED STATES (1992) Circular A94: Guidelines and Discount Rates for Benefit-Cost Analysis of Federal Programs.
- OFFICE OF MANAGEMENT AND BUDGET OF UNITED STATES (2002) Guidelines and Discount Rates for Benefit-Cost Analysis of Federal Programs (Revision of Circular A94).
- PRELEC, D. (1989) Decreasing impatience: Definition and consequences, Harvard Business School (working paper).
- PRICE, C. (1988) Investment, Reinvestment, and the Social Discount Rate for Forestry, *Forest Ecology and Management*, 24, pp. 293-310.
- QUINET, E. (2000) Evaluation methodologies of transportation projects in France, *Transport Policy*, 7, pp. 27-34.
- SOZOU, P. (1998) On hyperbolic discounting and uncertain rates, *The Royal Society*, 265, pp. 2015-2020.
- SOZOU, P. (2003) Augmented discounting: interaction between ageing and time-preference behaviour, *The Royal Society*, 270, pp. 1047-1053.
- THALER, R. (1981) Some empirical evidence on dynamic inconsistency, *Economic Letters*, 8, pp. 201-207.
- WEITZMAN, M. (2001) Gamma discounting. *American Economic Review*, 91(1), pp. 260-271.
- Consultas a las páginas web:
- <http://www.incendiosforestales.org>
- <http://www.juntadeandalucia.es/medioambiente>
- <http://www.mma.es>