

Aplicabilidad del test BDS al análisis de series económicas

MATILLA-GARCÍA, M.* y RODRÍGUEZ RUIZ, J.**

Facultad de CC Económicas UNED. Dpto. Economía Aplicada Cuantitativa I

Calle Senda del Rey 11. CP 28040, Madrid. *E-mail: mmatilla@cee.uned.es;

**E-mail: julian21@cee.uned.es

RESUMEN

El test BDS de Brock, Dechert y Scheinkman es un test asintótico que proporciona una herramienta no paramétrica para contrastar la hipótesis nula de series i.i.d., con potencia, en teoría, sobre todas las alternativas restantes (lineales o no lineales, estocásticas o deterministas). Una versión del BDS ha sido implementada en E-views, motivo por el que la herramienta está ganando difusión dentro del análisis econométrico. Desafortunadamente, con anterioridad a esta reciente implementación y aun en la actualidad, se han observado ciertas deficiencias en la potencia y tamaño del test para muestras finitas; la sensibilidad del test ante ciertos parámetros del mismo y en el modo de evaluar los resultados; etc. Estas deficiencias, y otras nuevas, son expuestas y analizadas ofreciendo explicaciones cuando esto es posible.

Palabras Clave: BDS, Caos y No-linealidad.

Applicability of the test to economic time series analysis

ABSTRACT

The BDS test (Brock, Dechert and Sheinkman) is an asymptotic test that provided a nonparametric tool for testing the null of i.i.d, with power against a broad class of alternative hypothesis (linear or nonlinear, stochastic or deterministic). Recently, a new version of BDS test has been implemented on E-views, hence the tool will be widely disseminated among econometricians. Unfortunately, certain limitations have been detected for BDS test. This limitations refer to: size and power of the test, sensitivity with respect to free parameters and the evaluation process of the obtained results. All these deficiencies are deeply commented in this paper.

Keyword: BDS, chaos, nonlinearity.

Clasificación JEL: C12, C15, C22

Artículo recibido en julio de 2004 y aprobado en junio de 2005.

Artículo disponible en versión Electrónica en la página www.revista-eea.net, ref.: E-23208.

1. INTRODUCCIÓN: ELEMENTOS BÁSICOS DEL TEST BDS

El interés por el comportamiento caótico consiste en que potencialmente los movimientos financieros que parecen aleatorios podrían ser explicados. Motivo suficiente por el que sería deseable poder comprobar si esto es así. El interés sería mayor cuanto menor fuera el grado de caoticidad (esto es cuanto menos complejo fuera el sistema, ya que de otro modo no se podrían distinguir usando un número finito de datos entre lo que es caos y aleatoriedad). Con la pretensión de poder diferenciar entre una y otra posibilidad se han venido desarrollando técnicas derivadas de la teoría de los sistemas dinámicos deterministas, en particular de los no lineales.

Los resultados fundamentales parten del procedimiento ofrecido por Grassberger y Procaccia (1983). El proceso consiste en organizar los datos en m -

$x_t^m \equiv \{x_t, x_{t-\tau}, x_{t-2\tau}, \dots, x_{t-(m-1)\tau}\}$, donde al parámetro m se denomina dimensión de inmersión, y es conocido como el *tiempo de desfase*. Es habitual, en economía escoger $\tau=1$, si bien los motivos no quedan claramente desarrollados. Seguidamente, se calcula la fracción de pares de m -historias que se encuentran cercanas una de otra: Para ello se elige número ε , y se define que dos m -historias están próximas si la mayor diferencia (en valor absoluto) entre los elementos que forman estas dos historias es inferior a ε . Para lo cual se toma una función indicadora de este hecho: $H_\varepsilon(x_i^m, x_j^m)$ toma el valor 1 si las dos observaciones (m dimensionales), j -ésima e i -ésima de las serie están dentro de la distancia ε , en caso contrario tomaría valor 0, esto es:

$$H_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_i^m - x_j^m| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases},$$

donde $|\cdot|$ es la norma del máximo.

Se define $C_{m,N}(\varepsilon)$ como la fracción de pares de historias que están cercanas, en el sentido de que para una muestra de N observaciones resultaría que

$$C_{m,N}(\varepsilon) \equiv \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} H_\varepsilon(x_{s+j}, x_{t+j}).$$

La *integral de correlación* $C_m(\varepsilon)$ es el límite de esta fracción cuando el tamaño muestral aumenta.

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_{m,N}(\varepsilon)$$

Una forma de entender esta expresión es interpretándola como la probabilidad de que dos pares de m -historias escogidas al azar estén próximas (nótese que el concepto de proximidad viene determinado por el parámetro de elección ε).

El test BDS se fundamenta precisamente en el concepto de *integral de correlación*. Sin embargo la hipótesis nula del test no es que la serie sea caótica, sino que una determinada serie temporal $\{x_t : t = 1, \dots, N\}$ sea Independiente e Idénticamente Distribuida (i.e, i.i.d.), frente a la alternativa de no ser i.i.d.

Consideremos que $\{x_t\}$ es una serie temporal compuesta por un número finito de observaciones que siguen *alguna* función de distribución F :

$$x \square F \quad (1)$$

Elijamos una distancia ε de modo que:

$$0 < \varepsilon < \max(x) - \min(x) \quad (2)$$

Dadas dos observaciones x_i y x_j , consideremos la probabilidad de que no disten entre sí más de ε :

$$P_1 \equiv \left(P \left| x_i - x_j \right| \leq \varepsilon \right), i \neq j, i, j \in \mathbf{N} \quad (3)$$

Una relación similar en dimensión dos puede ser definida para cualesquiera dos observaciones y las respectivas que las preceden inmediatamente. En este caso la probabilidad de “cercanía” puede considerarse como la probabilidad de que dos observaciones estén “próximas” una de la otra, así como que sus dos predecesoras estén también cerca una de la otra, es decir:

$$P_2 \equiv \left(P \left| x_i - x_j \right| \leq \varepsilon, \left| x_{i-1} - x_{j-1} \right| \leq \varepsilon \right), i \neq j, i, j \in \mathbf{N} \quad (4)$$

Ambas probabilidades (3) y (4) son distintas, sin embargo bajo la hipótesis nula del BDS, si la serie temporal es i.i.d., entonces podemos establecer una relación entre las dos: la probabilidad de que una observación de dos historias esté “cerca” es igual al cuadrado de la probabilidad de que dos observaciones estén “cerca”:

$$P_2 = P_1^2, \text{ si } x \square F(i.i.d.) \quad (5)$$

Esta relación de potencia es generalizable para cualquier dimensión, de modo que el test BDS para una dimensión m se convierte en un test de la hipótesis nula de que las probabilidades para la dimensión 1 y m sean iguales:

$$H_0 : P_m = P_1^m ; H_a : P_m \neq P_1^m \quad (6)$$

Este test sobre la hipótesis nula es casi equivalente a un test de i.i.d. contra todas las otras posibles alternativas:

$$H_0 : x \square F(i.i.d) \quad (7)$$

Esta probabilidad es la que recoge el concepto de integral de correlación de Grassberger-Procaccia, y por tanto, se plantea que bajo dicha hipótesis se verificaría lo siguiente:

$$C_m(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^m.$$

Una forma de entender este resultado consiste en comprobar que el ratio $C_{m+1}(\varepsilon)/C_m(\varepsilon)$ puede ser perfectamente interpretado como la probabilidad condicional:

$$\frac{C_{m+1}(\varepsilon)}{C_m(\varepsilon)} = \Pr \left(|x_{s-i} - x_{t-i}| < \varepsilon / |x_{s-i} - x_{t-i}| < \varepsilon \right) = \Pr \left(|x_s - x_t| < \varepsilon / |x_{s-i} - x_{t-i}| < \varepsilon \right)$$

es decir, $C_{m+1}(\varepsilon)/C_m(\varepsilon)$ es la probabilidad de que dos puntos estén “próximos”, dado que los justamente anteriores estaban “cerca”. En caso de que los datos sean i.i.d. (H_0) este cociente debe ser igual a la probabilidad incondicionada de que dos puntos estén cerca, esto es, $C_1(\varepsilon)$.

Se puede demostrar (Brock, 1996), que dado que la integral de correlación es un estadístico U generalizado (ver Serfling 1980), el estadístico BDS para una dimensión de inmersión m y para una distancia ε es un estimador consistente sobre un número N de observaciones y viene dado por:

$$w_{m,N}(\varepsilon) = \sqrt{N-m+1} \frac{c_{m,N}(\varepsilon) - c_{1,N-m+1}(\varepsilon)^m}{\sigma_{m,N-m+1}(\varepsilon)}$$

que tiene una distribución límite normal, y cuyo denominador es la estimación del error estándar asintótico de $c_{m,N}(\varepsilon) - c_{1,N-m+1}(\varepsilon)^m$. Nos referimos al estadístico $w_{m,N}(\varepsilon)$ como estadístico BDS.

II. DEFICIENCIAS DEL TEST BDS

El tipo de deficiencias a las que haremos referencia son relativas: al tamaño del test BDS, esto es a la dificultad de éste para no aceptar la hipótesis nula cuando ésta es cierta (apartado II.1); a la potencia, es decir, la capacidad del BDS para rechazar la

hipótesis nula cuando esta es falsa (apartado II.2); y relativas al propio uso del test en el marco de las series económico-financieras (apartado II.3).

II.1. El Tamaño del test BDS para muestras finitas

Los principales estudios en este sentido son Hsieh (1991), Brock et al (1996), Liu et al (1993) y Kanzler (1999). La idea consiste en que dado que el test BDS es asintótico sería aconsejable saber con qué grado la distribución muestral aproxima el comportamiento asintótico. Para analizar este grado se diseñan experimentos de Monte Carlo, de manera que para un nivel de significación del 5%, por ejemplo, el test BDS debería rechazar (no aceptar) el cinco por ciento de las simulaciones (réplicas i.i.d.).

Inicialmente, esto supone que hay que generar réplicas i.i.d. (verdaderas hipótesis nulas), sin embargo, ha sido probado que el test BDS tiene bastante potencia para detectar cualquier tipo de dependencia (Brock et al, 1996), por lo cual es preciso tomar bastantes precauciones para generar estos números pseudo aleatorios ya que de lo contrario, dada la potencia del test en cuestión, podría ser detectado, lo que tendría un efecto no deseado en la estimación de las propiedades muestrales¹.

El trabajo más intensivo en este sentido es el de Kanzler (1999) ya que, aparte del método de generar la hipótesis nula, incorpora mayor gama de simulaciones en lo que se refiere a la elección de la distancia (ε / σ) así como respecto a las dimensiones de abarcamiento (m), además de estudiar las propiedades para tamaños muestrales de 50, 100, 250, 500, 750 y 1000, para las cuales genera 25.000 muestras de cada una².

Los resultados más significativos resaltan que (i) cuanto menor sea la dimensión (m) mejores serán las propiedades de las muestras pequeñas, cualquiera que sea el tamaño muestral N y la distancia ε / σ ; (ii) aumentar el tamaño muestral siempre mejora la propiedades de la muestra pequeña, cualquiera que sea la dimensión y la distancia; y (iii) la variación de la distancia ε / σ modifica drásticamente la forma de la distribución, siendo poco evidente cuál es el valor de la distancia que ofrece en general mejores propiedades. Lógicamente, el uso de la distribución estándar para la aplicación del BDS en este tipo de muestras impone, por lo tanto, que será ésta la distribución conveniente cuando el error del tamaño del estadístico BDS respecto de la normal sea despreciable. Sin embargo, encontrar los parámetros que permiten tal

1. Kanzler (1999) propone un método fundamentado en el uso de un sofisticado generador de números aleatorios elaborado por Moler (1995) para obtener una distribución uniforme de números aleatorios (pseudo), y posteriormente transformarlos, mediante la técnica de "zigurat" (Marsaglia 1984) en una distribución normal.

2. En la mayoría de los casos la dimensión de inmersión abarca de 2 a 19, y la distancia ε es definida en fracciones respecto de la desviación estándar de cada serie pseudo aleatoria.

característica puede resultar difícil, y en ese caso sería preciso, o bien utilizar tablas correctamente tabuladas (apéndice B de Kanzler 1999), o conducir técnicas de bootstrapping.

Por lo que se refiere a la elección de la distancia (ε / σ) conviene resaltar que las distribuciones son próximas, en general, a la $N(0,1)$ para ($\varepsilon / \sigma = 1.5$) para dimensiones bajas, y para ($\varepsilon / \sigma = 2.0$) dimensiones altas³.

Finalmente, señalar que Rothman (1993) ha estudiado la velocidad de convergencia del test BDS, respecto de la velocidad de otros test de i.i.d, y concluye que estos métodos alternativos mejoran, en general, la velocidad de convergencia a su distribución normal.

II.2 Potencia del test BDS

Las principales referencias donde encontrar este tipo de análisis son Brock et al (1996), Hsieh (1991), Campbell et al. (1997), Liu et al (1993) y Barnett et al. (1997). En este caso se procura medir la capacidad del test BDS para detectar series no-i.i.d. Es decir, la posibilidad de que el test rechace la H_0 cuando ésta es falsa. Para ello es imprescindible eliminar, conforme al proceso de identificación de Box-Jenkins, cualquier tipo de dependencia lineal. Ahora bien, el tipo de dependencia que el investigador detecte será, supuestamente, no lineal, y por tanto, o bien caótica o bien estocástica.

El análisis no lineal de series temporales se ha caracterizado, en su mayoría, por considerar que los shocks son i.i.d. La pretensión general de este análisis es la posibilidad de encontrar una función (no lineal) que relacione la serie $\{x_t\}$ con la historia de shocks:

$$x_t = f(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots)$$

3. Los motivos que pueden explicar este comportamiento son los siguientes: (a) De acuerdo a la estimación de Kanzler de $C_{1,N}$ para una muestra de 100 observaciones distribuidas normalmente, y una distancia de ($\varepsilon / \sigma = 0.5$), un 27 por ciento de las observaciones estarán "cerca". Si la H_0 es cierta es esperable que $(0.27)^2 = 7$ por ciento de historias de dimensión 2 estén "cerca", y así sucesivamente. Además, a mayor m , menor será el número de m -historias posibles de formar. Por tanto es lógico pensar que a medida que el número de m -historias "cercanas" disminuye peor será la fiabilidad con que las integrales de correlación para altas dimensiones serán estimadas. Por lo que, disminuir ε , reducir N e incrementar m produce que el número de m -historias se reduzca sensiblemente, perjudicando la estimación de $C_{m,N}$, y en consecuencia la del BDS. (b) Cuanto menor sea ε , menor será el número esperado de m -historias "cercanas", y mayor será la probabilidad de no encontrar una sola historia "cerca"; sin embargo, la esperanza de encontrar dos observaciones (1-historia) "cercanas" es mayor. Por todo lo cual, cuanto mayor sea la distancia, mayor sea m y mayor N , el número de m -historias "cercanas" aumentará, mejorando en consecuencia la fiabilidad del BDS. Para muestras cada vez mayores, los efectos comentados son insignificantes.

siendo estos shocks de media cero y varianza unitaria. La generalidad de esta expresión dificulta en la práctica su maleabilidad. Por ello se suele utilizar una función mucho más restrictiva como

$$x_t = g(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots) + \varepsilon_t h(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$$

La función $g(L\cdot)$ representa la media de x_t condicionada a la información pasada, dado que $E_{t-1}[x_t] = g(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$. Por otra parte, se observa que la variable objetivo es proporcional al shock, siendo $h(L\cdot)$ el coeficiente de proporcionalidad. El cuadrado de esta última función es precisamente la varianza de x_t condicionada a la información pasada. Los modelos con $g(L\cdot)$ no lineal se denominan *no-lineales en media* $h(L\cdot)^2$, mientras que aquellos con $h(L\cdot)$ no lineal se denominan *no-lineales en varianza*. Esta norma de clasificación es útil para la adecuada referencia a la literatura al respecto, de hecho, los modelos que se muestran a continuación son perfectamente clasificables en modelos no lineales en media o en varianza.

Los diferentes trabajos relativos a estos modelos no son coincidentes, en general, en las conclusiones dado que, pese a la proximidad de los modelos analizados (ver por ejemplo Barnett (1997)⁴ y Hsieh (1991)) no son comparables al utilizar tanto tamaños muestrales distintos, y distancias (radio épsilon) diferentes.

Los modelos generalmente analizados se pueden clasificar de acuerdo al método señalado anteriormente, los más utilizados han sido los siguientes:

Modelos con dependencia lineal:

AR1: $x_t = 0.5x_{t-1} + u_t$ 1000 datos (Hsieh, 1991)

MA1: $x_t = 0.5u_{t-1} + u_t$ 1000 datos (Hsieh 1991)

ARMA: $x_t = 0.8x_{t-1} + 0.15x_{t-2} + u_t + 0.3u_{t-1}$, con $x_0 = 1, x_1 = 0.7$
380 y 2000 datos (Barnett et al. 1997)

Modelos no estrictamente estacionarios⁵:

2-mean: 500 primeras observaciones media -1 varianza 1, siguientes 500 media +1, varianza 1 (Hsieh, 1991)

2-variance: 500 primeras observaciones media 0, varianza 1, siguientes 500 media 0, varianza 2. (Hsieh, 1991)

Modelos no lineales sin autocorrelación pero con medias condicionadas distintas

4. Este documento no realiza simulaciones de Monte Carlo, simplemente analiza la serie. En cambio, el trabajo de Hsieh sí lo hace para 2000 réplicas de estos procesos, sucede lo mismo con las referencias a Brock, 1996. Tanto Brock 1996, como Barnett 1997, consideran que la distancia épsilon es la mitad de la desviación típica, mientras que Hsieh considerad diferentes radios.

5. Para ambos los datos son i.i.d.

de cero:

Media móvil no lineal:

$$x_t = u_t + 0.5u_{t-1} \cdot u_{t-2} \quad \begin{array}{ll} 1000 \text{ datos;} & (\text{Brock } 1996) \\ & (\text{Hsieh, } 1991) \end{array}$$

$$x_t = u_t + 0.8u_{t-1} \cdot u_{t-2} \quad \begin{array}{ll} 380/2000 \text{ datos} & \\ & (\text{Barnett } 1997) \end{array}$$

TAR:

$$\begin{cases} x_t = -0.4x_{t-1} + u_t & \text{si } x_{t-1} < 1 \\ x_t = 0.5x_{t-1} + u_t & \text{si } x_{t-1} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} 1000 \text{ datos} & (\text{Hsieh } 1991) \end{array}$$

$$\begin{cases} x_t = -0.5x_{t-1} + u_t & \text{si } x_{t-1} \leq 1 \\ x_t = 0.4x_{t-1} + u_t & \text{si } x_{t-1} > 1 \end{cases} \quad (\text{Brock, } 1996)$$

Modelos no lineales sin autocorrelación pero con medias condicionadas nulas:

ARCH:

$$x_t = \sigma_t u_t, \quad \sigma_t^2 = 1 + 0.5x_{t-1}^2 \quad \begin{array}{ll} 1000 \text{ datos} & (\text{Hsieh, } 1991) \end{array}$$

$$x_t = \sigma_t u_t, \quad \sigma_t^2 = 1 + 0.1x_{t-1}^2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 \quad \begin{array}{ll} 380/1000 & (\text{Barnett, } 1997) \\ & (\text{Brock, } 1996) \end{array}$$

GARCH:

$$x_t = \sigma_t u_t, \quad \sigma_t^2 = 1 + 0.1x_{t-1}^2 + 0.8\sigma_{t-1}^2 \quad \begin{array}{ll} 1000 \text{ datos} & (\text{Hsieh, } 1991) \\ 380/2000 & (\text{Barnett, } 1997) \\ & (\text{Brock, } 1996) \end{array}$$

EGARCH:

$$x_t = \sigma_t u_t, \quad \log \sigma_t^2 = 1 + 0.1 \left| x_{t-1} / \sigma_{t-1} \right| + 0.8 \log \sigma_{t-1}^2 + 0.1 x_{t-1} / \sigma_{t-1} \quad \begin{array}{ll} 1000 \text{ datos} & (\text{Hsieh, } 1991) \end{array}$$

Modelos caóticos (deterministas):

Feigenbaum:

$$x_t = 3.57x_{t-1}(1 - x_{t-1}), \text{ con } x_0 = 0.7 \quad \begin{array}{ll} 380/1000 & (\text{Barnett } 1997) \end{array}$$

Mackey-Glass:

$$\dot{x}_t = \frac{0.2x_{t-100}}{1 + x_{t-100}^2} - 0.1x_t \quad (\text{Hsieh, } 1991)$$

Los resultados, en general, advierten de dos cuestiones: (a) El test BDS tiene dificultades para detectar la no linealidad de las series EGARCH, incluso para tamaños muestrales de 1000. El resto de los casos los modelos son detectados. (b) En caso de muestras pequeñas, como por ejemplo las estudiadas por Barnett (1997), encuentra problemas en la detección de modelos estocásticos sin autocorrelación y con media condicional nula (GARCH y ARCH)⁶.

Recientemente (Matilla et al. 2001) han mostrado que incluso series enteramente deterministas, tales como las generadas con la dinámica determinista de Anosov, resultan de acuerdo a los resultados del test, ser aceptadas como i.i.d. La dinámica de Anosov se define del siguiente modo:

$$\begin{aligned}x_t &= x_{t-1} + y_{t-1} \mod 1 \\y_t &= x_{t-1} + 2y_{t-1} \mod 1\end{aligned}$$

Cabe mencionar ahora otras pruebas relativas al tamaño del test BDS que son realizadas con el fin contrastar si tras un filtrado lineal, los residuos resultantes modifican la distribución muestral del test⁷. Los resultados de Hsieh (1991) muestran que la distribución muestral se aproxima a la asintótica en la misma medida que lo hacía anteriormente para los residuos de los modelos AR(1), MA(1) y NMA, sin embargo, los residuos de los modelos GARCH y EGARCH son rechazados con poca frecuencia, si bien tan sólo considera en el análisis los resultados para una dimensión de inmersión de 2.

II.3 Deficiencias teórico-prácticas, y la aplicabilidad a series financieras.

Por lo que se refiere a las deficiencias de carácter teórico y práctico cabe señalar lo siguiente:

6. Liu et al (1993) manifiestan que el modelo Non Linear Sign especificado como

$$\begin{aligned}x_t &= SIGN(x_{t-1}) + u_t \text{ tal que} \\SIGN(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

resulta ser rechazado con escasa frecuencia. Conviene matizar que la elección del radio en este caso es un tanto arbitraria dado que no se contempla el radio en función de la desviación típica de las muestras estudiadas. El tamaño muestral es de tan sólo 200 observaciones.

7. El teorema de Brock (1988) manifiesta que la integral de correlación tanto de la serie original como la de residuo debe ser igual; así mismo, la distribución asintótica del BDS utilizando los residuos no varía tampoco. Por tanto, lo que en este caso se somete a experimentación es el residuo del mejor ajuste lineal.

En ningún caso el test BDS puede ser calificado como test de caos, sino que a lo más (esto es, cuando lo que se analizan son los residuos y se confía en que toda la parte lineal ha sido eliminada) es un test de no linealidad, tanto estocástica (alta dimensión) como caótica (baja dimensión). La discriminación entre una y otra requiere el uso de otras técnicas (Exponentes de Lyapunov, plots de recurrencia, convergencia del exponente de correlación, etc.)

Al menos en la aplicación que Barnett et al (1997) hacen del test BDS, consideran que este es un test de una sola cola (one-sided test). Sin embargo, la hipótesis nula (H_0) del test es que la serie sea i.i.d., mientras que la alternativa (H_a) es que no lo sea (y por tanto la hipótesis alternativa adopta la forma de hipótesis compuesta bilateral). Dado que el test tiene una distribución asintótica $N(0,1)$ esto significaría que el 50 por ciento de las veces el resultado del estadístico sería negativo si la hipótesis nula fuera cierta, lo que sería consistente con los resultados ofrecidos por Kanzler (1999). Para realizar un test de una sola cola sería preciso contar con una hipótesis alternativa caracterizada por un signo positivo o negativo del estadístico BDS. La cuestión es cómo obtener información que permita elaborar una H_a más concreta que la actual. Creemos que se tendría que obtener información sobre el tamaño de $C_{m,N}$; ahora bien, esto tal vez sólo se podría hacer con test caóticos que igualmente incorporaran $C_{m,N}$; sin embargo, esta intuición arroja resultados poco concluyentes (ver Ramsey 1990 y Eckmann y Ruelle 1992).

El concepto de integral de correlación de Grassberger-Procaccia contempla un parámetro adicional (tiempo de desfase en que se observa el sistema para una variable y que influye en la conformación de las m -historias). En Barnett et al (1997) en la nota #19 se hace referencia a los parámetros del test BDS, basado en el concepto de integral de correlación, apuntando que por convenio se adopta como desfase la unidad. Este punto no es justificado a lo largo de la literatura al respecto, dando origen a la posibilidad de que tal vez, al igual que los parámetros distancia épsilon y dimensión de abarcamiento m , ésta pueda determinar significativamente los resultados del test. Recientemente, esta cuestión ha sido tratada en profundidad en los trabajos de Matilla et al (2004 y 2005) en los que, tras evidenciarse la sensibilidad respecto al tiempo de desfase, se elabora un nuevo estadístico (BDSG) que generaliza al BDS convencional haciendo de este último un caso particular.

Por lo que se refiere a la aplicabilidad al estudio de series financieras caben hacer las siguientes consideraciones:

La aplicación de técnicas caóticas requiere en general un número generoso de observaciones, evidentemente esto hace que en Economía su uso haya sido prominente en series financieras. Sin embargo, conviene deshacer posibles “ilusiones” respecto al hecho de que en la actualidad se cuentan con datos (tick by tick). Nos referimos al hecho de que este tipo de datos suele capturar dependencias causadas por la microestructura del mercado, tales como ejecución en serie de “órdenes” que están dadas para un precio límite, de modo que dicha ejecución, por parte de un especialis-

ta, se realiza conforme el precio se va aproximando a dicho límite. Este tipo de dependencias, que bien podrían clasificarse de artificiales o técnicas, serían capturadas por cualquier test de dinámica no lineal. Ante esto el investigador puede ampliar el intervalo de la muestra, y por lo tanto, para obtener las deseadas series (largas) se ve obligado a introducir historias más largas, esto es, más dilatadas en el tiempo. Esta última apreciación implica el siguiente problema (dependiente del tipo de enfoque científico del investigador): A medida que la serie histórica se remonta más hacia el pasado temporal, la no-estacionariedad es más plausible; mientras que si opta por una serie corta se encuentra con el problema anteriormente señalado.

El hecho de encontrar (tal y como está comprobado para diferentes series de rendimientos financieros, ver, por ejemplo, Hsieh 1991) que los rendimientos no son I.I.D., no contradice necesariamente la hipótesis de mercados eficientes. Precisamente porque el rechazo de i.i.d. no es evidencia suficiente de caos en el mercado de acciones: aún quedan las posibilidades de que este resultado (rechazo) sea compatible con cambios de régimen (tanto en media como varianza); con rendimientos generados por procesos estocásticos no lineales; y, finalmente, compatible con proceso caóticos de baja dimensión. Otro tipo de herramientas serían necesarias para poder discriminar entre las tres.

Cabe mencionar⁸, que con carácter general, se suele considerar que las series económicas arrastran una porción de ruido (errores de medida, por ejemplo) que contaminan la información básica. De este modo los datos observados vendrían formados como:

$$z_t = x_t + \sigma \varepsilon_t$$

donde x_t está generado por un sistema determinista caótico, y ε_t es ruido blanco gaussiano, con varianza σ^2 . Esto ha sido analizado fundamentalmente por Liu et al (1993). Los resultados muestran que la detección de caos determinista, para distintas proporciones de ruido en la serie analizada, sólo es realista (analizando el exponente de correlación o dimensión de correlación) cuando la contaminación de la serie es bastante baja.

Desde Pagan y Schewrt (1990) se suele considerar que los momentos (de orden superior) no condicionados no existen para las típicas series financieras de rendimientos. Algunos test competidores del BDS requieren de la existencia de estos momentos para obtener estimadores asintóticamente consistentes. Estos hechos incrementan la probabilidad, cuando son aplicados los test a series financieras, de rechazar espúreamente la hipótesis nula de estos test competidores del BDS. Sin embargo, el BDS no requiere condiciones sobre los momentos para establecer su distribución asintótica.

8. Notar que esta observación no afecta directamente al test BDS, sino al exponente de correlación.

III. CONCLUSIONES

La aplicabilidad del test asintótico BDS se encuentra limitada fundamentalmente por los resultados de la potencia y tamaño del mismo. La elección adecuada de los parámetros distancia entre historias, dimensión de abarcamiento, así como la disponibilidad (en ocasiones limitada) de observaciones, supone, en cualquier caso, alteraciones en los resultados del estadístico BDS, que pueden llevar a erróneas conclusiones respecto del carácter de la serie. Existen en la actualidad varios programas para ejecutar el referido test (véase, Belaire y Contreras, 2002)

BIBLIOGRAFÍA

- BARNETT, W. et al. 1997. *A single blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos*. Journal of econometrics. 82, 157-192.
- BELAIRE-FRANCH, J. y CONTRERAS, D. 2002. *How to compute the BDS test: A software comparison*. Journal of Applied Econometrics, 17, pp. 691-699.
- BROCK, W. y CHERA, D., 1988. *Is the business cycle charactericed by deterministic chaos?* Journal of Monetary Economics. July: 71-90.
- BROCK, W.A. DECHERT, W.D., SCHEINKMAN, J.A., y LEBARON, B., 1996. *A test for independence based on the Correlation Dimension*. Econometrics Review. 15: 197-235.
- CAMPBELL, J.Y, et al. 1997. *The econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- ECKMANN, J., RUELLE, D., 1992. *Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems*. Physica D. vol. 56, no. 4. pp. 1019-1031.
- GRASSBERGER, P. y PROCACCIA, I., 1983. *Measuring the strangeness of strange attractors*. Physica, 9D. 189-208.
- HSIEH, D. A., 1991. *Chaos and nonlinear dynamics: Application to financial markets*. Journal of Finance.46: 1839-1877.
- KANZLER, L., 1999. *Very fast and correctly sized estimation of the BDS statistic*. Department of Economics of Oxford University. <http://users.ox.ac.uk/~econlrk>
- LIU, T., GRANGER, C.W.J., HELLER, W.P., 1993. *Using the correlation exponent to decide whether an economic series is chaotic*. En Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics. Edts. Pesaran y Potter. John Wiley and Sons.
- MARSAGLIA, G. , TSANG, W. 1984. *A fast, easily implemented method for sampling from dicreasing or symmetric unimodal density functions*. SIAM Journal on scientific and statistical computing. vol 5, no. 2. Junio, pp. 349-359.
- MATILLA-GARCÍA, M, QUERALT, R., SANZ, P y VÁZQUEZ, F.J. 2004. *A generalized BDS Statistic*. Computational Economics. 24, pp. 277-300.

- MATILLA-GARCÍA, M, SANZ, P y VÁZQUEZ, F.J. 2005. *The BDS Test and Delay Time*. Applied Economics Letters, 12, pp.109-113.
- MOLER, C. 1995. Random thoughts: 10^{435} years is a very long time. Matlab News and Notes. Fall, pp. 12-13.
- PAGAN, A. SCHWERT, W. 1990. *Alternative methods for conditional stock volatility*. Journal of econometrics, no. 45, pp. 267-290.
- RAMSEY, J. et al. 1990. *The statistical properties of dimension calculations using small data sets: some economic applications*. International Economic Review. vol. 31. no.4 Noviembre.. pp.991-1020.
- ROTHMAN, P., 1993. *The comparative power of the TR test against simple threshold models*. En Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics. Edts. Pesaran y Potter. John Wiley and Sons.
- SERFLING, R.J., 1980. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons.