

La selección de carteras mediante programación por metas lexicográficas entera: una aplicación al mercado continuo español

PADILLA GARRIDO, NURIA (*) Y GUERRERO CASAS, FLOR MARÍA (**)

(*)*Departamento de Economía General y Estadística. Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad de Huelva.* (**) *Departamento de Economía y Empresa. Facultad de Ciencias Empresariales. Universidad Pablo de Olavide.*

(*) Plaza de la Merced, 11- 21002 Huelva, Telf.: 959017837 Fax: 959017828. E-mail: padilla@uhu.es

(**) Carretera de Utrera, Km. 1-41013 Sevilla. Telf.: 954349279 Fax: 954349204. E-mail: fguecas@dee.upo.es

RESUMEN

Desde el nacimiento de la Teoría de Carteras en 1952, hemos sido testigos de una amplia proliferación de modelos destinados a buscar la combinación de títulos más adecuada para cada tipo de inversor.

Sin embargo, la revisión de los mismos nos ha permitido descubrir que plantean serias dificultades en la resolución de este problema de inversión. Entre ellas podemos destacar las relacionadas con la metodología que utilizan, así como la consideración de la selección de carteras como un problema de carácter continuo.

Con el propósito de solventar estos inconvenientes, proponemos la construcción de un modelo alternativo utilizando una técnica multiobjetivo denominada Programación por Metas Lexicográficas Entera. Además, y con objeto de facilitar su comprensión al igual que demostrar su validez empírica, lo aplicaremos a un caso real que utiliza valores que cotizan en el mercado continuo español.

Palabras clave: Selección de Carteras, Decisión Multicriterio, Programación 0por Metas Lexicográficas Entera.

Integer lexicographic goal programming for portfolio selection: an application to the spanish permanent market

ABSTRACT

Since the birth of the Portfolio Theory in 1952, we have witnessed the appearance of numerous models aiming at identifying the best stock combination for every type of investor.

However, our review of these models shows that their use for resolving investing problems presents serious difficulties. We can highlight those related to the methodology used, and the fact that they deal with the portfolio as a continuous problem.

In order to solve these two shortcomings, we suggest an alternative model using a multiobjective technique called Integer Lexicographic Goal Programming. In addition, in order to facilitate understanding and demonstrate its empirical validity, we apply it to a real case using shares from the Spanish Permanent Market.

Keywords: Portfolio Selection, Multicriteria Decision, Integer Lexicographic Goal Programming.

Clasificación JEL: C61, G11.

Artículo recibido en marzo de 2003 y aceptado para su publicación en enero de 2005.

Artículo disponible en versión electrónica en la página www.revista-eea.net, ref.: E-23113

ISSN 1697-5731 (online) – ISSN 1133-3197 (print)

1. INTRODUCCIÓN

El problema de selección de carteras comienza a estudiarse después de la Segunda Guerra Mundial cuando el fuerte crecimiento económico y los cambios en la tecnología y en los mercados originan la necesidad de encontrar nuevos criterios sistemáticos de selección de inversiones.

A partir de ese momento, hemos sido testigos de una gran evolución con respecto al marco tradicional desarrollado por Markowitz y de una amplia proliferación de modelos que tratan de guiar al inversor en el reparto de su presupuesto entre distintas clases de activos.

Para lograr este propósito, lo normal es que estas teorías tengan en cuenta diversos criterios de inversión en función de los cuales evaluar la deseabilidad de cada alternativa. La cuestión radica en que como, normalmente, estos criterios suelen ser incompatibles entre sí, el decisor no encuentra una cartera óptima para todos ellos, sino un conjunto de combinaciones de títulos cada una de las cuales es la mejor elección para un criterio determinado pero no así para los restantes.

Ante este tipo de situaciones, la Programación Matemática tradicional se vuelve inoperativa y debe dar paso a nuevas herramientas que, como la Programación Multiobjetivo, traten de determinar qué cartera o carteras resultan las más convenientes para el conjunto de criterios considerados.

Dentro de la Programación Multiobjetivo, existen diferentes enfoques o metodologías que tratan la resolución de este tipo de problemas. De todas ellas, las más utilizadas en el campo de la selección de carteras han sido las denominadas Técnicas Generadoras del Conjunto Eficiente (Baumol (1963); Mao y Brewster (1974); Philippatos y Wilson (1974)), sin embargo, su puesta en práctica plantea serias desventajas cuando se emplean para resolver problemas de tamaño relativamente grande, entre las cuales destacan dificultades computacionales o la obtención de un conjunto eficiente con un gran número de puntos que puedan complicar, posteriormente, la elección final del sujeto decisor. Además, estas técnicas no permiten que el inversor pueda hacer explícitas desde un primer momento sus preferencias ni que, ante la existencia de objetivos incompatibles, pueda establecer unos niveles de aspiración para los mismos (Molina (2000)).

Estos inconvenientes son solventados, en cambio, por la Programación por Metas. Por ello, nuestro objetivo es construir un modelo mediante el empleo de esta técnica multiobjetivo.

La utilización de la Programación por Metas en el campo de la selección de carteras no es reciente, aunque se caracteriza por la escasa proliferación de estudios.

Las primeras aplicaciones, dentro de las cuales podemos destacar las realizadas por Lee y Lerro (1973), Kumar, Philippatos y Ezzell (1978) así como por Lee y Chesser (1980), se caracterizan por adaptar el marco tradicional de selección de carteras desarrollado por Markowitz así como el *CAPM* al contexto de la Programación por Metas.

Posteriormente, se fueron introduciendo una serie de novedades como la utilización, en un intento de adaptarse mejor a las preferencias del decisor, de modelos interactivos o incluso del *APT*, en lugar del *CAPM*, como teoría adecuada para valorar el riesgo (Tamiz, Hasham y Jones (1996)).

Por último, también destacan una serie de trabajos cuyo propósito fundamental consiste en orientar específicamente a los asesores financieros en la selección de las carteras de sus clientes (Levary y Avery (1984); Schniederjans, Zorn y Johnson (1993); Powell y Premachandra (1998)).

Tomando en consideración lo anterior, nuestro propósito consiste en plantear un modelo mediante Programación por Metas, quizás no tan sofisticado ni tan específico como los anteriores, pero que recoja facetas tan básicas para este tipo de inversiones como puedan ser la búsqueda de una cartera no dominada por otras, la consideración de los costes asociados o las ventajas que se obtienen de la diversificación.

De este modo, nuestro deseo es que el modelo sirva como un patrón que dé respuesta a las necesidades fundamentales de los inversores que deciden acceder directamente a bolsa pero que, a la vez, goce de la suficiente flexibilidad como para poder adaptarse a las preferencias personales de éstos.

Pero, además de este objetivo, nos gustaría también que reflejara una importante cuestión que aún no ha sido debidamente tratada a lo largo de la literatura financiera. En este sentido, sabemos que, tradicionalmente, la selección de carteras ha sido enfocada como un problema continuo en el cual había que buscar el porcentaje a invertir en cada título. Sin embargo, en este planteamiento no se tenía en cuenta el hecho de que, cuando dichos porcentajes se convirtiesen en números de títulos a adquirir, podrían aparecer cantidades no enteras y, por tanto, carentes de sentido.

Aunque esta dificultad se ha tratado de subsanar en la práctica redondeando las cantidades obtenidas, esta forma de actuar no es aconsejable ya que podemos obtener tanto soluciones no factibles como soluciones factibles no óptimas. Nosotros, en cambio, proponemos solventar este inconveniente considerando como variables de decisión, en lugar de los porcentajes de inversión, el número de títulos a adquirir de cada activo. El problema se transformaría, así, en uno de carácter entero y, aunque su complejidad aumentaría, esto no representaría un serio obstáculo en la práctica debido al desarrollo de la capacidad de cálculo que han experimentado los ordenadores personales en los últimos años.

Teniendo en cuenta todas estas consideraciones, proponemos dar respuesta a esta nueva visión del problema de selección de carteras mediante la utilización de alguna técnica encuadrada dentro de la Programación por Metas Entera. Nosotros, concretamente, hemos empleado la denominada Programación por Metas Lexicográficas Entera, la cual intenta representar una estructura de preferencias en la cual el sujeto decisor considera mucho más importante el logro de los niveles de aspiración asociados a determinados criterios que la consecución de los relacionados con el resto (Molina (2000)).

De este modo, una vez descrita su metodología y planteado el modelo en función de ella, nuestro objetivo será ponerlo en práctica mediante una aplicación real que nos permita probar su validez empírica.

2. LA PROGRAMACIÓN POR METAS LEXICOGRÁFICAS ENTERA

La Programación por Metas Lexicográficas Entera es una técnica multiobjetivo cuya finalidad consiste en la búsqueda de soluciones satisfactorias de carácter entero.

Para alcanzar este objetivo, propone ordenar las q metas del problema en s niveles de prioridad en función de las preferencias del sujeto decisor. Con ello, cada meta puede quedar asignada a un nivel de prioridad distinto, o bien, varias pueden aparecer en el mismo nivel, en cuyo caso será necesario establecer una ponderación entre las mismas.

Esto implica que el decisor asociará prioridades excluyentes a las distintas metas, es decir, intentará primero satisfacer aquellas metas situadas en el nivel de prioridad más alto, en caso de conseguirlo, intentará satisfacer las situadas en el siguiente nivel de prioridad y así sucesivamente.

Todo ello se traduce en la resolución de un problema como el siguiente:

$$\text{Lexmin } (H_1(n,p), H_2(n,p), \dots, H_s(n,p))$$

s.a.

$$x \in X = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : Ax \leq b; A \in M_{s \times n}(\mathfrak{R}), b \in \mathfrak{R}^s \right\}$$

$$f_i(x) + n_i - p_i = u_i \quad i=1, \dots, q$$

$$n_i, p_i \geq 0$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$x_t = 0, 1, 2, \dots \quad \forall t \in \theta$$

cuya finalidad consiste en la minimización lexicográfica u ordenada de las componentes del vector $(H_1(n,p), H_2(n,p), \dots, H_s(n,p))$ sujeta al conjunto de metas y restricciones establecidas, siendo:

$H_i(n,p) \rightarrow$ Función de logro del nivel de prioridad i -ésimo, la cual se define como:

$H_i(n,p) = \sum_{j=1}^q w_j^i \cdot h_j(n,p)$, donde w_j^i representa la importancia relativa que el decisor otorga a la meta j en el nivel de prioridad i , y $h_j(n,p)$ es la función de realización o de logro asociada a la meta j (el Cuadro 1 resume las distintas clases de funciones de realización que existen).

$X \rightarrow$	Conjunto factible.
$x_j \rightarrow$	Variable de decisión j-ésima.
$f_i(x) \rightarrow$	Función matemática representativa del atributo i-ésimo.
$n_i \rightarrow$	Variable de desviación que cuantifica la falta de logro del atributo i-ésimo sobre el nivel de aspiración i-ésimo.
$p_i \rightarrow$	Variable de desviación que cuantifica el exceso de logro del atributo i-ésimo sobre el nivel de aspiración i-ésimo.
$u_i \rightarrow$	Nivel de aspiración del atributo i-ésimo.
$s \rightarrow$	Número de niveles de prioridad del problema.
$q \rightarrow$	Número de metas del problema.
$h \rightarrow$	Subconjunto de variables de decisión al que se obliga a adoptar un valor entero.

Los métodos destinados a la resolución de este tipo de problemas son múltiples y complicados. Dentro de ellos, podemos destacar las aportaciones realizadas por Ignizio (1985), quien propone un algoritmo para convertir un problema de Programación por Metas Lexicográficas Entera en un problema de Programación Entera Monoobjetivo, o el trabajo desarrollado por Mirrazavi (1997), quien plantea un algoritmo de Ramificación y Acotación que resuelve relajaciones lineales del problema lexicográfico.

Cuadro 1

Metas, variables de desviación no deseadas y funciones de realización asociadas			
Forma inicial de la meta	Forma de la meta transformada	Variable de desviación no deseada (a minimizar)	Función de realización
$f_i(x) \geq u_i$	$f_i(x) + n_i - p_i = u_i$	n_i	$h_i(n_i, p_i) = n_i$
$f_i(x) \leq u_i$	$f_i(x) + n_i - p_i = u_i$	p_i	$h_i(n_i, p_i) = p_i$
$f_i(x) = u_i$	$f_i(x) + n_i - p_i = u_i$	$n_i + p_i$	$h_i(n_i, p_i) = n_i + p_i$

Fuente: Adaptada de Romero (1993, pág. 64)

No obstante, al emplear cualquiera de estos métodos un aspecto interesante que siempre debemos examinar es si la solución obtenida, además de satisfactoria, es eficiente. Para conocer esta propiedad podemos utilizar una serie de técnicas, denominadas de Detección y Restauración de la Eficiencia, las cuales se caracterizan por actuar en dos etapas.

En la primera de ellas, el objetivo es conocer la situación de cada meta en el punto satisfactorio. En este sentido, existen tres tipos de situaciones: que la meta sea eficiente, no eficiente, o bien, no acotada.

De este modo, entenderemos por meta eficiente aquella que para mejorar su valor en el punto ha de empeorar necesariamente el valor de alguna otra meta. En cambio, la meta ineficiente será aquella que puede mejorar su valor sin necesidad de deteriorar el valor de las otras. Por último, se dice que una meta es no acotada si se puede mejorar infinitamente su valor en el punto y no por ello empeorar el valor de alguna otra.

Esta tarea de detección se realizará, como ya hemos comentado, meta por meta, de modo que si todas ellas son eficientes en el punto satisfactorio, éste será además un punto eficiente. En cambio, si alguna meta fuera ineficiente, el punto satisfactorio también tendrá ese carácter.

Una vez finalizada la Etapa de Detección pasaremos, en caso de que hayamos localizado alguna meta ineficiente, a la segunda etapa, denominada de Restauración de la Eficiencia.

Con relación a ella, es importante destacar que existen diferentes métodos para poder llevarla a cabo. Entre ellos podemos destacar el Método de la Restauración Basada en Preferencias (Molina (2000)), caracterizado por traspasar la estructura de preferencias empleada en la etapa de búsqueda de una solución satisfactoria a la etapa de restauración de la eficiencia, y el Método de la Restauración Interactiva (Molina (2000)), que se utiliza cuando dicha estructura de preferencias cambia de una etapa a otra.

3. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

3.1. Hipótesis

Para comenzar el planteamiento del modelo vamos a establecer una serie de supuestos fundamentales o hipótesis que, en nuestro caso, son las siguientes:

- El inversor puede elegir el espacio de tiempo durante el cual mantendrá su cartera que estará integrado, en todo caso, por un único periodo.
- Al inicio del mismo, procederá a la compra de la combinación de títulos con el propósito de conseguir los objetivos al final del periodo de tenencia, momento en el cual procederá a su liquidación.
- Durante el periodo de tenencia no se producirán retiradas ni nuevas aportaciones de capital. Tampoco se podrá prestar dinero ni pedirlo prestado.
- Existe un presupuesto que restringe las posibilidades de inversión.
- El inversor pretende obtener, además, una cartera no dominada por otras.
- Se contempla la existencia de unos costes asociados a la formación, mantenimiento y liquidación de la cartera.

Pero, además de tener en cuenta estas hipótesis, la construcción de un modelo de selección de carteras mediante Programación por Metas Lexicográficas Entera

exige definir las variables de decisión, los objetivos, las metas y las restricciones del problema.

3.2. Variables de decisión

En cuanto a las variables de decisión, éstas van a ser el número de títulos a adquirir de cada valor i , las cuales denominaremos N_i , $i=1, \dots, n$, y que consideraremos enteras y positivas. No obstante, tendremos en cuenta, además, unas variables de carácter binario, que designaremos z_i , $i=1, \dots, n$, las cuales adoptarán valor uno siempre que el inversor adquiera el título i y cero en caso contrario, es decir:

$$\begin{aligned} z_i &\geq \frac{N_i}{\text{cotsup}_i} \\ z_i &\leq N_i \\ z_i &\in \{0,1\} \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

donde cotsup_i es una cota superior de N_i .

3.3. Objetivos y Metas

Una vez definidas las variables, el siguiente paso consiste en establecer los objetivos así como los niveles de aspiración asociados a cada uno de ellos.

- El primer objetivo que vamos a plantear consiste en que la rentabilidad esperada de la cartera sea, al menos, igual a la rentabilidad que se espera obtener cuando se invierte en renta fija. Si el nivel de aspiración fijado es $E(R_F) \cdot P$, podemos formular dicha meta del siguiente modo:

$$\sum_{i=1}^n E(R_i) \cdot N_i \cdot \text{cot}_i - CT + n_1 - p_1 = E(R_F) \cdot P$$

donde $E(R_i)$ es la rentabilidad esperada del título i , cot_i es el precio de compra del título i , CT son los costes totales asociados a la cartera (en ellos se incluyen los costes de contratación en bolsa y de liquidación del Sistema de Compensación y Liquidación de Valores, los costes de intermediación y los de administración y custodia), $E(R_F)$ es la rentabilidad esperada de la renta fija, P es el presupuesto de inversión, y n_1 y p_1 son las variables de desviación asociadas. Designaremos por $h_1(n_1, p_1)$ a la función de logro asociada a esta primera meta, que será igual a n_1 .

- Un segundo objetivo va a consistir en el hecho de que el riesgo sistemático de la cartera no supere un cierto nivel B . Ello se traduce en la obtención de la siguiente meta, donde β_i es la beta o riesgo sistemático del título i :

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \frac{N_i \cdot \cot_i}{P} + n_2 - p_2 = B$$

y en donde la correspondiente función de logro asociada, $h_2(n_2, p_2)$, va a ser igual a p_2 .

- El tercer objetivo también va a estar relacionado con el riesgo pero, en este caso, con el riesgo específico de la cartera. Para tratar de eliminarlo, el sujeto decisor desea diversificar la cartera haciendo que el número de títulos diferentes de la cartera sea mayor o igual que T , lo cual da origen a la meta:

$$\sum_{i=1}^n z_i + n_3 - p_3 = T$$

En este caso, la función de logro se denota como $h_3(n_3, p_3)$ y coincide con n_3 .

- Un último objetivo consiste en que el inversor agote, al menos, un amplio porcentaje C del presupuesto. Ello se traduce en la obtención de la meta:

$$\sum_{i=1}^n N_i \cdot \cot_i + CT + n_4 - p_4 = C \cdot P$$

donde la función de logro asociada, $h_4(n_4, p_4)$, es igual a n_4 .

3.4. Restricciones

Vamos a considerar dos tipos de restricciones:

- Una restricción presupuestaria, cuya finalidad consiste en evitar que se invierta en la cartera una cuantía superior a la del presupuesto de inversión:

$$\sum_{i=1}^n N_i \cdot \cot_i + CT \leq P$$

- Unas restricciones destinadas a la diversificación de la cartera y que apuestan por no admitir más de un porcentaje M_i del presupuesto en cada título¹:

$$N_i \cdot \cot_i \leq M_i \cdot P \quad i=1, \dots, n$$

¹ Con relación a estas restricciones es importante señalar que aunque, en principio, su inclusión pueda parecernos una redundancia ya que cuando establecimos la tercera meta, ésta pretendía alcanzar ese mismo propósito, la consideración conjunta tanto de estas nuevas restricciones como de la meta es un aspecto necesario para la eliminación correcta del riesgo específico. De este modo, si considerásemos sólo la meta, ésta no podría impedir que apareciesen situaciones en las cuales el presupuesto se concentrase en la adquisición mayoritaria de determinados valores. En cambio, la contemplación exclusiva de las restricciones, nos permitiría incurrir en el problema de no llegar a alcanzar un número suficiente de activos diferentes para lograr

Una vez definidos todos los elementos del problema, el siguiente paso consiste en ordenar las metas en unos niveles de prioridad que, en nuestro caso serán tres: un primer nivel, Q_1 , en el cual situaremos las metas primera y segunda con idéntico peso, aspecto éste que puede, lógicamente, alterarse, un segundo nivel, Q_2 , integrado por la meta tercera y un último nivel, Q_3 , formado por la meta cuarta.

Estos niveles pueden modificarse en función de las preferencias personales del sujeto decisor. No obstante, y en todo caso, el logro de las metas situadas en un determinado nivel de prioridad se considerará siempre inconmesurablemente preferido al logro de cualquier meta situada en un nivel más bajo.

Con todo ello, el modelo de Programación por Metas Lexicográficas Entera obtenido es el siguiente:

$$\text{Lexmin } [n_1 + p_2, n_3, n_4]$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n E(R_i) \cdot N_i \cdot \text{cot}_i - CT + n_1 - p_1 = E(R_F) \cdot P$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \frac{N_i \cdot \text{cot}_i}{P} + n_2 - p_2 = B$$

$$\sum_{i=1}^n z_i + n_3 - p_3 = T$$

$$\sum_{i=1}^n N_i \cdot \text{cot}_i + CT + n_4 - p_4 = C \cdot P$$

$$\sum_{i=1}^n N_i \cdot \text{cot}_i + CT \leq P$$

$$N_i \cdot \text{cot}_i \leq M_i \cdot P$$

$$z_i \geq \frac{N_i}{\text{cotsup}_i}$$

$$z_i \leq N_i$$

una diversificación adecuada. No obstante, también es importante destacar que aunque nosotros hayamos optado por diversificar la cartera introduciendo unas restricciones que apuestan por no admitir más de un porcentaje M_i del presupuesto en cada activo, existen otros métodos para lograr dicho propósito como, por ejemplo, no invertir más de un porcentaje R del presupuesto en un sector concreto (véase, por ejemplo, Lee (1972)). La elección concreta de un método u otro dependerá, en todo caso, de las preferencias personales del sujeto decisor.

$$\begin{aligned}
 z_i &\in \{0,1\} \\
 N_i &\in \mathbb{Z}^+ \\
 n_j, p_j &\geq 0 \quad j=1, \dots, 4 \\
 i &= 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

4. APLICACIÓN PRÁCTICA

Una vez formulado el modelo es evidente que, de por sí, la construcción del mismo no puede constituir el único fin de nuestro trabajo. Es necesario, además, ponerlo en práctica en diferentes momentos del tiempo y con independencia de la fase específica por la que atravesase el mercado para probar su validez empírica.

Para ello, un requisito imprescindible era conocer los títulos con los cuales íbamos a trabajar. En este sentido, y como nuestro propósito no era, precisamente, limitar las posibilidades de inversión, decidimos que todos los títulos integrantes del mercado continuo podían, potencialmente, llegar a formar parte de nuestra cartera.

No obstante, de este conjunto inicial decidimos eliminar algunos valores en función de dos criterios:

1º El hecho de no cotizar durante un dilatado espacio de tiempo previo al posible momento de su adquisición, lo cual podría originar una mala calidad de las estimaciones que necesitábamos realizar con relación a los mismos.

2º La pertenencia del título al sector de Nuevas Tecnologías o su incorporación al mismo a partir del año 2000 ya que dichos valores representan un mercado inestable.

Tras la aplicación de ambos criterios, el conjunto inicial quedó reducido a los 87 títulos siguientes: Acciona, Acerinox, Acesa, ACS, Aforasa, Aguas de Barcelona, Alba, Altadis, Aragonesas, Asturiana del Zinc, Aumar, Azcoyen, Bami, Banco Atlántico, Banco de Andalucía, Banco de Castilla, Banco de Crédito Balear, Banco de Galicia, Banco de Valencia, Banco Guipuzcoano, Banco Pastor, Banco Popular, Banco de Vasconia, Banco Zaragozano, Banesto, Bankinter, Bayer, BBVA, BSCH, Bodegas y Bebidas, CAF, Campofrío, Carrefour, Cementos Portland, Cepsa, Cortefiel, Cristalería, Dragados, Duro Felguera, Ence, Endesa, Eppic, Ercros, Española del Zinc, Europistas, FCC, Filo, Gas Natural, G. Inversión, Heineken, Hidroeléctrica del Cantábrico, Iberdrola, Iberpistas, Inbesos, Inmobiliaria Metrovacesa, Inmobiliaria Zabalburu, Koipe, La Seda, Mapfre, Mapfre Vida, NH Hoteles, Nicolás Correa, Nueva Montaña, OHL, Prima Inmobiliaria, Prosegur, Puleva, Repsol, Sniace, Sotogrande, Tafisa, Tavex Algodonera, Telefónica, Tubacex, Tudor, Uniland Cementera, Unión Fenosa, Unipapel, Uralita, Urbas, Urbis, Valderrivas, Vallehermoso, Vidrala, Viscosfan, Volkswagen y Zardoya Otis.

Una vez identificados estos títulos, pasamos a estudiar los resultados que proporcionaba nuestro modelo en cinco momentos de adquisición distintos² correspondien-

tes al primer día hábil de los años 1997, 1998, 1999, 2000 y 2001. Para ello, resultaba fundamental que, en cada uno de esos días, el inversor fijase, o en su caso dispusiera, de tres tipos de datos o inputs:

1º) Los valores de P , C , M_i , T y B (véase Cuadro 2), los cuales supondremos no varían en cada uno de los cinco días analizados.

Cuadro 2

Inputs establecidos por el inversor	
Inputs	Nivel fijado
Presupuesto de inversión (P)	6000 euros
Porcentaje del presupuesto a agotar (C)	95%
Porcentaje de inversión en un título i (M_i)	5%
Número de títulos diferentes de la cartera (T)	20 títulos
Riesgo sistemático de la cartera (B)	1

Por lo que respecta al valor de T considerado, debemos realizar algunas matizaciones. En la literatura financiera, existen opiniones contrapuestas sobre cuál es el número de títulos diferentes que deben integrar una cartera bien diversificada.

Así, mientras que autores como Evans y Archer (1968) opinan que son necesarios 10 valores o más, otros como Fabozzi (1995, pág. 88), Brealey y Myers (1993, pág. 165) creen que basta con 20. Por su parte, Sharpe, Alexander y Bailey (1995, pág. 215) consideran que son imprescindibles, al menos, 30.

En este contexto, la elección de una cuantía concreta depende, en todo caso, del criterio del sujeto decisor. Nosotros, concretamente, hemos adoptado una postura intermedia consistente en considerar como mínimo 20 títulos distintos para eliminar el riesgo no sistemático.

²Con relación a los títulos considerados, debemos precisar que aunque, por ejemplo, en el día de adquisición establecido para 1997, hubiese sociedades cotizando por separado, como puede ser el caso de BBV y Argentaria, los datos que hemos recibido de la Bolsa de Madrid reflejan el valor BBVA, resultado de la fusión de ambas entidades. Por tanto, aunque este tratamiento no sea correcto a la hora de adquirir una cartera en esa fecha, si el valor BBVA finalmente forma parte de la misma, tendremos que suponer su existencia haciendo, por tanto, una simplificación.

2º) Los costes asociados a la cartera.

Con respecto a estos costes es importante destacar que los costes de intermediación y los de administración y custodia están en función de la Sociedad o Agencia de Valores con la que se desee negociar en bolsa.

De este modo, suponiendo que el inversor decide realizar sus operaciones por medio de la Sociedad de Valores Renta 4, los costes totales asociados a la cartera vendrían dados por la siguiente expresión:

$$CT = 5,40 + \sum_{i=1}^n 0,0015 \cdot N_i \cdot \cot_i + \sum_{i=1}^n 0,003 \cdot N_i \cdot \cot_i = 5,40 + 0,0045 \sum_{i=1}^n N_i \cdot \cot_i$$

Además consideraremos que dichos costes no varían en cada uno de los cinco días de adquisición analizados.

3º) Los valores de las rentabilidades y betas previstas de cada título, así como las rentabilidades esperadas de la renta fija y las cotas superiores de cada variable N_i en cada uno de los días de adquisición establecidos.

Para ello, acudimos tanto al Servicio de Publicaciones de la Bolsa de Madrid como al website del Banco de España, en donde obtuvimos los datos necesarios para el cálculo de los mismos.

Una vez conseguidos estos tres conjuntos de datos, el siguiente paso consistió en implementar informáticamente el modelo. Para ello, analizamos los dos únicos paquetes de software que incorporaban la metodología que necesitábamos: el IGPSYS (1997) de Tamiz y Jones y el PROMO de Caballero y otros (2000). Debido a que el primero sólo permitía editar los ficheros de datos en MS-DOS, presentando un formato poco intuitivo y difícil de manejar, decidimos utilizar el programa PROMO ya que, además de estar ampliamente contrastado en la práctica, permitía trabajar en un entorno Windows.

Su ejecución en el primer día de adquisición no proporcionó ningún tipo de problema. De hecho, se obtuvo una solución satisfactoria, en la cual los valores logrados por las metas alcanzaban siempre los niveles de aspiración establecidos.

Sin embargo, nadie podía garantizarnos que esta solución, aunque satisfactoria, fuera eficiente y, por tanto, no mejorable. Como consecuencia, resultaba imprescindible emplear alguna Técnica de Detección y Restauración de la Eficiencia que nos permitiera paliar este inconveniente y encontrar así una solución no dominada por otras.

En este sentido, cualquiera de los métodos que podían emplearse era una opción igualmente válida y la elección final dependía, en todo caso, del criterio del sujeto decisor. Nosotros, concretamente, optamos por emplear, tras la Etapa de Detección, una Restauración Basada en Preferencias, caracterizada por mantener la misma estructura de preferencias que se habían manifestado hasta ese momento en la resolución del problema. Como consecuencia, obtuvimos la solución reflejada en el Cuadro 3.

Sin embargo, la situación cambió en los cuatro días de adquisición restantes, en los cuales PROMO proporcionó soluciones de carácter no satisfactorio debido al incumplimiento de la última meta y de la primera en el caso concreto de la cartera obtenida en el día quinto, tal y como puede comprobarse en el Cuadro 3.

En estas circunstancias, lo conveniente sería que el decisor determinase si desea realizar modificaciones en el problema tales como la redefinición de las metas o la redistribución de las mismas en unos niveles de prioridad diferentes. Sin embargo, antes de llevar a cabo esta tarea, optamos por analizar qué ocurriría si relajábamos la restricción relacionada con el deseo de no agotar más del 5% del presupuesto en cada título (la cual establecimos en el Cuadro 2), fijándola en un nuevo nivel del 15%.

Cuadro 3

Valores alcanzados por las distintas metas en las soluciones no satisfactorias obtenidas los días de adquisición segundo, tercero, cuarto y quinto								
	Día 2º (02/01/98)		Día 3º (04/01/99)		Día 4º (03/01/00)		Día 5º (02/01/01)	
Meta	Valor logrado	Nivel de aspiración	Valor logrado	Nivel de aspiración	Valor logrado	Nivel de aspiración	Valor logrado	Nivel de aspiración
Rentabilidad	3,37	0,72	2,13	0,48	0,67	0,59	0,22	0,74
Riesgo sistemático	0,024	1	0,043	1	0,054	1	0,0498	1
Diversifica- ción	20	20	20	20	20	20	20	20
Presupuesto	1776,1	5700	991,71	5700	904,86	5700	2614,07	5700

Los resultados obtenidos pudimos clasificarlos en dos grupos:

1º En los días de adquisición segundo, tercero y cuarto logramos soluciones satisfactorias y, tras el empleo de la Etapa de Detección y de una Restauración Interactiva, soluciones, además, de carácter eficiente. La razón para no seguir empleando en estos casos una Restauración Basada en Preferencias, tal y como hicimos el primer día de compra, era que ahora ésta elevaba el número de títulos integrantes de la cartera hasta un total de 87, es decir, a todo el conjunto inicial de valores. Por ello, optamos por seleccionar una Restauración Interactiva que nos permitiera alcanzar, de entre todos los puntos satisfactorios, aquel que fuera el más rentable (véase Cuadro 4).

2º En el quinto día de adquisición obtuvimos una solución no satisfactoria, que incumplía exclusivamente la meta asociada al último nivel de prioridad. No obstante, debido a que éste era sólo por una cuantía de 189,96 euros, decidimos no proceder a reformular el problema (véase Cuadro 5).

Llegados a este punto, es importante destacar que el modelo funciona bien en los distintos momentos analizados. Así, mientras que en los cuatro primeros nos permite obtener soluciones satisfactorias y eficientes, en el quinto, nos ofrece una solución

que satisface todos los niveles de aspiración salvo el último, hecho que puede deberse, fundamentalmente, al carácter negativo de la mayoría de previsiones que realizamos de las rentabilidades de los distintos títulos en ese instante.

Cuadro 4

Valores alcanzados por las distintas metas en las soluciones eficientes obtenidas los días de adquisición segundo, tercero y cuarto						
	Día 2º (02/01/98)		Día 3º (04/01/99)		Día 4º (03/01/00)	
Meta	Valor alcanzado	Nivel de aspiración	Valor alcanzado	Nivel de aspiración	Valor alcanzado	Nivel de aspiración
Rentabilidad	5,91	0,72	8,05	0,48	2,35	0,59
Riesgo sistemático	0,53155	1	0,33338	1	0,544905	1
Diversificación	21	20	21	20	21	20
Presupuesto	5999,95	5700	5999,62	5700	5999,76	5700

Además, también es importante destacar que la meta relacionada con la beta no condiciona en ningún momento el proceso de resolución, ya que siempre se mantiene alejada de su nivel de aspiración.

Cuadro 5

Valores alcanzados por las distintas metas en la solución no satisfactoria obtenida finalmente en el quinto día de adquisición		
Meta	Valor alcanzado	Nivel de aspiración
Rentabilidad	0,76	0,74
Riesgo sistemático	0,0885396	1
Diversificación	20	20
Presupuesto	5510,04	5700

No obstante, también debemos resaltar que no todo van a ser aspectos positivos. La puesta en práctica del modelo también conlleva una serie de dificultades. En este sentido, una de las principales desventajas que puede encontrar el inversor que decide acceder directamente a bolsa aplicando un modelo concreto como el nuestro es el hecho de carecer de los conocimientos adecuados para su puesta en práctica. Sin embargo, este inconveniente puede solventarse, en parte, si dispone de un software específico.

La cuestión radica en que estos programas, en ocasiones, resultan inaccesibles. De hecho, el software que hemos empleado para llevar a la práctica el modelo, a pesar de haber sido ampliamente contrastado en múltiples situaciones así como en diversas aplicaciones reales, no se comercializa actualmente.

A este hecho se une, además, la necesidad de realizar estimaciones sobre determinados inputs, como las rentabilidades y betas previstas de cada título, para poder aplicar el modelo. El problema se complica, aún más, al no poder conocer el grado de fiabilidad de las mismas hasta el final del periodo de tenencia, momento en el cual es posible compararlas con las rentabilidades y betas obtenidas realmente.

Otro aspecto que es imposible conocer con certeza hasta el momento de liquidación de la cartera es el nivel de cumplimiento real de las dos primeras metas de nuestro modelo. En este sentido, hemos visto cómo en el día de la compra, cuando trabajábamos con previsiones, dichas metas se cumplían siempre. Ahora bien, esto no tiene por qué ocurrir al final del periodo de tenencia, momento en el cual, al conocer ya las rentabilidades y betas reales de la cartera, necesitamos saber si éstas superan o no los niveles de aspiración establecidos.

Además, este tipo de análisis puede resultar especialmente interesante cuando el inversor no ha establecido un día concreto para la venta, ya que puede orientarle sobre el momento de liquidación de la cartera.

En nuestro caso, el estudio de estas dos metas una vez transcurrido el periodo de tenencia muestra cómo, aunque la segunda meta se cumple siempre, la primera hay ocasiones en que no lo hace. Concretamente, falla para las carteras liquidadas el día 1 de febrero de los años 1999 y 2000 (véase Cuadro 6).

Cuadro 6

Comparación de las rentabilidades y betas reales con los niveles de aspiración en los distintos momentos establecidos para la liquidación de la cartera				
Día de venta	Rentabilidad real	Nivel de aspiración	Beta real	Nivel de aspiración
3 febrero 1997	75,57	29,95	0,49	1
2 febrero 1998	1053,77	22,32	0,75	1
1 febrero 1999	-208,72	13,34	0,25	1
1 febrero 2000	-432,36	17,14	0,39	1
1 febrero 2001	50,72	22,32	0,15	1

Todo ello no viene sino a confirmar, una vez más, la enorme complejidad del problema al que hemos tratado de dar respuesta a lo largo de este trabajo.

5. CONCLUSIONES

La selección de una cartera de valores es un tema de gran complejidad que está cobrando cada día más protagonismo debido a la creciente incorporación de pequeños inversores particulares al mercado bursátil.

A lo largo de la literatura financiera, han sido numerosos los modelos destinados a determinar dicha cartera, sin embargo, la revisión de los mismos nos ha permitido descubrir que plantean serios inconvenientes en la resolución de este problema de inversión, principalmente, aspectos relacionados con la metodología que proponen así como con el hecho de considerar la selección de carteras como un problema continuo.

Estos inconvenientes son solventados, en cambio, por la Programación por Metas Lexicográficas Entera. Por ello, nuestro objetivo ha sido la construcción de un modelo mediante el empleo de esta técnica multiobjetivo.

Se trata de un modelo flexible que, además de dar respuesta a las necesidades fundamentales de los inversores que deciden acceder directamente a bolsa, tiene en cuenta aspectos tan realistas como la presencia de los costes asociados a la cartera, las ventajas que se obtienen de la diversificación o la necesidad de buscar una combinación de títulos no dominada por otras.

Su ejecución en diferentes momentos del tiempo corroboró el buen funcionamiento del mismo con independencia de la fase específica por la que atravesara el mercado. No obstante, su puesta en práctica también evidenció una serie de dificultades, comunes, al fin y al cabo, a todo modelo de selección de carteras como la necesidad de disponer de un software específico o de realizar estimaciones sobre determinados inputs para poder ejecutarlo. El problema se complica, aún más, por la falta de coincidencia que, normalmente, existe entre estas estimaciones y los valores finalmente obtenidos.

De todos modos, este último inconveniente no debe, en absoluto, mermar la aplicabilidad de nuestro modelo sino más bien entenderse como una señal orientativa de las precauciones que deben adoptarse a la hora de ponerlo en práctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEXANDER, G. J, SHARPE, W. F. Y BAILEY, J. V. (1993): *Fundamentals of Investments*. Nueva Jersey, Prentice Hall.
- AMADOR, F. Y ROMERO, C. (1989): «Redundancy in Lexicographic Goal Programming: An Empirical Approach». *European Journal of Operational Research*, vol. 41, págs. 347-354.
- ARTHUR, J. L. Y RAVINDRAN, A. (1980): «A Branch and Bound Algorithm with Constraint Partitining for Integer Goal Programming Problems». *European Journal of Operational Research*, vol. 4, págs. 421-425.
- BALLESTERO, E. Y ROMERO, C. (1998): *Multiple Criteria Decision Making and its Applications to Economic Problems*. Dordrecht, Kluwer.
- BAUMOL, W. J. (1963): «An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection», *Management Science*, vol. 10, nº 1, págs. 174-181.
- BERTSIMAS, D., DARNELL, C. Y SOUCY, R. (1999): «Portfolio Construction Through Mixed-Integer Programming at Grantham, Mayo, Van Otterloo and Company». *Interfaces*, vol. 29, n.º 1, págs. 49-66.
- BREALEY, R.A. Y MYERS, S.C. (1993): *Fundamentos de Financiación Empresarial*, Madrid, McGraw Hill.
- CABALLERO, R. y otros (2000): *PROMO (Programación Multiobjetivo)*. Software registrado con el número de registro de la propiedad 00/2000/11756.
- CABALLERO, R. y otros: «MOPEN: A Computational Package for Linear Multi-Objective and Goal Programming Problems», *Decision Support Sistem*, En Prensa.
- ELTON, E. Y GRUBER, M. J. (1999): *Investments*. Massachusetts, The MIT Press.
- EVANS, J. L. Y ARCHER, S. H. (1968): «Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis», *Journal of Finance*, diciembre, págs. 761-767.
- FABOZZI, F. J. (1995): *Investment Management*, Nueva Jersey, Prentice Hall.
- IGNIZIO, J. P. (1976): *Goal Programming and Extensions*. Massachusetts, Lexington Books.
- IGNIZIO, J. P. (1985): «Integer Goal Programming via Goal Aggregation». *Large Scale Systems*, vol. 8, págs. 81-86.
- KUMAR, P. C., PHILIPPATOS, G. C. Y EZZELL, J. R. (1978): «Goal Programming and the Selection of Portfolios by Dual-Purpose Funds». *Journal of Finance*, vol. 33, nº 1, págs. 303-310.
- LEE, S. M. (1972): *Goal Programming for Decision Analysis*. Philadelphia, Auerback.

- LEE, S. M. Y CHESSER, D. L. (1980): «Goal Programming for Portfolio Selection». *Journal of Portfolio Management*, págs. 22-26.
- LEE, S. M. Y LERRO, A. J. (1973): «Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds». *Journal of Finance*, vol. 28, nº 5, págs. 1087-1101.
- LEVARY, R. R. Y AVERY, M. L. (1984): «On the Practical Application of Weighting Equities in a Portfolio via Goal Programming». *Opsearch*, vol. 21, págs. 246-261.
- MAO, J. C. T. Y BREWSTER, J. F. (1974): «An E-Sh Model of Capital Budgeting», incluido en Dickinson, J. P. (ed), *Portfolio Analysis: A Book of Readings*. Lexington, Lexington Books.
- MARKOWITZ, H. (1952): «Portfolio Selection». *Journal of Finance*, vol. 7, n.º 1, págs. 77-91.
- MIRRAZAVI, S. K. (1997): *Investigation and Development of Efficient Integer and Integer Goal Programing Systems*. Tesis Doctoral, Universidad de Porsmouth.
- MOLINA, J. (2000): *Toma de Decisiones con Criterios Múltiples en Variable Continua y Entera: Implementación Computacional y Aplicaciones a la Economía*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga.
- PENDARAKI, K., DOUMPOS, M. Y ZOPOUNIDIS, C. (2004): «Towards a Goal Programming Methodology for Constructing Equity Mutual Fund Portfolios», *Journal of Asset Management*, vol. 4, págs. 415-429.
- PENDARAKI, K., ZOPOUNIDIS, C. Y DOUMPOS, M. (2005): «On the Construction of Mutual Fund Portfolios: A Multicriteria Methodology and an Application to the Greek Market of Equity Mutual Funds», *Journal of Operational Research*, nº 2, págs. 462-477.
- PHILIPPATOS, G. C. Y WILSON, C. J. (1974): «Entropy, Market Risk, and the Selection of Efficient Portfolios», *Applied Economics*, vol. 6, nº 1, págs. 77-81.
- POWELL, J. G. Y PREMACHANDRA, I. M. (1998): «Accomodating Diverse Institutional Investment Objectives and Constraints Using Non-Linear Goal Programming». *European Journal of Operational Research*, vol. 105, págs. 447-456.
- PREIXENS, M. T. (1992): *Hacia una Teoría de Carteras desde el Punto de Vista de la Revisión*. Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona.
- ROMERO, C. (1991): *Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Nueva York, Pergamon.
- ROMERO, C. (1993): *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Madrid, Alianza Editorial.
- SCHNIEDERJANS, M. J., ZORN, T. S. Y JOHNSON, R. R. (1993): «Allocating Total Wealth: A Goal Programming Approach». *Computers & Operations Research*, vol. 20, nº 7, págs. 679-685.
- SHARPE, W. F. (1963): «A Simplified Model for Portfolio Analysis». *Management Science*, vol. 9, n.º 2, págs. 277-293.

- SHARPE, W. F., ALEXANDER, G. J. Y BAILEY, J. V. (1995): *Investments*, Nueva Jersey, Prentice Hall.
- TAMIZ, M., HASHAM, R. Y JONES, D. F. (1996): «A Two Staged Goal Programming Model for Portfolio Selection», en *Multi Objective Programming and Goal Programming Lectures. Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 432, Berlín, Springer Verlag.
- TAMIZ, M., MIRRAZAVI, S. K. Y JONES, D. F. (1999): «Extensions of Pareto Efficiency Analysis to Integer Goal Programming». *Omega*, vol. 27, págs. 179-188.
- YU, P. L. (1985): *Multiple Criteria Decision Making. Concepts, Techniques and Extensions*. Nueva York, Plennnun Press.
- ZELENY, M. (1982): *Multiple Criteria Decision Making*. Nueva York, McGraw Hill.
- ZIONTS, S. (1978): *Multiple Criteria Problem Solving*. Berlín, Springer Verlag.