Un modelo de tarificación Bonus-Malus bajo el principio Esscher con tarifas más competitivas

GÓMEZ DÉNIZ, EMILIO(*) Y LEÓN SANTANA, MIGUEL (**)

(*)*Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.* (**) *Investigador adscrito al Departamento de Métodos Cuantitativos en Economía y Gestión de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.*

Campus de Tafira. Edificio Departamental de Ciencias EE. y EE. Telf.: +34 928 45 1803-Fax: +34 928 45 18 29 - (*)E-mail: egomez@dmc.ulpg.es (**)E-mail: melón@becarios.ulpgc.es

RESUMEN

El propósito principal de los sistemas de tarificación Bonus-Malus es que los asegurados paguen una prima justa, esto es la prima que corresponda a su propia experiencia de reclamación. Sin embargo, la mayoría de estos sistemas penalizan injustamente a determinados asegurados, haciéndoles pagar más de lo que realmente les corresponde. En este trabajo presentamos un modelo basado en una sugerencia de Lemaire (1979, pp.278-281), que decrece las sobrecargas, minimizando la función de pérdida Esscher, y garantiza el equilibrio financiero de la compañía aseguradora.

Palabras Clave: Bonus-Malus, Aproximación Bayesiana, Prima Esscher.

A Bonus-Malus system with more competitive rates by using the Esscher Principle

ABSTRACT

The main purpose of the Bonus-Malus Systems is to better the individual risk, so that, policyholders will pay, in the long run, a premium corresponding to their own claim frequency. Nevertheless, in all Bonus-Malus system some people are unfairly penalized, since they pay more than their pure premium. We present a model, based on a suggestion of Lemaire (1979, pp.278-281) which decreases these overcharges by minimizing the expectation of the Esscher loss function, obviously under the condition of financial balance of the system.

Keywords: Bonus-Malus System, Bayesian approach, Esscher premium.

Clasificación JEL: G10, G22, C11.

Artículo recibido en julio de 2003 y aceptado para su publicación en diciembre de 2004.

Artículo disponible en versión electrónica en la página www.revista-eea.net, ref.: E-23101

ISSN 1697-5731 (online) – ISSN 1133-3197 (print)

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de tarificación Bonus-Malus, SBM en adelante, se utilizan mayoritariamente en el sector de seguros de automóviles. Dichos sistemas, de acuerdo a unas reglas de transición, penalizan a los asegurados que realizan reclamaciones mediante aumentos en la prima que éstos deben pagar. Por el contrario, recompensan a los conductores que no realizan ninguna reclamación con descuentos sobre la prima. De esta forma, los asegurados se ven motivados a realizar una conducción más cuidadosa. El objetivo principal de un SBM es que todos los asegurados paguen, en el largo plazo, una prima que se corresponda con su propia experiencia de reclamaciones.

Los SBM han sido estudiados desde diversas perspectivas. La mayoría tienen en cuenta sólo el número de reclamaciones de cada asegurado. Tremblay (1992) obtiene el diseño de un SBM óptimo usando la función de pérdida cuadrática, el par Poisson-Inversa Gaussiana para modelizar el número de reclamaciones y la función de utilidad exponencial como principio de cálculo de prima. Lemaire (1979, 1985, 1995) desarrolla un modelo para obtener un SBM financieramente equilibrado utilizando el principio del valor esperado y la distribución binomial negativa para modelizar el número de reclamaciones. Coene y Doray (1996) consideran el diseño de un SBM óptimo minimizando una función cuadrática de la diferencia entre la prima para un SBM óptimo con un número infinito de clases y la prima para un SBM con un número finito de clases. Meng y Whitmore (1999) presentan un modelo que utiliza la distribución binomial negativa para el número de reclamaciones y la distribución de Pareto para modelizar la propensión a reclamaciones dentro de la cartera. Más recientemente, Frangos y Vrontos (2001) obtuvieron un SBM óptimo utilizando el número de reclamaciones y la cuantía para cada una de ellas. Gómez et al. (2002) realizaron un análisis de robustez en el caso en que se utilice la función de pérdida cuadrática.

Sin embargo, en muchas ocasiones, las bonificaciones de los SBM son pequeñas. Esto puede acarrear serios problemas de competitividad y, consecuentemente, de equilibrio financiero a la compañía aseguradora (Baione et al. 2002, pp.159-160) ya que la mayoría de los asegurados pertenecen a la clase de los buenos conductores. Ello dará lugar a correcciones comerciales para garantizar dicho equilibrio (Verico, 2002, pp.315).

En este trabajo, proponemos un SBM que corrige este problema utilizando la función de pérdida Esscher. El principio de prima Esscher (Gerber, 1979; Gerber y Arbor, 1980; Gómez et al., 2001; Heilmann, 1989; entre otros) no ha sido utilizado hasta el momento en los SBM, mostrándose, como veremos en este trabajo, como un potente instrumento para la asignación de primas más competitivas.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se introduce el principio de prima Esscher y se muestra un ejemplo aplicado a los SBM bajo el par Poisson-Inversa Gaussiana. La sección 3 presenta el resultado a partir del cual es posible obtener primas más competitivas para los buenos asegurados, que son siempre la población más numerosa en las carteras de seguros de automóviles. Aplicaremos dicho resultado al ejemplo anterior.

Finalmente se concluye destacando los aspectos más relevantes del trabajo, así como algunas líneas futuras de investigación en este ámbito.

2. CÁLCULO DE PRIMAS UTILIZANDO EL PRINCIPIO ESSCHER

Un principio de cálculo de prima es un funcional H que asigna a un riesgo K con $F(k)$ distribución un número real. Para su elaboración suele considerarse una función de pérdida que $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ atribuya a algún $(k, P) \in \mathbb{R}^2$ la pérdida sostenida por un decisor que toma la acción p y se encuentre con el resultado k de algún experimento aleatorio. En el escenario actuarial la distribución de K está especificada salvo por un parámetro desconocido $\lambda \in \Lambda$ i.e. sea $f(k|\lambda)$ su función de densidad de probabilidad. La prima de riesgo se define por ser el valor de P que minimiza la pérdida esperada $\sum_k L(k, P)f(k|\lambda)$ y, puesto que es una función del parámetro desconocido λ , será denotada por $P(\lambda)$.

Ahora, si λ sigue en el colectivo una distribución a priori (función estructura) $\pi(\lambda)$, la prima colectiva es el valor de P^* que minimiza la pérdida esperada $\int_{\Lambda} L(P(\lambda), P^*)\pi(\lambda)d\lambda$.

Si el proceso de tarificación incorpora experiencia de reclamación individual, el análisis bayesiano permite combinar la información a priori o inicial que se tiene sobre el parámetro con la información muestral para obtener la distribución a posteriori. De esta manera puede revisarse la prima colectiva y obtener la denominada prima bayes.

Es usual considerar la variable aleatoria coste total $X = \sum_{i=0}^K X_i$, y suponer X_i (coste de la i -ésima reclamación) i.i.d. e independientes de K (número de reclamaciones), de modo que $E[X|\lambda] = E[X_i]E[K|\lambda]$. De ahora en adelante, y sin pérdida de generalidad, supondremos que el coste medio por reclamación es de 1 u.m. (unidad monetaria).

Diversos principios de cálculo de primas pueden utilizarse para elaborar un SBM. En este trabajo asumiremos una función de pérdida Esscher (Gerber y Arbor, 1980; Heilmann, 1989):

$$L(k, P) = e^{c\lambda} (k - P)^2,$$

donde la constante $c > 0$ mide la aversión al riesgo de la compañía aseguradora.

Supongamos ahora que para un riesgo dado $K|\lambda$ ha sido observada en t años la experiencia de reclamaciones $k_1, k_2, \dots, k_t$, y la distribución a priori del parámetro es $\pi(\lambda)$. Entonces, asumiendo $K_i, i = 0, 1, \dots, t$, i.i.d., y denotando por $\pi(\lambda|k, t)$ la distribución a posteriori del parámetro dados los datos, donde $k = \sum k_i = tk$, la prima bayes viene dada por:

$$P(k, t) = \frac{\int_{\Lambda} P(\lambda)e^{cP(\lambda)}\pi(\lambda|k, t)d\lambda}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)}\pi(\lambda|k, t)d\lambda}. \quad [1]$$

Si la distribución a priori es conjugada, esta prima puede obtenerse a partir de la prima colectiva sustituyendo los parámetros de la distribución a priori por los de la distribución a posteriori.

Como ya se comentó anteriormente, los SBM penalizan a los asegurados que realizan reclamaciones mediante aumentos en las primas, recompensando, como contrapartida, a los asegurados que no realizan reclamación. Para la consecución de este objetivo es usual considerar como valor de la prima el cociente entre una magnitud a posteriori y una magnitud a priori, multiplicada por 100. En nuestro caso, considerando la función de pérdida Esscher, este objetivo puede alcanzarse utilizando la expresión:

$$PBM(k,t) = 100 \frac{P(k,t)}{P(0,0)}. \quad [2]$$

Ejemplo Consideremos una cartera de seguros de automóviles donde el número de reclamaciones K sigue la distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. En el escenario actuarial este parámetro se considera desconocido y aleatorio, con densidad de probabilidad $\pi(\lambda)$. Asumiremos para λ una densidad inversa gaussiana IG (μ, β) . Entonces:

$$\pi(\lambda) = \frac{\lambda^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2\beta} \left(\lambda + \frac{\mu^2}{\lambda} \right)}}{2\mu^{-1/2} K_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{\beta} \right)}, \quad [3]$$

donde K_ν , la función modificada de Bessel de tercer orden con índice ν , es:

$$K_\nu(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\frac{u}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)} dx.$$

La función de densidad Inversa Gaussiana es un caso particular (para $\nu = 1/2$) de la Inversa Gaussiana Generalizada con parámetros n, ν, μ' y β' , GIG (ν, μ', β') , y que viene dada por:

$$P(x) = \frac{\mu'^{(-\nu)} x^{\nu-1} e^{-\left(\frac{x}{2\beta'} + \frac{\mu'^2}{2\beta'x} \right)}}{2K_\nu \left(\frac{\mu'}{\beta'} \right)}.$$

Utilizando las propiedades:

- $K_\nu(u) = K_{-\nu}(u), \quad \forall \nu \in \mathbb{R},$
- $K_{\nu+1}(t) = \left(\frac{2\nu}{t} \right) K_\nu(t) + K_{\nu-1}(t), \quad \forall \nu \in \mathbb{R},$
- $K_{1/2}(u) = \left(\frac{\pi}{2u} \right)^{1/2} e^{-u},$

es posible expresar la densidad de la Inversa Gaussiana como:

$$\pi(\lambda) = \frac{\mu e^{-\frac{1}{2\beta x}(\lambda-\mu)^2}}{\sqrt{2\pi\beta\lambda^{3/2}}}.$$

Ahora, si asumimos que en un período de tiempo t , se observan k reclamaciones la verosimilitud es:

$$f(k, t | \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Debido al hecho de que la densidad inversa gaussiana es conjugada con respecto a la distribución de Poisson, la densidad a posteriori es una Inversa Gaussiana Generalizada, GIG (ν, μ', β') , donde:

$$\nu = k - \frac{1}{2}, \quad \mu' = \mu \sqrt{\frac{1}{2\beta t + 1}}, \quad \beta' = \frac{\beta}{2\beta t + 1}. \quad [4]$$

En conclusión, si el número de reclamaciones está distribuida como una Poisson de parámetro λ , y dicho parámetro se distribuye como IG (μ, β) , la distribución a posteriori será una GIG $(k - 1/2, \mu \sqrt{1/(2\beta t)}, \beta / (2\beta t + 1))$.

La mixtura de la distribución de Poisson con la Inversa Gaussiana ha sido denominada Poisson Inversa Gaussiana (ver Tremblay, 1992, pp.98), y permite obtener, sin mucha dificultad, la función generatriz de probabilidades:

$$P(z) = e^{\frac{\mu}{\beta} [1 - \sqrt{1 + 2\beta(1-z)}]}$$

que puede utilizarse para estimar los parámetros de la distribución a priori por el método de los momentos.

Ahora, es fácil deducir que la media y la varianza incondicional de K vienen dadas por μ y $\mu(1 + \beta)$, respectivamente.

Considerando los datos utilizados por Lemaire (1979, pp.275), y que aparecen en la Tabla 1 (columnas 1 y 2) en los que la media y la varianza son 0,1011 y 0,1074 respectivamente, se deduce aplicando el método de los momentos que:

$$0,1011 = \mu,$$

$$0,1074 = 0,1011(1 + \beta) \Rightarrow \beta = 0,0623.$$

En la Tabla 1 se muestran las frecuencias absolutas de los datos observados y de los ajustados utilizando los valores anteriores. Puede apreciarse que el ajuste obtenido con el par

Poisson-Inversa Gaussiana es mejor que el que se obtiene con el par Poisson-Gamma (Lemaire, 1979, pp.275).

Tabla 1. Reclamaciones observadas y ajustadas

Nº de reclamaciones	Observadas	Ajustadas
0	96.978	96974,97
1	9.240	9245,10
2	704	696,77
3	43	52,60
4	9	4,56
Más de 4	0	0
Total	106.974	106.974

Utilizando ahora los valores μ y β estimados se deducen, a partir de (4), los parámetros de la distribución a posteriori, que son:

$$\mu' = 0,1011 \sqrt{\frac{1}{0,1246t+1}}, \quad \beta' = \frac{0,0623}{0,1246t+1}.$$

La Tabla 2 recoge las primas bonus-malus obtenidas a partir de (2), para las que se ha utilizado como medida de aversión al riesgo el valor $c = 0,04$. En el apéndice de este trabajo aparece desarrollada dicha expresión para el ejemplo que nos ocupa.

Tabla 2. Primas bonus-malus bajo el principio Esscher

		k						
		0	1	2	3	4	5	6
t	0	100	-	-	-	-	-	-
	1	94,270	149,176	224,290	314,151	-	-	-
	2	89,429	138,831	205,820	285,885	373,817	466,049	-
	3	85,257	130,165	190,568	262,684	342,029	425,427	511,078
	4	81,622	122,783	177,743	243,287	315,511	391,565	469,785

Como podemos observar, un asegurado que en el segundo año no presenta reclamación paga 89,429 u.m., mientras que si en el siguiente período realiza una reclamación pasará a pagar 130,165 u.m. Por el contrario, si no hubiese experimentado reclamación su prima hubiese disminuido 4,172 u.m., al pasar de 89,429 u.m. a 85,257 u.m.

3. UNA SOLUCIÓN MÁS COMPETITIVA

En el mercado de seguros de automóviles es costumbre en los últimos años que el asegurado cambie habitualmente de compañía aseguradora buscando precios más competitivos, más teniendo en cuenta que cuando un asegurado cambia de compañía aseguradora se lleva consigo su historial de siniestralidad pudiendo, por tanto, mantener su bonificación.

Esto, obviamente, representa un problema para la compañía aseguradora, pues los asegurados situados en las clases bonus ($k = 0$) pueden optar por abandonar dicha compañía para asegurarse en otra con precios más bajos. Además, para la compañía aseguradora, el perder los ingresos que le reporta estos clientes supone no poder compensar el balance de la empresa, pues aunque los asegurados situados en las clases malus ($k > 0$) paguen más, son generalmente una población menos numerosa la que figura en estas clases. Todo esto puede desembocar en que se rompa el equilibrio financiero de la compañía aseguradora. De aquí que sea necesario desarrollar una nueva metodología que permita disminuir la prima a los asegurados bonus. Como contrapartida, se incrementarán las primas de los asegurados malus. El principio de prima Esscher, como veremos, permite este reequilibrio.

La siguiente metodología está basada en una idea de Lemaire (1979) que maximiza una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria de la compañía aseguradora. Denotaremos por j , $j = 0, 1, \dots, m$, las distintas clases en que aparece dividida la cartera; N_j^t es el número de asegurados en la clase j y en el período t siendo $N = \sum_{j=0}^m N_j^t$ el número de asegurados total de la cartera en el período t .

Para resolver el problema que nos ocupa proponemos tomar como valor de la prima:

$$PBM^*(j, t) = 100 \frac{P^*(j, t)}{P^*(0, 0)}, \quad [5]$$

donde $P^*(j, t)$ es la solución del problema de optimización siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min } Z = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t \int_0^{\infty} (P(\lambda) - P^*(j, t))^2 e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda | j, t) d\lambda, \\ \text{s.a } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^m N_j^t P^*(j, t) = \bar{\lambda}, \end{array} \right\} \text{ (P)}$$

y en el que la restricción iguala la prima media con la media de reclamación, imponiendo la condición de estabilidad financiera para la empresa aseguradora.

$$\text{Esto es, } E[X] = E[E(X|\lambda)] = \int_{\Lambda} \lambda \pi(\lambda) d\lambda = \bar{\lambda}.$$

Proposición 1. La solución del problema (P) viene dada por:

$$P^*(j, t) = P(j, t) + \frac{1}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda} \frac{N\bar{\lambda} - \sum_{j=0}^m N_j^t P(j, t)}{\sum_{j=0}^m \frac{N_j^t}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda}},$$

Demostración.- Consideremos la función lagrangiana

$$\psi = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t \int_{\Lambda} (P(\lambda) - P^*(j, t))^2 e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda - \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t P^*(j, t) - \bar{\lambda} \right).$$

De las condiciones de primer orden de extremo local:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t P^*(j, t) = \bar{\lambda}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial P^*(j, t)} = 0 &\Rightarrow \frac{-2N_j^t}{N} \int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} (P(\lambda) - P^*(j, t)) \pi(\lambda|j, t) d\lambda = \frac{\alpha N_j^t}{N} \\ &\Rightarrow \int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} (P(\lambda) - P^*(j, t)) \pi(\lambda|j, t) d\lambda = -\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

De esta segunda ecuación es fácil deducir:

$$P^*(j, t) = \frac{\int_{\Lambda} P(\lambda) e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda + \alpha/2}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda}. \quad [6]$$

Luego,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t P^*(j, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m N_j^t \frac{\int_{\Lambda} P(\lambda) e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda} + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^m \frac{N_j^t}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda|j, t) d\lambda}.$$

Despejando de esta última expresión $\alpha/2$ y llevándolo a (6) se obtiene el resultado deseado. ∇

Ejemplo (Continuación) La Tabla 3 nos muestra una simulación (Lemaire, 1979, pp.279) de la cartera de seguro de automóviles que nos ocupa compuesta por asegurados, y de la que pueden obtenerse los valores de $N'_j, j = 0, 1, \dots, m$, con $m = 6$ para nuestra cartera.

Tabla 3 Distribución de los asegurados en la cartera

		<i>k</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>t</i>	0	10.000	-	-	-	-	-	-
	1	9.059	877	58	6	-	-	-
	2	8.297	1.472	197	31	2	1	-
	3	7.584	1.947	381	73	12	2	1
	4	6.991	2.238	600	130	29	8	4

Puede observarse como el porcentaje mayor de la población asegurada aparece siempre en la clase bonus para los cuatro años de observación. Dichos valores son necesarios para obtener las primas bonus-malus deducidas utilizando (5) y que se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4 Nuevas primas *bonus-malus*

		<i>k</i>						
		0	1	2	3	4	5	6
<i>t</i>	0	100	-	-	-	-	-	-
	1	94,049	151,355	229,752	323,539	-	-	-
	2	89,282	140,847	210,763	294,326	386,099	482,361	-
	3	84,897	131,768	194,810	270,077	352,889	439,930	529,323
	4	81,044	124,004	181,365	249,773	325,152	404,529	486,167

Como se aprecia, comparando con la Tabla 2, las primas para los asegurados bonus ha disminuido a costa de un incremento de las mismas para los asegurados situados en las clases malus. Este incremento es más acusado en las clases con mayor número de reclamaciones (clases malus).

Pudiera parecer contradictorio proponer un sistema en el que la clase de asegurados bonus, la más numerosa, tenga que pagar menos ahora a costa de una penalización ligeramente mayor a los asegurados malos. En la práctica, es probable que muchos de los asegurados situados en la posición $(k, t) = (0, t)$ prefiriesen pagar un poco más ahora, de modo que si incurriesen en una reclamación al año siguiente su prima no se incrementase demasiado. Sin embargo, este hecho puede dar lugar a que el asegurado, en caso de siniestro, llegase a un acuerdo (como así sucede habitualmente para siniestros leves) con la otra parte y no diese conocimiento a la compañía aseguradora del siniestro acaecido. El objetivo, obviamente, es mantenerse en la clase en la que estaba.

Parece razonable, pues, que los asegurados que no incurran en reclamación paguen menos, y esto se consigue con el modelo propuesto. Puede argumentarse que los asegurados malos pagan más ahora, pero si se comparan los valores de las Tablas 2 y 4, para $k = 1$ se observa que el incremento es ligero, y sólo es acusado para $k \geq 2$. Insistimos en que son pocos los asegurados pertenecientes a estas clases, como se aprecia en la Tabla 3.

6. CONCLUSIONES Y LÍNEAS ABIERTAS

En este trabajo se ha utilizado el principio de prima Esscher para el cálculo de primas bonus-malus y se ha propuesto una metodología que, manteniendo el equilibrio financiero de la compañía aseguradora, ofrece primas más reducidas a los asegurados de la clase bonus. Se pretende con ello conseguir que se reduzca el abandono de estos asegurados buscando compañías con precios más competitivos.

Aunque el análisis se ha ilustrado con el par Poisson-Inversa Gaussiana, podría ser utilizado en el tradicional Poisson-Gamma. Sin embargo hemos comprobado como el ajuste con el primer par es mejor que con el segundo (el lector puede contrastar con los datos que aparecen en Lemaire, 1979, pp.275).

Una apartado que merece ser investigado es averiguar bajo qué condiciones y principios de cálculo de primas (neta, varianza, exponencial, etc.) se mantiene la reducción de las primas para los buenos asegurados y el incremento para los malos. Para una revisión detallada de los diversos principios de cálculo de primas utilizados en la literatura actuarial el lector puede consultar el texto de Gerber (1979) y el trabajo de Heilmann (1989).

Agradecimientos.

Los autores agradecen muy sinceramente los comentarios de dos evaluadores anónimos que han ayudado a mejorar este trabajo.

EGD agradece la financiación parcial recibida del Proyecto BEC 2001/3774.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAIONE, F.; LEVANTESI, S. Y MENZIETTI, M. (2002): The development of an optimal Bonus-Malus system in a competitive market, *Astin Bulletin*, vol. 32, 1, 159-169.
- COENE, G. Y DORAY, L. (1996). 'A financially balanced Bonus-Malus System, *Astin Bulletin*, 26, 107-116.
- FRANGOS, N. Y VRONTOS, S. (2001): Design of optimal Bonus-Malus systems with a frequency and severity component on an individual basis in automobile insurance, *Astin Bulletin*, 31, 1, 1-22.
- GERBER, H. (1979): An introduction to mathematical risk theory, Huebner Foundation.
- GERBER, H. Y ARBOR, A. (1980): Credibility for Esscher Premiums. *Mitteilungen Vereinigungschweizer Versicherungsmathematiker*, Heft 3.
- GÓMEZ, E.; HERNÁNDEZ, A. Y VÁZQUEZ, F. (2001). Robust Bayesian Premium Principles in Actuarial Science, *Journal of the Royal Statistical Society. Series D. The Statistician*, 49, 2, 241-252.
- GÓMEZ, E.; PÉREZ, J.; HERNÁNDEZ, A. Y VÁZQUEZ, F. (2002). Measuring sensitivity in a Bonus-Malus system, *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 1, 05-113.
- HEILMANN, W. (1989). Decision Theoretic Foundations of Credibility Theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, 8, 77-95.
- LEMAIRE, J. (1979): How to define a Bonus-Malus system with an exponential utility function, *Astin Bulletin*, 10, 274-282.
- LEMAIRE, J. (1985): *Automobile Insurance (Actuarial Models)*, Kluwer-Nijhoff Publishing. Boston/Dordrecht/Lancaster.
- LEMAIRE, J. (1995): *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers. Boston/Dordrecht/Londres.
- MENG, Y. Y WHITMORE, G. (1999). Accounting for individual over-dispersion in a Bonus-Malus automobile insurance system, *Astin Bulletin*, 29, 2, 327-337.
- TREMBLAY, L. (1992): Using the Poisson inverse Gaussian in Bonus-Malus systems, *Astin Bulletin*, 22, 1, 97-106.
- VERICO, P. (2002): Bonus-Malus Systems: "Lack of transparency" and adequacy measure, *Astin Bulletin*, 32, 2, 315-318.

APÉNDICE (Cálculo de la prima bonus-malus bajo el principio Esscher)

En primer lugar, la prima de riesgo viene dada por:

$$P(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k e^{ck} f(k|\lambda)}{\sum_{k=0}^{\infty} e^{ck} f(k|\lambda)} = \lambda e^c. \quad [7]$$

El denominador de (2) viene dado, utilizando (1), por:

$$P(0,0) = \frac{\int_{\Lambda} P(\lambda) e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda) d\lambda}{\int_{\Lambda} e^{cP(\lambda)} \pi(\lambda) d\lambda},$$

y teniendo en cuenta (3) y (7) resulta que $P(0,0)$ es el cociente entre:

$$\begin{aligned} E[P(\lambda) e^{cP(\lambda)}] &= \int_{\Lambda} \frac{\mu^{-v} \lambda^{v-1} e^{-\frac{1}{2\beta\lambda}(\lambda^2 + \mu^2)}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \lambda e^c e^{c\lambda e^c} d\lambda = \frac{e^c \mu^{-v}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\Lambda} \lambda^v e^{-\left[\lambda\left(\frac{1}{2\beta} - ce^c\right) + \frac{\mu^2}{2\beta\lambda}\right]} d\lambda \\ &= \frac{e^c \mu^{-v}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\Lambda} \lambda^v e^{-\frac{1}{2\beta\lambda}[\lambda^2(1-2\beta ce^c) + \mu^2]} d\lambda = \frac{e^c \mu^{-v}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\Lambda} \lambda^v e^{-\frac{1-2\beta ce^c}{2\beta\lambda} \left[\lambda^2 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^2\right]} d\lambda \\ &= \frac{e^c \mu^{-v}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\Lambda} \lambda^v e^{-\frac{1}{2\beta\lambda} \left[\lambda^2 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^2\right]} d\lambda \\ &= \frac{e^c \mu^{-v}}{2K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \frac{2K_{v+1}\left(\frac{\mu}{\beta\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)}{\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^{-(v+1)}} = \frac{e^c \mu}{K_v\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \frac{K_{v+1}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{\left(\sqrt{1-2\beta ce^c}\right)^{v+1}}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 E\left[e^{cP(\lambda)}\right] &= \int_{\lambda} \frac{\mu^{-\nu} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2\beta\lambda}(\lambda^2+\mu^2)}}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} e^{c\lambda e^c} d\lambda = \frac{\mu^{-\nu}}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\lambda} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2\beta\lambda}[\lambda^2(1-2\beta ce^c)+\mu^2]} d\lambda \\
 &= \frac{\mu^{-\nu}}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \int_{\lambda} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{1-2\beta ce^c}{2\beta\lambda} \left[\lambda^2 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^2\right]} d\lambda \\
 &= \frac{\mu^{-\nu}}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right)} \frac{2K_{\nu}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{\left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^{-\nu}} = \frac{K_{\nu}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) (\sqrt{1-2\beta ce^c})^{\nu}}.
 \end{aligned}$$

Así, el denominador en (2) es, para el par Poisson-Inversa Gaussiana:

$$P(0,0) = \frac{E\left[P(\lambda)e^{cP(\lambda)}\right]}{E\left[e^{cP(\lambda)}\right]} = \frac{e^c \mu K_{\nu+1}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{K_{\nu}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right) \sqrt{1-2\beta ce^c}}. \quad [8]$$

Finalmente, el numerador de (2) se obtiene sustituyendo en (8) ν , μ y β por las expresiones dadas en (4). ∇

y

Así, el denominador en (2) es, para el par Poisson-Inversa Gaussiana:

$$E[e^{cP(\lambda)}] = \int_{\Lambda} \frac{\mu^{-\nu} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{\lambda}{2\beta\lambda}} e^{c\lambda e^c} d\lambda}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) E\left[P(\lambda) e^{cP(\lambda)}\right]} = \frac{\mu^{-\nu} \int_{\Lambda} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{\lambda}{2\beta\lambda} [\lambda^2(1-2\beta ce^c) + \mu^2]} d\lambda}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) E\left[P(\lambda) e^{cP(\lambda)}\right]}$$

$$= \frac{\mu^{-\nu} \int_{\Lambda} \lambda^{\nu-1} e^{-\frac{1-2\beta ce^c}{2\beta\lambda} \left[\frac{\alpha P(\lambda)}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right]^2} d\lambda}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) \sqrt{1-2\beta ce^c}} \quad [8]$$

Finalmente, el numerador de (2) se obtiene sustituyendo en (8) ν, μ y β por las expresiones dadas en (4).

$$= \frac{\mu^{-\nu} 2K_{\nu}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{2K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) \left(\frac{\mu}{\sqrt{1-2\beta ce^c}}\right)^{-\nu}} = \frac{K_{\nu}\left(\frac{\mu\sqrt{1-2\beta ce^c}}{\beta}\right)}{K_{\nu}\left(\frac{\mu}{\beta}\right) (\sqrt{1-2\beta ce^c})^{\nu}}$$