ESTUDIOS DE ECONOMÍA APLICADA VOL. 21 - 3, 2003. PÁGS. 451-466

Contrastes sobre elasticidades en el modelo de producción frontera. Un enfoque metodológico

DIOS PALOMARES, R.
Efiuco. Grupo de Eficiencia y productividad de la Universidad de Córdoba.
Grupo de Eficiencia y Productividad de la Fundación Centro de Estudios Andaluces.
CENTRA. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Córdoba
Tfno: 957 218 479. E-mail: rdios@uco.es

RESUMEN

Los modelos econométricos, sirven como instrumento para la realización de estudios sobre sus parámetros estructurales, que están enfocados tanto a la interpretación de los valores que toman dichos parámetros, como a contrastar si se cumplen determinadas restricciones sobre los mismos. Sin embargo, profundizando en la contrastación de la teoría económica, se plantea la necesidad del estudio de magnitudes que en la gran mayoría de las modelizaciones econométricas, no coinciden con los parámetros estimados. Tal es el caso de las elasticidades, las propensiones marginales, etc, que a menudo son funciones de dichos parámetros, además de depender de la muestra. Evidentemente, el retorno de escala es a su vez una función de las elasticidades.

En este trabajo se particularizan métodos de contrastes estadísticos con el fin de estimar la matriz de varianzas covarianzas, tanto de las elasticidades como del retorno de escala, y de realizar contrastes de verificación y de validación económica en el contexto del análisis de eficiencia productiva mediante función frontera. En especial se sientan las bases para la aplicación al modelo de efectos conjunto tanto neutral como no neutral.

Palabras clave: Elasticidad, Función Frontera Estocástica, Contrastes Estadísticos, Eficiencia.

Testing elasticity in the Production Frontier Model. A methodological approach

ABSTRACT

The econometric models can be used as an instrument for the study of structural parameters either interpreting its estimated values or testing whether some restrictions are properly fulfilled or not.

In addition, the researchers often need to conduct an investigation into these economic magnitudes that in most of the econometric specifications, do not usually coincide with the parameters, although they are, nevertheless, functions of the same

This is the case of the elasticities which are often functions of the said parameters as well as depending on the sample point.

In this work we show a procedure that allows us to carry out the above tests paying special attention to the stochastic frontier model. We accomplish the method as a particular case of the general constrains tests over the structural parameters, even considering the non- neutral model.

Key words: Elasticities, Stochastics frontier model, Statistical Tests, Efficiency.

Clasificación JEL: D21, C61, C12.

Artículo recibido en marzo de 2003. Aceptado en noviembre de 2003.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis econométrico tiene como objetivo la contrastación de teorías económicas, basándose en observaciones extraídas del mundo real. Con este fin, se especifican modelos que se ajusten a dichas teorías, estimándose posteriormente los parámetros de los mismos, mediante procedimientos que permiten realizar la verificación tanto estadística como económica.

En este contexto, los modelos econométricos estimados, sirven como instrumento para la realización de estudios sobre los parámetros estructurales que están enfocados tanto a la interpretación de los valores que toman dichos parámetros, como a contrastar si se cumplen determinadas restricciones sobre los mismos.

Si nos centramos en el modelo lineal general, hay que decir que tanto el análisis de significación de los parámetros, como el contraste sobre restricciones de los mismos, es de sobra conocido e incluso ampliamente aplicado en trabajos de investigación (Greene, 2000).

Sin embargo, profundizando en la contrastación de la teoría económica, se plantea la necesidad del estudio de magnitudes que en la gran mayoría de las modelizaciones econométricas, no coinciden con los parámetros estimados. Tal es el caso de las elasticidades, las propensiones marginales, etc.

Así, dentro del ámbito de la teoría de la producción, encontramos que si bien pueden tener interés los parámetros estructurales, lo que realmente tiene una gran trascendencia es el estudio de las elasticidades de producción de los factores, y de los retornos de escala.

Cuando la muestra se adapta bien a una especificación sencilla para la tecnología de producción, como es el modelo Cobb Douglas, se da la circunstancia de que las elasticidades de producción coinciden con los parámetros estructurales, pudiendo ser por tanto las varianzas estimadas directamente. Esto permite la realización de análisis de significación sobre dichos parámetros, así como la contrastación sobre cualquier valor de los mismos. Igualmente se realizan test de retornos de escala constantes, crecientes o decrecientes, sin requerir mayor complejidad.

Si embargo, cuando no ocurre lo anteriormente comentado, es necesario adaptar la realidad empírica a otros modelos de tecnología de producción menos simples, como por ejemplo el modelo translog, o el modelo CES.

En estos casos, ocurre que las elasticidades son funciones de dichos parámetros, además de depender de la muestra y tomar un valor para cada observación, con lo que es muy frecuente que se calculen las elasticidades en el punto medio. Evidentemente, el retorno de escala es a su vez una función de las elasticidades.

A pesar del interés que presentan las magnitudes comentadas, ningún paquete econométrico proporciona valores estimados de elasticidades en estas modelizaciones, aunque sí es inmediato el cálculo de las mismas.

No obstante, la estimación de las varianzas de dichas elasticidades, que por otro lado, son imprescindibles para realizar cualquier tipo de análisis de significación, no es tan inmediato. Por este motivo, no es frecuente encontrar trabajos de investigación en los que, habiendo estimado funciones de producción distintas de la Cobb- Douglas, se efectúe un riguroso análisis de verificación y contrastación de las elasticidades y los retornos de escala.

Aunque esta problemática está generalizada a cuaquier modelización económica, en este trabajo nos queremos centrar en la teoría de la producción y más concretamente en el contexto del análisis de la eficiencia productiva mediante la estimación de funciones econométricas de frontera de producción.

En el análisis de eficiencia productiva, existen dos enfoques distintos que dependen de la especificación establecida para el error y que se denominan respectivamente, frontera determinística y estocástica.

El modelo de frontera determinística, requiere la especificación de una función de producción, con una variable de error que recoge la incidencia de la ineficiencia.

Sin embargo, si la eficiencia se estudia admitiendo en el modelo la presencia de una fuente de error añadida, que no depende del empresario, el análisis se realiza en el contexto del modelo de frontera estocástica (Aigner et al, 1977).

El desarrollo metodológico del análisis individual de eficiencia, ha dado lugar al planteamiento de una modelización estocástica, que no solo contiene al modelo de producción frontera, sino que éste se completa con otra función que recoge el comportamiento de la incidencia que determinadas variables tienen sobre la eficiencia (Bettese y Coelli,1995).

Volviendo al problema de la estimación de elasticidades y sus respectivas varianzas, nos encontramos en este contexto del análisis de eficiencia, con la dificultad ya comentada.

En el caso de los modelos simples de frontera determinística y estocástica, este problema, se producirá para tecnologías distintas de la Cobb Douglas. Sin embargo, cuando se especifica el modelo doble, las expresiones que permiten el cálculo de las elasticidades, se complican de modo que constan de dos componentes, originadas respectivamente por el modelo de producción y de eficiencia (Battese y Broca,1997). Esta elasticidad compuesta se produce también con la especificación de Cobb Douglas.

Ocurre, por tanto, que las elasticidades son funciones complicadas de los parámetros cuyas estimaciones aporta el programa FRONTIER (Coelli,1996), siendo a su vez el retorno de escala función de las primeras.

Ante esta circunstancia, es interesante particularizar ciertos métodos de contrastes estadísticos con el fin de estimar la matriz de varianzas covarianzas, tanto de las elasticidades como del retorno de escala, y de realizar contrastes de verificación y de validación económica en el contexto del análisis de eficiencia productiva mediante función frontera.

Este es el objetivo del presente trabajo, aunque hay que señalar, sin embargo, que la metodología que se plantea es valida para cualquier modelo económico.

2. MODELOS DE PRODUCCIÓN FRONTERA

La función de producción se especifica por medio del modelo:

$$y = X * \beta + \varepsilon \qquad \textbf{[1]}$$

donde la parte sistemática del mismo expresa una tecnología de producción, y la variable de error ε, recoge la diferencia entre dicha parte sistemática y los valores observados.

En el ámbito del estudio de la eficiencia por medio de la función de producción frontera, y en base al modelo anterior, se pueden considerar dos enfoques que son los siguientes:

Frontera Global o Determinística:

En este enfoque, la variable de error representa la ineficiencia del sistema. Por tanto, las diferencias ocurridas entre la Y observada y la correspondiente frontera se debieron únicamente a ineficiencia. Este planteamiento supone que la variable de error debe tomar siempre valores negativos, y la frontera estimada superará siempre a los valores observados excepto para la empresa más eficiente cuya producción se encuentra sobre la frontera.

La especificación será por tanto:

$$y = X * \beta + \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon < 0 \qquad \textbf{[2]}$$

Frontera Estocástica o de Error Compuesto:

El modelo simple:

En el enfoque de Error Compuesto, la variable de error no solo recoge el efecto de la ineficiencia, sino que también existe otra fuente de error incluida en la misma, que no es controlable por el individuo. Se admite por tanto, que la variable e se genera como diferencia entre una variable estocástica v (no controlable, simétrica, y definida entre – ∞ e ∞) y la variable de ineficiencia u, que en este caso será siempre positiva y asimétrica, como la definida para la frontera global.

Este modelo se expresa de la siguiente forma:

$$y = X * \beta + \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon = \text{v-u} \ \text{ y } \ \text{u} > 0 \qquad \textbf{[3]}$$

Para realizar el análisis de la eficiencia con este planteamiento, en base a la especificación que se establezca para u, se procede a estimar por máximaverosimilitud el modelo de función frontera, suponiendo para el error compuesto la distribución que le corresponda a e como diferencia de v y u. Como resultado inmediato de dicha estimación se obtienen los residuos que recogen dicho error compuesto, del que habrá que extraer la parte que se deba realmente a ineficiencia.

El planteamiento inicial de este modelo se debe a Aigner et al(1977), que especificaron la variable e como Normal-Seminormal, resolviendo la estimación máximoverosimil de los parámetros β, σ^2_v y σ^2_u. Posteriormente Stevenson (1980), generalizó la especificación a la Normal-Normal Truncada y la Normal-Gamma.

Este enfoque ha tenido una gran difusión en el estudio de eficiencia técnica, sobretodo desde que Jondrow et al (1982), propusieron una expresión para la predicción de la eficiencia individual en base al uso de la esperanza de la distribución u condicionada a e. Más recientemente, y en aras de la mejora de dicha predicción, Battese y Coelli (1988) recomiendan el cálculo de la misma mediante la esperanza de la exponencial de u condicionada a ε.

El modelo conjunto:

El desarrollo de metodologías enfocadas al análisis de la eficiencia, ha llevado a tratar de relacionar la ineficiencia detectada en los distintos puntos muestrales, empresas, o empresarios, con los factores causantes de la misma.

Con este fin se han efectuado un gran número de aplicaciones en las que en primer lugar se estima el índice de eficiencia y posteriormente se relaciona éste con las variables socioeconómicas mediante regresión, correlaciones e incluso análisis de la varianza (Bravo-Ureta y Evenson,1994 y Alvarez, 2001).

Este método, que se conoce como de "dos etapas" (Pitt y Lee,1981), ha sido sin embargo objeto de críticas en el sentido de que resulta incongruente el supuesto paramétrico de la estimación de la primera etapa con la segunda. Para evitar esta incongruencia se planteó el método de modelo conjunto (Battese y Coelli, 1995).

Este último se apoya en la teoría de que la distribución de la variable u (que pasará a ser u_i), no se va manteniendo igual para todas las empresas, sino que el parámetro μ (μ_i) depende de algunos factores socioeconómicos. Se especifica de esta forma el modelo de frontera como hemos planteado hasta aquí en (3), pero éste se estima conjuntamente con el modelo de ineficiencia que recoge la influencia de los factores socioeconómicos sobre el parámetro μ_i y que se expresa del modo

$$\mu_i = g(\delta, Z_i) \qquad \textbf{[4]}$$

siendo Z_i un vector de variables socioeconómicas asociadas con los efectos de ineficiencia; δ es un vector de parámetros; y g(.) es una forma funcional apropiada, normalmente lineal.

Otro enfoque algo más complejo que el anterior, es el modelo conjunto no neutral (Huang y Liu, 1994). Bajo esta metodología, se admite que la incidencia de las variables socioeconómicas en la eficiencia, se puede ver afectada por los factores de producción. Por este motivo, se incluyen en el modelo de eficiencia variables que recogen los productos cruzados de dichos factores con las socioeconómicas, y que designamos *Z′*. Queda, por tanto la especificación del modelo de eficiencia del siguiente modo:

$$\mu_i = g(\delta, Z_i, \delta'_i, Z_i') \qquad \textbf{[5]}$$

La denominación de no neutral de este modelo provoca que al modelo (4) anterior se le denomine neutral.

Según este planteamiento, a la variable que recoge la ineficiencia de cada empresa se le supone un valor distinto de μ_i que es la media de la Normal completa de la que procede u_i, asumiendo el mismo parámetro σ^2_u para todas. En base a los anteriores supuestos, queda claro que si bien los parámetros λ y γ son iguales para toda la muestra, no lo son en cambio los valores reales de las varianzas de las u_i, por lo que cabe calcular un valor distinto de λ_{Ri} y γ_{Ri}[1] para cada unidad muestral, debido a que el cambio en m_i supone también cambio en el coeficiente de variación, en el truncamiento y por tanto en el valor de $V(u_i)$.

3. PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO GENERAL

Para efectuar el análisis metodológico sobre el cálculo de las elasticidades y sus covarianzas, partimos del siguiente modelo general:

$$y_i = f(F_{ji}, \beta_j) \qquad \textbf{[6]}$$

donde *y* representa la producción, F_j, los factores de producción, $f(.)$ una función que recoge el comportamiento de la tecnología de producción, y β_j los parámetros correspondientes a dichos factores.

Como es bien conocido, la elasticidad de producción de cada factor F_j, viene dada por la expresión

$$E_j = \frac{\partial y}{\partial F_j} * \frac{F_j}{y} \qquad \textbf{[7]}$$

1. Estos valores de λ y γ son los que se calculan en base a las varianzas reales de las variables de eficiencia (Dios, R. 2002).

En este contexto, hay que comentar, que dependiendo de la especificación que se adopte para la tecnología de producción, el cálculo de la elasticidad será más o menos inmediato.

Es importante, no obstante, considerar que para las especificaciones de los modelos que nos ocupan, se podrá establecer un relación lineal que liga la elasticidad con los parámetros estructurales. Esto nos permitirá realizar el planteamiento general que se expone a continuación.

Estimación de elasticidades y retornos de escala

En el estudio de los modelos de producción objeto de nuestro estudio, la elasticidad de producción permite ser expresada de la siguiente forma general:

$$E_j = g(\beta) \qquad \textbf{[8]}$$

donde β es el vector de los parámetros estructurales y *g(.)* es una función lineal de los mismos. Tomando conjuntamente todas las elasticidades, e incluyéndolas en un vector, se puede plantear una relación lineal del siguiente modo:

$$E = R * \beta \qquad \textbf{[9]}$$

siendo E un vector columna de dimensión k igual al número de factores, cuyos elementos son las correspondientes elasticidades de Producción de los factores, R es una matriz de dimensión k × l, siendo l el número de parámetros del modelo implicados en el cálculo de las elasticidades, y β el vector de dichos parámetros.

Hay que tener en cuenta, no obstante, que dado que los parámetros no son conocidos por el investigador, hemos de movernos en el ámbito de la estimación, con lo que el estudio de las elasticidades habrá de basarse en el vector de parámetros estimado $\hat{\beta}$.

El vector de elasticidades estimadas será por tanto:

$$\hat{E} = R * \hat{\beta} \qquad \textbf{[10]}$$

Para el cálculo de los retornos de escala, el planteamiento se puede hacer con la misma estructura matricial anterior. Si tenemos en cuenta que el retorno de escala es igual a la suma de las elasticidades, la expresión que permite su cálculo será

$$R\hat{E} = i * \hat{E} \qquad \textbf{[11]}$$

donde i es el vector fila unidad de dimensión k.

Con todo lo anterior, queda sistematizada la estimación de las elasticidades y los retornos de escala sin que parezca ofrecer mayor dificultad. Sin embargo, hay que considerar que también es de gran interés conocer su distribución, tanto por su estudio en sí, como por su implicación como medio para la realización de contrastes de hipótesis.

Distribución del vector de elasticidades

En el estudio de la distribución del vector de elasticidades, considerado como función lineal de los parámetros, será fundamental el conocimiento de la distribución de estos.

Dado que los estimadores de los parámetros del modelo de producción frontera son máximoverosímiles, podemos aceptar que constituyen un vector que sigue asintóticamente una distribución normal l-variante, con un vector esperanza igual a b y una matriz de covarianzas asintóticas que denominaremos Σ.

Es decir

$$\hat{\beta} \approx N_l(\beta, \Sigma) \qquad [12]$$

Con esta base, podemos establecer que la distribución del vector de elasticidades será asintóticamente normal k variante con vector esperanza igual a $R * \beta$, y matriz de covarianzas que vendrá dado por la expresión:

$$VE = (R * \Sigma * R') \qquad [13]$$

Será por tanto

$$E \approx N_k \left[R * \beta, (R * \Sigma * R') \right] \qquad [14]$$

Distribución de los retornos de escala

A partir de la expresión (11), en que se plantea el retorno de escala como una función lineal de las elasticidades podemos emplear los mismos argumentos del párrafo anterior para deducir que la distribución del retorno de escala será asintóticamente normal con esperanza matemática igual a $i*E$ y varianza

$$VRE = (i * R * \Sigma * R' * i') = (i * VE * i') \qquad [15]$$

es decir

$$RE \approx N \left[i * E, (i * VE * i') \right] \qquad [16]$$

Contrastes de hipótesis

La realización de contrastes de hipótesis con respecto a valores concretos de las elasticidades, así como de cualquier función lineal de las mismas, no presenta ninguna dificultad, una vez establecidas las distribuciones en la línea desarrollada en el párrafo anterior.

Por ejemplo, para contrastar si una elasticidad E_j es significativamente distinta de un valor concreto E_{j0}, bastará comprobar si el estadístico

$$tE_j = \frac{\hat{E}_j - E_{jo}}{\sqrt{V\hat{E}_j}} \approx N(0{,}1) \qquad \textbf{[17]}$$

siendo $V\hat{E}_j$ el estimador de su varianza asintótica.

Con respecto a las funciones lineales de las elasticidades, hay que comentar que, obviamente, un caso particular de las mismas es el retorno de escala, que hemos estudiado por su gran repercusión en el análisis de producción objeto de investigación. Está claro, no obstante, que cualquier otra restricción sobre las elasticidades se realiza sin más que sustituir el vector *i,* por el correspondiente a dicha restricción.

En base a la distribución Normal del estimador que corresponde a la magnitud que queremos contrastar, el estadístico del contraste se comportará como una Normal tipificada, permitiendo esta circunstancia aceptar o no la hipótesis planteada.

4. ESTUDIO SOBRE LAS ELASTICIDADES EN LOS MODELOS DE PRODUCCIÓN FRONTERA

Una vez establecido un planteamiento general, interesa particularizar para cada modelo y cada especificación, el dimensión y contenido de los vectores y matrices que intervienen en las distribuciones de las elasticidades. Como veremos, es fundamental sobretodo la matriz *R*.

4.1. Elasticidades

Para el tratamiento de las elasticidades y los retornos de escala distinguiremos entre dos grupos de modelos.

Al primer grupo pertenecen el modelo de producción media (1), el modelo de frontera determinística (2), el modelo simple de frontera estocástica (3) y el modelo conjunto neutral [(3)+(4)]. Los tres primeros comparten la misma especificación en la parte sistemática, estando claro que la diferencia entre ellos se la introduce la especificación de la variable de error. El modelo conjunto consta de dos partes: el modelo de producción frontera (3), cuya parte sistemática es como la de los tres anteriores, y el modelo de eficiencia en el que intervienen las variables que se considera pueden incidir en la misma. Como vimos en el apartado 2, el modelo conjunto neutral no incluye factores de producción en la especificación de la eficiencia (4).

Como quiera que es precisamente la parte sistemática del modelo de producción la que compete a las elasticidades de producción, podremos estudiar los cuatro modelos indicados dentro del mismo bloque.

Sin embargo, en el modelo conjunto no neutral [(3)+(5)], la parte que modeliza la eficiencia (5), contiene factores de producción. Esto hace que el cálculo de las elasticidades se vea afectado por un segundo término que procede del modelo de eficiencia. Por este motivo, le daremos un tratamiento separado a este modelo, que es el que configura el segundo de los grupos a que nos hemos referido.

Primer grupo:

Para el estudio de las elasticidades y retornos de escala nos basaremos en los modelos de este grupo, particularizando a dos factores de producción sin perdida de generalidad.

En este caso el parámetro k es igual a 2, y por tanto el vector de elasticidades estimado será: $\hat{E} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{pmatrix}$.

Especificación Cobb-Douglas:

Cuando la función es de tipo Cob-Douglas, viene dada por la función:

$$y_i = e^{\beta_0} F_{1i}^{\beta_1} F_{2i}^{\beta_2} \quad \textbf{[18]}$$

Este modelo se puede linealizar tomando logaritmos, y queda:

$$Ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 Ln(F_{1i}) + \beta_2 Ln(F_{2i}) \quad \textbf{[19]}$$

Aplicado la fórmula (7), cada elasticidad coincide con el parámetro estructural correspondiente al factor de producción, por lo que no se presenta ningún problema en la estimación de las mismas ni en la de sus desviaciones típicas.

Particularizando el planteamiento general a esta especificación tendremos que l = 2, y

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix}; \ \Sigma = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^{\ 2} & \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{12} & \tilde{\sigma}_2^{\ 2} \end{pmatrix}; \ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{[20]}$$

Las estimaciones de las elasticidades de producción serán por tanto:

$$\hat{E}_1 = \tilde{\beta}_1 \quad \text{y} \quad \hat{E}_2 = \tilde{\beta}_2 \, ,$$

y sus distribuciones asintóticas $\hat{E}_1 \approx N(\beta_1, \tilde{\sigma}_1^2)$ y $\hat{E}_2 \approx N(\beta_2, \tilde{\sigma}_2^2)$, ya que aplicando (13) tenemos que

$$V\hat{E} = \Sigma \quad \textbf{[21]}$$

Esto permite asimismo la realización inmediata de contrastes de hipótesis, como se vio en el apartado 3.

Especificación Translog

Si nos centramos en la especificación translog, la función de producción transformada se expresa de la siguiente forma:

$$Ln(y_i) = \beta_0 + \beta_1 Ln(F_{1i}) + \beta_2 Ln(F_{2i}) + \beta_{11} Ln(F_{1i})^2 + \beta_{22} Ln(F_{2i})^2 + \beta_{12} Ln(F_{1i}) Ln(F_{2i}) \quad \textbf{[22]}$$

Abordando la estimación de las elasticidades de producción para este modelo, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\hat{E}_1 = \tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_{11} * Ln(F_{1i}) + \tilde{\beta}_{12} * Ln(F_{2i}) \text{ y}$$
$$\hat{E}_2 = \tilde{\beta}_2 + 2\tilde{\beta}_{22} * Ln(F_{2i}) + \tilde{\beta}_{12} * Ln(F_{1i}) \quad \textbf{[23]}$$

En base a lo anterior queda claro que las elasticidades deducidas, contienen valores de las variables que miden los factores de producción. Esto hace que dichas elasticidades varíen para cada punto muestral. Así, cuando se aborda un estudio sobre elasticidades con esta especificación, se puede estudiar la distribución de cada elasticidad, o valorarla en un punto concreto de la muestra, siendo lo más frecuente que se tome el punto medio de cada factor de producción. En el presente estudio, consideraremos precisamente dicho punto medio, aunque está claro que la consideración de cualquier otro, mantiene la validez del resto del trabajo.

En base a lo expuesto, podemos decir que la estimación de las elasticidades de producción estará resuelta en el caso de la especificación translog, como funciones de los estimadores de los parámetros estructurales, sin más que asignarle valores a los factores de producción que aparecen en su expresión.

Las elasticidades en el punto medio serán:

$$\hat{E}_1 = \tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_{11} * Ln(\overline{F}_1) + \tilde{\beta}_{12} * Ln(\overline{F}_2)$$
$$\hat{E}_2 = \tilde{\beta}_2 + 2\tilde{\beta}_{22} * Ln(\overline{F}_2) + \tilde{\beta}_{12} * Ln(\overline{F}_1) \quad \textbf{[24]}$$

donde $\overline{F}_j$ son las medias de los correspondientes factores de producción.

Particularizando el planteamiento general, obtenemos que el número de parámetros implicados en la estimación de las elasticidades es I = 5, y las matrices correspondientes toman la siguiente forma:

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\beta}_{11} \\ \tilde{\beta}_{22} \\ \tilde{\beta}_{12} \end{pmatrix}; \; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 & r_{15} \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} & r_{25} \end{pmatrix}, \quad \textbf{[25]}$$

donde: $r_{13} = 2 * Ln(\overline{F}_1)$; $r_{15} = Ln(\overline{F}_2)$; $r_{24} = 2 * Ln(\overline{F}_2)$ y $r_{25} = Ln(\overline{F}_1)$.

El vector de elasticidades vendrá dado por la expresión (10), y la matriz de covarianzas de las mismas será según (13):

$$V\hat{E} = (R * \Sigma^{-1} * R')^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 & r_{15} \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} & r_{25} \end{pmatrix} * \Sigma^{-1} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r_{13} & 0 \\ 0 & r_{24} \\ r_{15} & r_{25} \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad \textbf{[26]}$$

donde Σ^{-1} es la inversa de la matriz de dimensión 5×5 que contiene las covarianzas asintótica de los estimadores incluidos en el vector $\tilde{\beta}$.

Segundo grupo:

Estudiamos dentro de este grupo el modelo conjunto no neutral de frontera estocástica, particularizado a dos factores de producción y una variable explicativa de la eficiencia por motivos de simplicidad (Tveteras y Battese, 2001).

Al igual que para el grupo anterior, analizaremos dos especificaciones para el modelo de producción frontera (3), aunque mantendremos la siguiente estructura para el modelo de eficiencia (5):

$$\mu_i = \delta_0 + \delta_1 * Z_i + \delta_1' * Z_{1i}' + \delta_2' * Z_{2i}' \quad \textbf{[27]}$$

donde Z es la variable socioeconómica que puede incidir en la eficiencia, y $Z_1' = Ln(F_1) * Z$ y $Z_2' = Ln(F_2) * Z$ son las variables que proporcionan la incidencia no neutral de la misma, debido a la incorporación de los productos con los factores de producción.

En el cálculo de las elasticidades de producción, esta especificación del modelo conjunto no neutral proporciona un segundo termino a sumar a la calculada para el primer grupo de modelos.

Consideramos, por tanto, que cada elasticidad de producción está formada por dos partes que llamaremos E_P y E_E, de modo que

$$E_j = E_{jp} - E_{jE} \quad \textbf{[28]}$$

El término E_P es la elasticidad debida al modelo de producción (3), por lo que coincidirá con la ya calculada para el primer grupo de modelos. El término E_E, denominada elasticidad de la eficiencia técnica, proviene, en cambio, del modelo de eficiencia (5 ó 27) y tendrá la siguiente expresión:

$$E_{JE} = C_i * \frac{\partial \mu_i}{\partial F_j} \qquad [29]$$

con

$$C_i = 1 - \frac{1}{\sigma_u}\left\{\frac{\phi\left(\frac{\mu_i}{\sigma_u} - \sigma_u\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_i}{\sigma_u} - \sigma_u\right)} - \frac{\phi\left(\frac{\mu_i}{\sigma_u}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu_i}{\sigma_u}\right)}\right\} \qquad [30]$$

siendo ϕ y Φ las funciones de densidad y distribución de la normal tipificada, respectivamente, y μ_i y σ_u, los parámetros de la distribución Normal truncada que sigue la eficiencia para cada punto muestral.

Como puede verse claramente, también esta componente de la elasticidad incluye valores variantes con la muestra, por lo que haremos el tratamiento en el punto medio. Así, particularizando para un punto, el término C_i, será común para todas las elasticidades que tengamos que calcular, que en este caso son dos, puesto que estamos trabajando con un modelo de dos factores de producción.

Denominaremos $\overline{C}$ a este término valorado en el punto medio, y vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\overline{C} = 1 - \frac{1}{\tilde{\sigma}_u}\left\{\frac{\phi\left(\frac{\overline{\mu}}{\tilde{\sigma}_u} - \tilde{\sigma}_u\right)}{\Phi\left(\frac{\overline{\mu}}{\tilde{\sigma}_u} - \tilde{\sigma}_u\right)} - \frac{\phi\left(\frac{\overline{\mu}}{\tilde{\sigma}_u}\right)}{\Phi\left(\frac{\overline{\mu}}{\tilde{\sigma}_u}\right)}\right\} \qquad [31]$$

siendo $\tilde{\sigma}_u$ el estimador máximoverosimil de σ_u.

El valor de $\overline{\mu}$ se calcula en base a la estimación del modelo (5) que será:

$$\overline{\mu} = \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 * \overline{Z} + \tilde{\delta}_1' * \overline{Z_1'} + \tilde{\delta}_2' * \overline{Z_2'} \qquad [32]$$

donde $\overline{Z}$ y $\overline{Z_j'}$ son los valores medios de las correspondientes variables, y $\tilde{\delta}_0$, $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_j'$ los estimadores procedentes de la estimación máximoverosimil del modelo de eficiencia.

Volviendo a la expresión (29), analizamos el segundo factor que es $\frac{\partial \mu_i}{\partial F_j}$, y que se calcula a partir del modelo (27), que desarrollamos a continuación

$$\mu_i = \delta_0 + \delta_1 * Z_i + \delta_1' * F_1 * Z_i + \delta_2' * F_2 * Z_i \qquad [33]$$

Las respectivas derivadas parciales con respecto a cada factor serán:

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial F_1} = \delta_1' * Z_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial F_2} = \delta_2' * Z_i \qquad \textbf{[34]}$$

con lo que tenemos: $E_{1E} = \overline{C} * \delta_1' * Z$ y $E_{2E} = \overline{C} * \delta_2' * Z$ que estimadas en el punto medio quedan del modo:

$$\hat{E}_{1E} = \overline{C} * \tilde{\delta}_1' * \overline{Z} \quad \text{y} \quad \hat{E}_{2E} = \overline{C} * \tilde{\delta}_2' * \overline{Z} \qquad \textbf{[35]}$$

Especificación Cobb-Douglas:

En el caso de que el modelo conjunto no neutral adopte la especificación Cobb-Douglas para el modelo de producción, el número de parámetros es igual a cuatro, y los vectores y matrices implicados en las elasticidades serán los siguientes:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_1' \\ \delta_2' \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} \end{pmatrix} \qquad \textbf{[36]}$$

con $r_{13} = r_{24} = -\overline{C} * \overline{Z}$

Especificación Translog

Para esta especificación en el modelo de producción, el número de parámetros es de siete, quedando los vectores con la siguiente estructura:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{12} \\ \delta_1' \\ \delta_2' \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{13} & 0 & r_{15} & r_{16} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{24} & r_{25} & 0 & r_{27} \end{pmatrix} \qquad \textbf{[37]}$$

con $r_{16} = r_{17} = -\overline{C} * \overline{Z}$ y el resto igual que en (25).

4.2. Retornos de escala

El hecho de que se considere un modelo con dos factores de producción, da lugar a que el número de elasticidades sea de dos igualmente. Así, para todas las especificaciones y modelos estudiados tendremos un tratamiento común del retorno de escala que será el siguiente:

El vector de elasticidades es $\hat{E} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{pmatrix}$ y la matriz de covarianzas

$V\hat{E} = \begin{pmatrix} V\hat{E}_1 & V\hat{E}_{12} \\ V\hat{E}_{21} & V\hat{E}_2 \end{pmatrix}$, por lo que el retorno de escala se expresa del siguiente modo:

$R\hat{E} = (1 \quad 1) * \begin{pmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{pmatrix} = \hat{E}_1 + \hat{E}_2$ y su matriz de covarianzas vendrá dada por

$$VR\hat{E} = \left[(1 \quad 1) * \begin{pmatrix} V\hat{E}_1 & V\hat{E}_{12} \\ V\hat{E}_{21} & V\hat{E}_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se expone una metodología que se apoya en el contraste de restricciones sobre los parámetros estructurales, adaptada al estudio de las elasticidades y cualquier otra función lineal de dichos parámetros. Asimismo se ha particularizado al cálculo de elasticidades y retornos de escala en el modelo de función de producción frontera no neutral, presentando las expresiones que permiten la contrastación de las hipótesis que ofrecen un gran interés en el ámbito del análisis de eficiencia mediante función frontera.

BIBLIOGRAFÍA

AIGNER, D., C. A. K. LOVELL, AND P. SCHMIDT (1977), "*Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models*", Journal of Econometrics 6, 21-37.

ÁLVAREZ PINILLA, A., (2001) " *El concepto y medición de eficiencia productiva* "en Álvarez. P. , A. Ed. La medición de la eficiencia y la productividad. Pirámide.

BATTESE, G.E., BROCA, S.S., (1997), "Functional Forms of Stochastic Frontier Production Functions and Models for Technical Inefficiency Effects: A Comparative Study for Wheat Farmers in Pakistan", *Journal of Productivity Analysis,* 8,395, 414.

BATTESE, G.E., COELLI, T.J., (1988), "*Prediction of Firm-Level Technical Efficiencies with Generalised Frontier Production Function and Panel Data*", Journal of Econometrics, 38, 387-399.

BATTESE, G.E., COELLI, T.J., (1995), *"A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data"*, Empirical Economics, 20, 325-332.

BRAVO-URETA, B.E., EVENSON, R.E., (1994), *"Efficiency in Agricultural Production: The Case of Peasant Farmers in Eastern Paraguay"*, Agricultural Economics, 10, 27-37.

COELLI, T.J., (1996), "*A Guide to FRONTIER Version 4.1: A Computer Program for Stochastic Frontier Production and Cost Function Estimation"*, mimeo, Departament of Econometrics, University of New England, Armidale, Australia.

DIOS, R., (1998), *"Estudio sobre la relación de varianzas en la estimación de funciones frontera",* Congreso ASEPELT, Córdoba, Junio

DIOS, R., (2002), *"Análisis de interpretación de los parámetros de relación de varianzas en el modelo de frontera estocástica",* Estudios de Economía Aplicada, 20-2, 365,380.

GREENE, W. H. (2000)."*Econometric Analysis"*. 4ª Ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, New York.

JONDROW, J., C. A. K. LOVELL, I. S. MATEROV, AND P. SCHMIDT (1982), "*On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model"*, Journal of Econometrics 19, 233-238.

HUANG, C.J., LIU, J.-T., (1994), *"Estimation of a Non-neutral Stochastic Frontier Production Function"*, Journal of Productivity Analysis, 5, 171-180.

PITT, M.M., LEE, L-F., (1981), *"Measurement and Sources of Technical Inefficiency in the Indonesian Weaving Industry"*, Journal of Development Economics, 9, 43-64.

STEVENSON, R.E., (1980*), "Likelihood Functions for Generalised Stochastic Frontier Estimation"*, Journal of Econometrics, 13, 57-66.

TVETERAS R.; BATTESE G.E. (2001) *"The influence of Regional Agglomeration Externalities on Efficiency in Norwegian Salmon Aquaculture"* CEPA Working Paper nº 1/2001. University of New England. Australia.